

УДК 539.3:534.21

МОДЫ ЛЭМБОВСКОГО ТИПА В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ПОХГАММЕРА – КРИ

С. В. НОВОТНЫЙ

Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия

Получено 8.10.2000 ◊ Пересмотрено 2.03.2001

Рассмотрено решение задачи о распространении стационарных осесимметричных волн в бесконечном упругом изотропном круговом цилиндре. На боковой поверхности цилиндра предполагаются заданными специальные граничные условия инерционного типа, когда напряжения пропорциональны ускорениям. Исследованы дисперсионные соотношения для распространяющихся и неоднородных волн, соответствующих вещественным и чисто мнимым значениям волновых чисел. Особое внимание уделено определению тех частот, при которых фазовая скорость нормальных волн не зависит от числа Пуассона (моды Лэмба). Доказано существование ограниченного набора мод такого типа в случае подкрепленной границы по сравнению с классическим случаем свободной поверхности, когда имеется бесконечный счетный набор лэмбовских мод. Изучены особенности поведения решения граничной задачи в лэмбовских точках спектра при изменении значения коэффициента Пуассона.

Розглянуто задачу про розповсюдження гармонічних осесиметричних хвиль у нескінченному ізотропному пружному циліндрі. Вважається, що на бічній поверхні циліндра задано спеціальні граничні умови інерційного типу, коли механічні напруження пропорційні до прискорень. Досліджено дисперсійні співвідношення для хвиль, що розповсюджуються, та неоднорідних хвиль, яким відповідають дійсні та чисто уявні значення хвильових чисел. Особливу увагу приділено визначенню тих значень частоти, для яких фазова швидкість нормальних хвиль не залежить від числа Пуассона (моди Лемба). Доведено існування обмеженої кількості мод такого типу для випадку інерційно підкріпленої границі в порівнянні з класичним випадком вільної поверхні, коли існує нескінченна кількість лембівських хвиль. Вивчено особливості поведінки розв'язків граничної задачі у лембівських точках спектра при зміні значень коефіцієнта Пуассона.

Propagation of the garmonic axisymmetrical waves in an infinite elastic cylinder is considered. Properties of the waves are studied for a specific case of the inertial boundary conditions on the cylinder surface, when the mechanical stresses on the surface are proportional to the accelerations. The dispersion properties of the propagating and the evanescent waves, which correspond to real and pure imaginary roots of the dispersion equations, are studied. The special attention is given to determination of those frequencies, for which the phase velocity does not depend on the Poisson's number (the Lamb's modes). It is proved that there is only finite number of such modes for the case of inertially supported boundary, when comparing with the classical case of the free cylinder surface where the infinite number of the Lamb's modes exist. The behaviour of the boundary problem solutions at change of the Poisson's number is studied.

посвящается светлой памяти Виктора Степановича Ленского

ВВЕДЕНИЕ

Формальное решение граничной задачи, возникающей при описании распространения волн в бесконечном упругом круговом цилиндре, получено довольно давно в работах Похгаммера и Кри [1, 2]. В последующих многочисленных исследованиях [3–5] установлено, что распространение волн в упругих волноводах является довольно сложным физическим процессом. Нормальные волны в упругом волноводе обладают рядом специфических особенностей, которые принципиально отличают их от аналогичных волн в акустических и электромагнитных волноводах. Изучение этих особенностей для волноводов простейшей геометрии, плоского и цилиндрического имеет принципиальное значение для понимания закономерностей распространения волн в конечных упругих телах.

Изучение свойств нормальных волн в упругих волноводах стимулируется также многими при-

кладными проблемами. Понимание свойств этих волн важно при рассмотрении вопросов передачи волновой энергии по элементам конструкций. Измерение фазовых скоростей различных нормальных волн является наиболее общим методом получения информации об упругих постоянных, плотности и различных дефектах в элементах конструкций [6–8]. Информация о модовой структуре сигналов важна для расшифровки измерений в процессе неразрушающего контроля, при использовании как активных (ультразвуковых), так и пассивных (основанных на явлении акустической эмиссии) методов [9].

