ISSN 1028- 7507 *Акустичний вiсник. 2001. Том 4, N 1. С. 70 – 73*

УДК 532.5:534.222.2

НАРУШЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. А. ПОЗДЕЕВ

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев

Получено 29.05.2000

На примере аналитического решения начально-краевой задачи об излучении акустических волн движущимся плоским поршнем показано нарушение принципа суперпозиции при учете подвижности границ даже для линейного волнового уравнения. Построенное решение для движения поршня, представленного в виде наложения колебаний малой амплитуды на постоянную скорость, описывает известный закон Допплера. Все результаты получены на основе метода нелинейного преобразования времени.

На прикладi аналiтичного рiшення початково-крайової задачi про випромiнення акустичних хвиль плоским поршнем, що рухається, показано порушення принципу суперпозицiї при врахуваннi рухомостi меж навiть для лiнiйного хвильового рiвняння. Побудоване рiшення для руху поршня, представленого у виглядi накладання коливань малої амплiтуди на постiйну швидкiсть, описує вiдомий ефект Доплера. Всi результати отримано на основi методу нелiнiйного перетворення часу.

By giving an example of the analytical solution of the initial-boundary problem for the acoustic wave radiation by a moving plane piston the violation of the superposition principle taking into account the moving boundaries, even in the case of a linear wave equation, is shown. The solution, developed for the piston motion, represented as the superposition of the low-amplitude oscillations upon the constant velocity, describes the known Doppler effect. All the results are obtained on the base of the method of non-linear time conversion.

ВВЕДЕНИЕ

В линейных задачах акустики, в силу малости амплитуды перемещения возмущающих границ, граничные условия задаются на их фиксированном положении [1]. При решении линейных волновых задач эффективным является метод суперпозиции решений, неприемлемый для нелинейных задач [2]. Этот тезис не требует дополнительных пояснений для тех краевых задач, в которых учитываются как нелинейность среды, так и нелинейность граничных условий. Менее очевидным представляется факт нарушения суперпозиции в начально-краевых задачах с подвижными границами для линейного волнового уравнения, поскольку линейность последнего позволяет искать решение задачи в виде любой суммы волновых решений. Однако задание граничного условия на текущем положении движущейся границы делает задачу нелинейной.

Так, в работе [3] на основе известного решения Тейлора [4] задачи о расширении с постоянной скоростью сферы нулевого начального радиуса посредством прямого расчета показано нарушение принципа суперпозиции. Вместе с тем, в другой работе этого же автора [5] утверждается, что частота следования импульсов давления на движущейся с постоянной скоростью границе и частота следования импульсов в точке волновой зоны одинакова. По сути дела, тем самым принимается выполнение принципа суперпозиции. Вместе с тем, как известно из физики [6], в соответствии с законом Допплера, приближение источника периодических волн к неподвижному приемнику соответствует увеличению частоты сигнала.

В связи с вышесказанным, представляется необходимым более внимательно рассмотреть вопрос нарушения принципа суперпозиции в начально-краевой задаче с подвижной границей для линейного волнового уравнения.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим генерирование волны давления нестационарно движущимся в сжимаемой жидкости плоским поршнем. Полагая, что скорость движения поршня мала по отношению к скорости звука в жидкости, а перемещения достаточно велики, будем описывать движение среды линейным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

а кинематическое граничное условие задавать на текущем положении движущейся границы контакта:

$$\begin{aligned} x &= X(t), \\ \partial\Phi\partial x &= v_p(t). \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь Φ – потенциал скоростей волнового движения жидкости; C_0 – невозмущенная скорость звука; t – время; x – линейная координата, отсчет которой начинается от первоначального положения границы контакта.

Волновые поля скорости и давления связаны с потенциалом скоростей $\Phi(x,t)$ известными соотношениями

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ P(x,t) &= -\rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где ρ_0 – невозмущенная плотность среды. Для определенности начальные условия будем считать нулевыми:

$$\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \qquad (4)$$

Корректность постановки начально-краевой задачи с подвижной границей (1) – (4) была рассмотрена в работах [3 – 7].