В практических приложениях часто возникает задача об оценке свойств нормальных волн в упругом волноводе при наличии взаимодействия с окружающей средой, которая может обладать самыми различными характеристиками (упругая среда или жидкость). В любом случае свойства нормальных волн в волноводе становятся более сложными. В частности, в системе может воз-

никать радиационное затухание даже при использовании моделей идеальных сред [10, 11]. При описании таких усложненных волноводных систем иногда удается воспользоваться упрощенными моделями, описывающими процесс взаимодействия волновода с окружающей средой. Одна из таких моделей рассматривается в данной работе. Здесь наличие внешней среды интерпретируется как некоторая массовая нагрузка на поверхности волновода. Это дает возможность упростить дисперсионные соотношения и получить достоверные в некотором диапазоне частот данные о свойствах нормальных волн в сложных волноводных системах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространении осесимметричных гармонических волн в бесконечном упругом цилиндре радиуса a . Свойства материала характеризуются плотностью ρ и упругими постоянными λ и μ . Кинематические и силовые характеристики волнового поля определяются в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Для волн, бегущих в положительном направлении оси z , вектор перемещений имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} u_r &= U(r)e^{i(\gamma z - \omega t)}, \\ u_\theta &\equiv 0, \\ u_z &= W(r)e^{i(\gamma z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega = p\gamma$ – круговая частота; γ – параметр распространения (волновое число); p – фазовая скорость волны.

Амплитудные функции радиуса $U(r)$ и $W(r)$ в выражениях для перемещений нетрудно получить из решения волнового уравнения Ламе в терминах скалярного ϕ и векторного ψ потенциалов с использованием метода разделения переменных. Такие выкладки многократно проделывались многими исследователями [3, 4, 12, 13]. В безразмерной форме (на это указывает черта сверху над соответствующими величинами) амплитудные функции смещений представляются как

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{r}) &= -\alpha A J_1(\alpha \bar{r}) - \beta B J_1(\beta \bar{r}) - \\ &\quad - \alpha G Y_1(\alpha \bar{r}) - \beta H Y_1(\beta \bar{r}), \\ \bar{W}(\bar{r}) &= i \left[\bar{\gamma} A J_0(\alpha \bar{r}) - \frac{\beta^2}{\bar{\gamma}} B J_0(\beta \bar{r}) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\gamma} G Y_0(\alpha \bar{r}) - \frac{\beta^2}{\bar{\gamma}} H Y_0(\beta \bar{r}) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\Omega^2}{l^2} - \bar{\gamma}^2; & \beta^2 &= \Omega^2 - \bar{\gamma}^2; \\ \Omega &= \frac{\omega a}{c_2}; & l^2 &= \frac{c_1^2}{c_2^2} = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}; \\ c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; & c_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \\ \bar{\gamma} &= \gamma a; & \bar{r} &= \frac{r}{a}; & \bar{u} &= \frac{u}{a}. \end{aligned}$$

Через J_j и Y_j ($j=0, 1$) обозначены функции Бесселя первого и второго рода. В общем случае представленные выражения для радиальных функций содержат четыре произвольные постоянные величины A, B, G и H . При описании волновых движений в сплошном цилиндре составляющие, содержащие функции Бесселя второго рода, должны быть опущены.

В отличие от большинства публикаций, в которых рассматриваются классические предельные случаи свободной и жестко заземленной границы, в данной работе рассматриваются специальные импедансные условия. На границе $r=a$ предполагается наличие инерционного подкрепления в виде равномерно распределенной по площади поверхности цилиндра массы с поверхностной плотностью m . В этом случае граничные условия в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= -\bar{m} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} = \bar{m} \Omega^2 \bar{u}_r \equiv -\bar{R} \bar{u}_r, \\ \bar{\sigma}_{rz} &= -\bar{m} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial t^2} = \bar{m} \Omega^2 \bar{u}_z \equiv -\bar{Z} \bar{u}_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\bar{m} = m/\rho a$, а входящие в уравнения (2) компоненты тензора напряжений определяются соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{\mu} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \bar{\sigma}_{rz} &= \frac{\sigma_{rz}}{\mu} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned}$$

Граничные условия (2) совместно с требованием регулярности решения на оси цилиндра $r=0$ после подстановки в них выражений для напряжений приводят к однородной линейной системе уравнений относительно неизвестных постоянных A и B . Условие существования нетривиального решения этой системы определяется дисперсионным соотношением, связывающим допустимые значения $\bar{\gamma}$

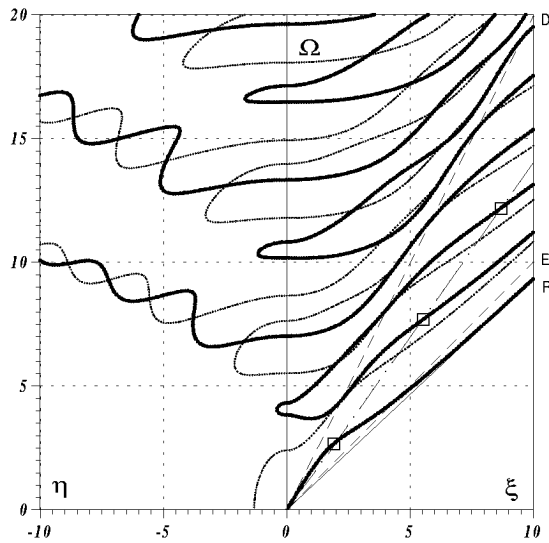


Рис. 1. Дисперсионные зависимости для нормальных волн в цилиндрическом волноводе ($\nu=0.3317$):
 сплошная - свободная граница,
 штриховая - закрепленная граница,
 штрих-пунктирная - $\Omega = \sqrt{2}\gamma$,
 □ - моды Лэмба

и Ω в волновых решениях типа (1):

$$\begin{aligned}
 & [(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)^2 - \bar{Z}(\bar{R} - 2)\bar{\gamma}^2] J_0(\alpha) J_1(\beta) + \\
 & + [4\alpha\beta\bar{\gamma}^2 - \alpha\beta\bar{Z}(\bar{R} - 2)] J_1(\alpha) J_0(\beta) + \\
 & \alpha\Omega^2(\bar{R} - 2) J_1(\alpha) J_1(\beta) - \bar{Z}\beta\Omega^2 J_0(\alpha) J_0(\beta) = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Как и в классическом случае свободной границы, уравнение частот

$$F(\bar{\gamma}, \Omega) = 0$$

оказывается инвариантным по отношению к различному выбору ветвей однозначности многозначных функций

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \pm\sqrt{\frac{\Omega^2}{\bar{\gamma}^2} - \bar{\gamma}^2}, \\
 \beta &= \pm\sqrt{\Omega^2 - \bar{\gamma}^2}.
 \end{aligned}$$

Это нетрудно установить непосредственной проверкой дисперсионного уравнения, учитывая свойства бесселевых функций первого рода от мнимого аргумента $J_n(\pm ix) = (\pm i)^n I_n(x)$ ($I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя). В значительной степени этот факт является следствием очевидного физического свойства системы, в которой волны, бегущие в противоположных направлениях, не отличаются по дисперсионным свойствам.

Что касается сформулированной граничной задачи, то постановка различных импедансных условий на внешней поверхности цилиндра имеет целью построение некоторых упрощенных моделей для описания влияния окружающей цилиндра среды на свойства нормальных волн. При этом следует иметь в виду, что важный физический эффект радиационного демпфирования волновых движений в цилиндре не может быть описан через импедансные условия типа сосредоточенных массы или упругости.

2. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Дисперсионное уравнение (3) обычно рассматривается в предположении, что частота гармонической волны – вещественная величина. Так же как и в случае идеальных граничных условий, это уравнение имеет вещественные ($\bar{\gamma} = \xi$), чисто мнимые ($\bar{\gamma} = i\eta$) и комплексные ($\bar{\gamma} = \xi + i\eta$) корни. Зависимости между волновыми числами и частотой наиболее наглядно представляются в виде некоторых спектральных кривых в трехмерном пространстве. Свойства этой геометрически достаточно сложной картины обсуждались в ряде публикаций [3, 5, 14].