2. ОБЩИЙ ВИД АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение поставленной задачи (1) – (4) будем искать методом нелинейного преобразования времени [8, 9], основы которого были заложены в работах [4, 10]. В соответствии с этим методом запишем решение волнового уравнения (1) в виде

$$\Phi(x,t) = F(t^0), \quad t^0 = t - x/C_0. \qquad (5)$$

Здесь t^0 – волновой аргумент; F – искомая функция волнового аргумента, определяемая из граничного условия (2).

Подставляя решение (5) в граничное условие (2), получаем соотношение вида

$$\frac{\partial\Phi(t - X(t)/C_0)}{\partial(t - X(t)/C_0)} = -C_0 v_p(t). \qquad (6)$$

Для решения уравнения (6) воспользуемся преобразованием времени

$$t - X(t)/C_0 = \tau, \qquad (7)$$

находя из которого t в явном виде, получаем

$$t = w(\tau), \qquad (8)$$

где w – некоторая функция одного аргумента. При условии, что функция $X(t)$ является непрерывной, и выполнении неравенства $\big(X(t)/(C_0 t)\big)^2 \ll 1$ можно утверждать, что решение (8) единственно.

С учетом соотношений (7) и (8) уравнение (6) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\tau} = -C_0 v_p(w(\tau)). \qquad (9)$$

Интегрируя соотношение (9) и переходя в полученном интеграле к волновому аргументу, из выражения (5) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= -C_0 \int\limits_0^{t^0} v_p\big(w(\tau)\big)\, d\tau, \\ v(x,t) &= v_p\big(w(t^0)\big), \\ P(x,t) &= \rho_0 C_0 v_p\big(w(t^0)\big). \end{aligned} \qquad (10)$$

Построенное решение задачи (10) удовлетворяет волновому уравнению (1) как функция волнового аргумента, и граничному условию (3), поскольку из него найдена функция $F(t^0)$.

Остановимся на решении вспомогательного уравнения (7), определяющимся соотношением (8). Для функции $X(t)$, представленной в некотором специальном виде, оно может быть непосредственно определено как решение алгебраического уравнения (7). Если функция $X(t)$ представлена в виде степенного ряда, то решение этого уравнения происходит в соответствии с формулами обращения степенных рядов [11]. Наконец, при выполнении условия $\big(X(t)/(C_0 t)\big)^2 \ll 1$ можно воспользоваться методом последовательных приближений [8]:

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= \tau, \\ w_1(\tau) &= \tau + X(\tau)/C_0, \\ w_2(\tau) &= \tau + \left[1 + \frac{1}{C_0}\frac{dX(\tau)}{d\tau}\right]\frac{X(\tau)}{C_0}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Тогда из (10) в первом приближении получаем следующее выражение для давления в волновой зоне:

$$P(x,t) = \rho_0 C_0 \left[v_p(t^0) + \frac{X(t^0)}{C_0}\frac{dv_p(t^0)}{dt^0} \right]. \qquad (12)$$

Заметим, что при задании граничного условия на фиксированном положении границы

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_p(t), \quad x = 0,$$

решение начально-краевой линейной задачи имеет вид

$$\Phi(x,t) = -C_0 \int\limits_0^{t^0} v_p(\tau) d\tau,$$
$$v(x,t) = v_p(t^0), \qquad (13)$$
$$P(x,t) = \rho_0 C_0 vp(t^0).$$

Из сравнения решений (10) и (13) видно, что при бесконечно малой амплитуде перемещения поршня нелинейное решение (10) переходит в линейное (13).

3. НАРУШЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Для наглядности нарушение принципа суперпозиции продемонстрируем на примере, допускающем построение точного решения. Примем следующий закон движения поршня:

$$X(t) = v_0 t + a_0 t^2/2,$$
$$v_p(t) = v_0 + a_0 t. \qquad (14)$$

В этом случае решение уравнения (7) имеет вид

$$w(t^0) = \frac{C_0}{a_0}(1-M_0)\times$$
$$\times\left\{1 - \left[1 - \frac{2a_0 t^0}{C_0(1-M_0)^2}\right]^{1/2}\right\}, \qquad (15)$$

где $M_0 = v_0/C_0$.

Подставляя выражение (15) в решение (10), получаем решение начально-краевой задачи с подвижной границей, движущейся по закону (14):

$$\bar{v}(x,t) = \bar{P}(x,t) =$$
$$= 1 - (1-M_0)\left[1 - \frac{2a_0 t^0}{C_0(1-M_0)^2}\right]^{1/2}, \qquad (16)$$

где $\bar{v} = v/C_0$; $\bar{P} = P/(\rho_0 C_0^2)$. Принимая в (16) последовательно $a_0 = 0$ и $v_0 = 0$, с учетом подвижности границ получаем следующие решения:

$$\bar{P}(x,t) = M_0 H(t^0) \quad \text{при} \quad a_0 = 0,$$
$$\bar{P}(x,t) = 1 - \left[1 - \frac{2a_0 t^0}{C_0}\right]^{1/2} \quad \text{при} \quad v_0 = 0. \qquad (17)$$

В первом соотношении (17) $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. В соответствии с принципом суперпозиции, решение при движении поршня по закону (14) получаем путем суммирования вида решений (17):

$$\bar{P}(x,t) = M_0 + 1 - \left[1 - \frac{2a_0 t^0}{C_0}\right]^{1/2}. \qquad (18)$$

Для малых значений времени решение (16) может быть представлено первыми членами ряда Тейлора:

$$\bar{P}(x,t) = M_0 + \frac{a_0 t^0}{(1-M_0)C_0}\times$$
$$\times\left[1 - \frac{2a_0 t^0}{2C_0(1-M_0)^2}\right]^{1/2}. \qquad (19)$$

Как видно из сравнения точного решения задачи (16), его приближения (19) и решения (18), полученного суперпозицией решений (18), они не совпадают. Следовательно, принцип суперпозиции не выполняется.

Для полноты изложения приведем решение полностью линейной задачи для закона движения поршня (14):

$$\bar{P}(x,t) = M_0 + a_0 t^0/C_0, \qquad (20)$$

которое может быть получено суперпозицией решений. Отметим, что решение (20) не совпадает с решением, полученным при учете подвижности границы, даже для малых значений времени (19).

4. НАЛОЖЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОСТОЯННУЮ СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ

Рассмотрим закон движения поршня

$$X(t) = v_0 t + X_1(t),$$
$$v_p(t) = v_0 + v_1(t),$$

где $v_1(t) = dX_1/dt$; $|X_1/(v_0 t)| \ll 1$. Тогда граничное условие на подвижной границе можно записать как

$$x = X(t) = v_0 t,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_p(t) = v_0 + v_1(t). \qquad (21)$$

В этом случае решение вспомогательного уравнения (7) имеет вид

$$w(t^0) = t^0/(1-M_0),$$

а решение начально-краевой задачи –

$$\bar{P}(x,t) = M_0 + \frac{a_0 t^0}{C_0(1-M_0)}. \qquad (22)$$

Заметим, что решение (22) отличается от решения линейной задачи (20), но, как и следовало ожидать, близко к решению (19).

Теперь рассмотрим закон движения поршня с постоянной скоростью при наложении гармонических колебаний малой амплитуды:

$$X(t) = v_0 t + X_1 \sin\omega_0 t \quad \text{при} \quad (X_1/X) \ll 1. \tag{23}$$

В этом случае граничное условие на подвижной границе можно записать в виде

$$\begin{gathered} x = X(t) = v_0 t, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = v_p(t) = v_0 + v_1 \cos\omega_0 t, \end{gathered} \tag{24}$$

где v_0 – скорость макроскопического перемещения поршня; ω_0 – круговая частота малых колебаний поверхности поршня; v_1 – колебательная скорость. В этом случае справедливо $w(t^0) = t^0/(1-M_0)$ и, в соответствии с формулой (10), решение задачи принимает вид

$$\bar{P}(x,t) = M_0 + M_1 \cos\omega_1 t^0, \tag{25}$$

где $\omega_1 = \omega_0/(1-M_0)$; $M_0 = v_0/C_0$; $M_1 = v_1/C_0$; $\bar{P} = P/(\rho_0 C_0^2)$.