В данной работе анализ частотного спектра проведен только для действительных и, в меньшей степени, для мнимых корней. В этом случае, учитывая отмеченные выше свойства инвариантности дисперсионного уравнения, кривые Ω как функции $\bar{\gamma}$ можно представить на одной плоскости. Примером такого построения может служить рис. 1, на котором дано изображение вещественных и чисто мнимых ветвей дисперсионных кривых для двух классических случаев граничных условий. Область действительных $\bar{\gamma} = \xi$ соответствует области распространяющихся мод $\bar{u}_i = f_i(\bar{r}) e^{i(\xi\bar{z} - \Omega\bar{t})}$. Здесь $\xi = 2\pi/L$ является величиной, обратно пропорциональной длине волны L . Мнимым корням $\bar{\gamma} = i\eta$ соответствуют неоднородные волны, амплитуда которых возрастает или убывает по экспоненциальному закону относительно осевой координаты. Таким образом, каждой точке спектральной ветви ставится в соответствие волновая мода, определяемая своей частотой и формой колебаний. В случае распространяющихся мод тангенс угла наклона секущей, проведенной в данную точку на дисперсионной кривой из начала координат, будет определять фазовую скорость p соответствующей нормальной волны, а наклон касательной к кривой в этой точке определяет ее групповую скорость c_g .

Такая геометрическая интерпретация определенных групповой и фазовой скорости позволяет легко проиллюстрировать важные дисперсионные свойства нормальных волн в цилиндре. Первый квадрант плоскости $(\bar{\gamma}, \Omega)$ на рис. 1 естественно разбить прямыми $\Omega = l\xi$ и $\Omega = \xi$ на три сектора. Прямая OD на рис. 1 ($\Omega = l\xi$) соответствует значению $\alpha = 0$ или $p = c_1$. Прямая OE соответствует значению $\beta = 0$ или $p = c_2$. Такое определение прямых линий позволяет указать физический смысл выделенных секторов. В первом секторе, примыкающем к оси частот, каждой точке дисперсионных кривых соответствует нормальная волна, фазовая скорость которой превосходит скорость продольных волн в материале цилиндра. В секторе, образованном прямыми OE и OD , фазовая скорость нормальных волн превосходит скорость сдвиговых волн в материале цилиндра, но меньше скорости продольных волн. Для нормальных волн в секторе правее прямой OE фазовая скорость меньше скорости волн сдвига. В случае свободной границы волновода в этот сектор попадает только одна волна, фазовая скорость которой стремится к скорости волны Рэлея (прямая OR).

3. АНАЛИЗ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Конкретные значения корней дисперсионного уравнения (3) могут быть получены лишь численно. Выполнение соответствующих расчетов может быть существенно упрощено путем качественного анализа этого уравнения. В рамках такого анализа будет рассмотрено коротковолновое и длинноволновое приближение для изучения структуры решения дисперсионного уравнения.

3.1. Определение критических частот

Точки пересечения дисперсионных кривых с осью ординат определяют такие важные характеристики дисперсионных свойств волновода как частоты запираания или критические частоты. В таких точках фазовая скорость волны стремится к бесконечности и движения определенного вида совершаются синфазно. Оставляя в стороне важный вопрос о том, насколько эффективно могут возбуждаться такие типы движения, остановимся на рассмотрении влияния массовой нагрузки на поверхности на величины критических частот.

Как и в случае волновода со свободной границей, при определении критических частот для нагруженного волновода выделяются два их семейства. Это непосредственно следует из выражения

для частотного уравнения (3), преобразованного для случая $\bar{\gamma} = 0$:

$$(\Omega J_1(\Omega) - \bar{Z} J_0(\Omega)) \times \left[\Omega J_0\left(\frac{\Omega}{l}\right) - \frac{2 - \bar{R}}{l} J_1\left(\frac{\Omega}{l}\right) \right] = 0. \quad (4)$$

Уравнение для первого семейства критических частот определяется приравнованием к нулю первого множителя в уравнении (4):

$$\Omega J_1(\Omega) - \bar{Z} J_0(\Omega) = 0. \quad (5)$$

Определяемые им значения критических частот не зависят от числа Пуассона и зависят лишь от осевой составляющей \bar{Z} массовой нагрузки на поверхности цилиндра. Ясно, что имеется бесконечный набор решений $\Omega = \Omega_n^{*(1)}$ ($n = 1, 2, \dots$) уравнения (4). При этом движение точек цилиндра описывается следующими выражениями для смещений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r &= 0, \\ \bar{u}_z &= \tilde{A} J_0(\Omega_n^{*(1)} \bar{r}). \end{aligned} \quad (6)$$

Это движение – чисто осевое. Поскольку единственной отличной от нуля компонентой тензора деформации является сдвиговая компонента ϵ_{rz} , такая волна называется продольно-сдвиговой.

Для исследования влияния массовой нагрузки на значения критических частот первого семейства представим уравнение (5) в виде

$$\frac{J_1(\Omega)}{J_0(\Omega)} = -\bar{m}\Omega.$$

Оно качественно аналогично известному простейшему уравнению типа $\operatorname{tg} x = x$. В связи с этим легко установить, что критические частоты первого семейства всегда находятся в интервале, определяемом значениями критических частот соответствующего номера для свободного и жестко заземленного цилиндра. При увеличении частоты значения критических частот стремятся к частотам для жестко заземленного цилиндра. Однако наличие массовой нагрузки не приводит к возникновению конечного интервала частот, для которых волновод заперт, поскольку значение $\Omega = 0$ является корнем уравнения (5).

Частоты запираания второго семейства определяются следующим уравнением:

$$\Omega J_0\left(\frac{\Omega}{l}\right) - \frac{2 - \bar{R}}{l} J_1\left(\frac{\Omega}{l}\right) = 0. \quad (7)$$

Критические частоты второго семейства зависят от радиальной составляющей массовой нагрузки

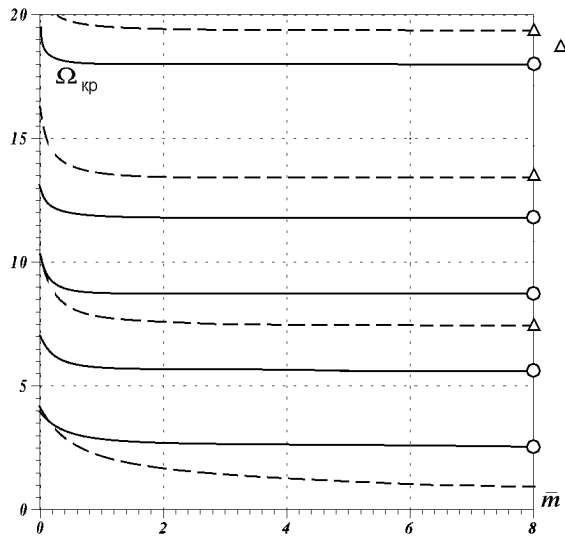


Рис. 2. Изменение значений критических частот нормальных волн в зависимости от величины массовой нагрузки ($\nu = 0.31$)

и от числа Пуассона материала. Качественно это уравнение подобно уравнению (5) и также имеет бесконечный набор корней $\Omega = \Omega_m^{*(2)}$ ($m = 1, 2, \dots$). В движениях, соответствующих этим частотам, от нуля отличны только радиальные смещения

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= \tilde{A} J_1(\Omega_m^{*(2)}/l\bar{r}), \\ \tilde{u}_z &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из компонентов тензора деформаций отличными от нуля являются лишь два компонента ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$, что указывает на чисто радиальное движение точек цилиндра.