Формула (25) описывает известный эффект Допплера. Заметим, что решение линейной задачи для закона движения поршня вида (23) имеет вид

$$\bar{P}(x,t) = M_0 + M_1 \cos\omega_0 t^0. \tag{26}$$

Из сравнения выражений (25) и (26) видно, что линейная задача не дает изменения частоты следования пульсаций давления в волновой зоне по сравнению с частотой на движущейся границе (именно на этом настаивает автор работы [5]).

Для цилиндрических волн эффект Допплера продемонстрирован в [12]. Аналогичные результаты нетрудно получить и для сферических волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко перечислим полученные результаты:

- методом нелинейного преобразования времени получено решение начально-краевой задачи с заданием на подвижной границе кинематического граничного условия для нестационарно движущегося по произвольному закону поршня;
- показано, что учет подвижности границы приводит к нарушению принципа суперпозиции решений задачи (даже при рассмотрении линейного волнового уравнения и в предположении, что на основной закон движения налагаются малые возмущения);
- решение, полученное при наложении на постоянную скорость движения поршня колебаний малой амплитуды, описывает эффект Допплера, что доказывает корректность математической постановки и метода решения волновой задачи с подвижной границей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность академику НАН Украины профессору В. Т. Гринченко и доктору физ.-мат. наук профессору И. Т. Селезову за постоянное внимание к этой работе и обсуждение результатов, позволившее глубже понять их физический смысл.

1. *Исакович М. А.* Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 584 с.
2. *Харкевич А. А.* Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы.– М.: Наука, 1973.– 400 с.
3. *Крутиков В. С.* О границах применимости решений волнового уравнения в областях с подвижными границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики // Акуст. ж.– 1996.– **42**, N4.– С. 534–540.
4. *Taylor Y.* The airwave surrounding and expanding sphere // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.– 1946.– **A186**.– P. 273–292.
5. *Крутиков В. С., Лопатнев В. Г.* Особенности гидродинамических характеристик импульсных процессов в сжимаемой среде при многократном (пульсирующем) законе ввода энергии // Письма в ЖТФ.– 1999.– **25**, вып. 14.– С. 34–41.
6. *Кухлинг Х.* Справочник по физике.– М.: Мир, 1982.– 520 с.
7. *Поздеев В. А.* Влияние подвижности возмущающей границы и нелинейности среды на волновое поле, вызванное нестационарным движением плоского поршня // Акуст. ж.– 1995.– **41**, N 1.– С. 164–165.
8. *Поздеев В. А.* Метод нелинейного преобразования времени в краевых задачах теории потенциала с подвижными границами для линейного волнового уравнения // ПММ.– 1991.– **55**, N 6.– С. 1055–1058.
9. *Поздеев В. А.* Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами.– К.: Наук. думка, 1992.– 244 с.
10. *Бескаравайный Н. М., Поздеев В. А.* Волновые задачи о расширении полости в жидкости с учетом конечности перемещения границ // Физико-технические процессы при высоковольтном разряде в жидкости.– К.: Наук. думка, 1980.– С. 88–97.
11. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций.– М.: Наука, 1968.– 648 с.
12. *Вовченко А. И., Ковалев В. Г., Поздеев В. А.* Особенности гидродинамических характеристик высоковольтного электрического разряда в жидкости при двухимпульсном законе ввода мощности // Письма в ХГФ.– 1997.– **23**, вып. 9.– С. 58–61.