Соответствующие второму уравнению значения критических частот также находятся в промежутках, определяемых критическими частотами для свободного и заземленного цилиндров. В общем случае соответствующие первому и второму семейству значения критических частот не перекрываются. Для указанных предельных случаев известны значения [3] коэффициента Пуассона, при которых возможно совпадение значений критических частот различных семейств. При таких значениях частот формируются специальные типы волновых движений, характеризующихся отличными от нуля значениями групповой скорости. В рассматриваемом случае дополнительным параметром, влияющим на изменение значения критической частоты является величина радиальной составляющей массовой нагрузки. В связи с этим в такой волноводной системе указанные особые ти-

пы волновых движений могут возникать для различных значений коэффициента Пуассона.

Зависимость критических частот от величины инерционной нагрузки \bar{m} показана на рис. 2 для коэффициента Пуассона $\nu = 0.31$. Здесь сплошные линии соответствуют частотам первого семейства, а штриховые – второго. На этом рисунке кружочками и треугольниками на вертикальной оси отмечены критические частоты соответственно первого и второго семейств для предельного случая жестко заземленной границы. На фоне монотонного стремления значений критических частот к предельному случаю можно отметить довольно резкое изменение кривых в области высоких частот. Даже при незначительном уровне инерционного нагружения условия на границе в этой области становятся эквивалентными условиям жесткого заземления. Точкой *A* на этом рисунке отмечена ситуация, когда при $\bar{m} = 0.09$ критические частоты двух семейств совпадают. Интересной особенностью этих данных является стремление к нулю критической частоты второй моды с ростом инерционной нагрузки.

3.2. Асимптотический анализ поведения спектральных кривых

При рассмотрении свойств нормальных волн в волноводе определенным интерес представляют оценки их свойств как в низкочастотном, так и в высокочастотном пределах. Так, наклон первой спектральной кривой в окрестности начала координат на плоскости (Ω, ξ) определяет скорость распространения продольных волн, описываемых простейшей стержневой моделью. Для получения требуемой оценки перейдем к пределу в уравнении (3) при α, β стремящихся к нулю. В результате, оставляя главные члены, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Omega^2 - 2(1 + \nu)\bar{\gamma}^2 - (1 - 2\nu)\bar{Z}(\bar{R} - 2) - \\ - 4(1 - \nu)\bar{Z} + (1 - \nu)\alpha^2\bar{R} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При классических граничных условиях свободной границы ($\bar{R} = 0, \bar{Z} = 0$) [3, 15, 16] из этого уравнения получаем фазовую скорость для стержневой моды $p = \sqrt{E/\rho}$. В случае инерционного нагружения дисперсионное уравнение становится биквадратным:

$$\begin{aligned} [(1 - 2\nu)\bar{m}(1 + 2\bar{m})]\Omega^4 - \\ - 2[1 + 2\bar{m} - (1 - \nu)\bar{m}\xi^2]\Omega^2 + \\ + 4(1 + \nu)\xi^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Это уравнение имеет два положительных корня, стремящихся к нулю с ростом параметра \bar{m} . Один из них связан с отмеченным выше при анализе данных рис. 2 поведением частоты запираия для второй моды. Второй корень соответствует низшей распространяющейся моде. Пренебрегая в уравнение (10) членами четвертого порядка малости, для этого корня получаем оценку

$$\Omega^2 = \frac{2(1+\nu)}{1+2\bar{m}} \xi^2.$$

Видно, что наклон первой спектральной кривой в начале координат уменьшается с ростом \bar{m} . Начиная со значений этого параметра $\bar{m}=1/2+\nu$, первая ветвь оказывается полностью в области дозвуковых фазовых скоростей $\Omega < \xi$ ($p < c_2$). Этот факт указывает на принципиальное изменение в свойствах низшей нормальной волны в низкочастотной области. Инерционная нагрузка не может привести к запираию волновода, однако фазовая скорость волны может быть сделана сколь угодно малой.

Для дальнейшего изучения свойств нормальных волн в инерционно нагруженном волноводе следует рассмотреть их свойства в области высоких частот и коротких длин волн. Поведение дисперсионных кривых с высокими номерами, как это видно из рис. 1, аналогично их поведению для случаев классических граничных условий. Это позволяет использовать ту же технику асимптотического анализа частотной зависимости фазовых скоростей, что и в классических случаях [3, 14]. Что касается двух волн низших порядков, их поведение существенно изменяется при наличии инерционного нагружения.

Данные расчетов при наличии инерционного нагружения показывают (рис. 3), что ветви всех дисперсионных кривых с ростом частоты попадают в сектор, образованный прямыми OD и OE . В нем можно получить асимптотическую зависимость между частотой и постоянной распространения вида $\Omega = s\tilde{\gamma}$ для всех нормальных волн. Поскольку здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= i\alpha_1 = i\tilde{\gamma}\sqrt{1-s^2/l^2}, \\ \beta &= \tilde{\gamma}\sqrt{s^2-1}, \\ 1 &\leq s \leq l, \end{aligned}$$

дисперсионное уравнение (3) при $\tilde{\gamma} \rightarrow \infty$ преобразуется к виду

$$(s^2-2)^2 \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)} - 4\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\sqrt{s^2-1} \frac{I_1(\alpha_1)}{I_0(\alpha_1)} = 0. \quad (11)$$

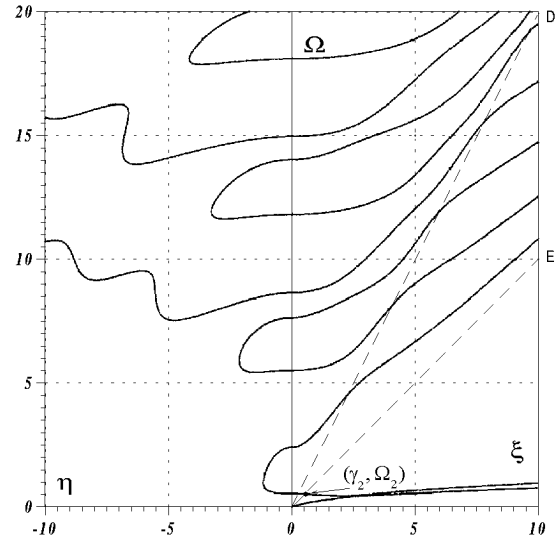


Рис. 3. Дисперсионные зависимости для нормальных волн в цилиндрическом волноводе при наличии массовой нагрузки на поверхности ($\nu=0.3317$)

Отсюда следует определить величину s . Поскольку первое слагаемое в этом уравнении есть знакопеременная величина, а второе – монотонная, то равенство нулю для всех $\tilde{\gamma}$ возможно лишь при одновременном обращении обоих слагаемых в нуль, т. е. при $s=1$. Отсюда вытекает асимптотическое равенство $\Omega = \tilde{\gamma}$ и вывод о том, что предельным значением фазовых скоростей для всех мод высокого порядка является скорость сдвиговых волн в материале цилиндра.

Как показывают данные рис. 3, в случае инерционного нагружения цилиндра две нижние ветви попадают в сектор дозвуковых скоростей. Здесь обе величины α и β являются чисто мнимыми, а из дисперсионного уравнения (3) вытекает следующее равенство:

$$1 - \sqrt{1-s^2/l^2} \sqrt{1-s^2} = 0. \quad (12)$$

Это уравнение не имеет вещественных корней $0 < s < 1$. Таким образом видно, что в случае инерционного нагружения не существует нормальной волны с предельным значением фазовой скорости, равным скорости волн Рэлея. На это было обращено внимание в работе [17], в которой наличие шероховатости поверхности моделировалось наличием некоторой инерционной нагрузки на поверхности цилиндра.

Следует обратить внимание на то, что данные рис. 3 относятся к случаю довольно большой относительной величины инерционной нагрузки

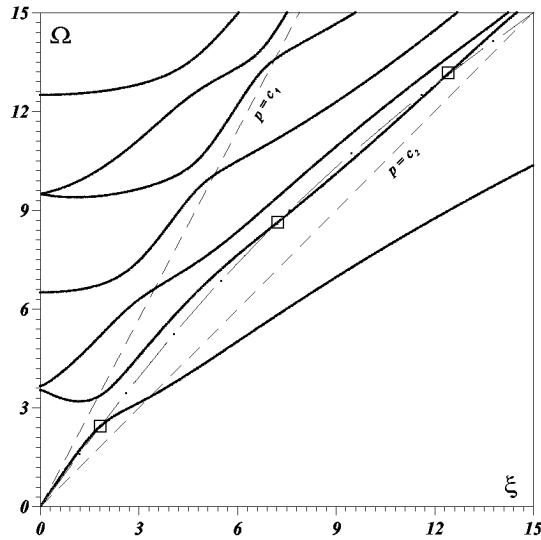


Рис. 4. Определение мод лэмбовского типа в упругом цилиндре при наличии массовой нагрузки на его поверхности ($\nu = 0.31$):
 сплошная – $\bar{m} = 0.09$,
 штрих-пунктирная – зависимость (5),
 □ – моды Лэмба

$\bar{m} = 20$. При уменьшении нагрузки вторая ветвь может попасть во второй сектор, и предельным значением фазовой скорости для соответствующей волны станет скорость сдвиговых волн. Две близкие кривые на рис. 3 при указанных значениях параметров не пересекаются. При анализе численных данных здесь наблюдается типичная картина “расталкивания” спектральных кривых [3].

4. НАБОР ЧАСТОТ ДЛЯ ВОЛН ЛЭМБОВСКОГО ТИПА

Одной из характерных особенностей инерционного нагружения границы является существенное влияние инерционной массы на семейство мод лэмбовского типа (семейство точек на спектральных кривых, инвариантных по отношению к изменению коэффициента Пуассона). В этом случае набор таких точек вообще оказывается ограниченным, в отличие от бесконечного счетного множества в классическом случае свободной границы [2, 15].

Поскольку параметр α содержит коэффициент Пуассона, то для получения значений частоты и постоянной распространения для волн лэмбовского типа необходимо, чтобы в нуль одновременно обращались коэффициенты, стоящие в частотном

уравнении (3) при членах $J_0(\alpha)$ и $\alpha J_1(\alpha)$:

$$\begin{aligned} & [(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)^2 - \bar{\gamma}^2 \bar{Z}(\bar{R} - 2)] J_1(\beta) - \\ & - \beta \bar{Z} \Omega^2 J_0(\beta) = 0, \\ & [4\beta \bar{\gamma}^2 - \beta \bar{Z}(\bar{R} - 2)] J_0(\beta) + \\ & + \Omega^2 (\bar{R} - 2) J_1(\beta) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Исключая из этих однородных соотношений трансцендентные функции Бесселя, получаем равенство

$$\bar{Z}(\bar{R} - 2) = -2(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2),$$

допускающее единственную возможную зависимость между частотой и постоянной распространения:

$$\Omega = \frac{1}{\bar{m}} \sqrt{-(1 + \bar{m}) + \sqrt{(1 + \bar{m})^2 + 4\bar{m}^2 \bar{\gamma}^2}}, \tag{14}$$

которая совместно с одним из уравнений (13) определяет искомый набор решений.

Зависимость (14) в плоскости переменных $(\bar{\gamma}, \Omega)$ представляет собой кривую, подобную дробно-степенной функции. Её наклон в начале координат равен $\sqrt{2/(1 + \bar{m})}$, что больше наклона первой спектральной ветви $\sqrt{2(1 + \nu)/(1 + 2\bar{m})}$ при $\bar{m} > \nu/(1 - \nu)$. На бесконечности наклон кривой стремится к нулю как $1/\sqrt{2\bar{m}\bar{\gamma}}$.

При $\bar{m} > 1$ наклон в нулевой точке меньше единицы и кривая целиком расположена в области дозвуковых движений $p < c_2$, где она имеет возможность пересекаться только с двумя дисперсионными частотными ветвями, находящимися в этой области. Отметим, что в точках лэмбовского типа кривая (14) должна пересекать ветви частотного спектра (это – необходимое условие). Достаточным же условием является выполнение при этом одного из равенств (13). Таким образом, точек пересечения кривой (14) с ветвями спектра может быть больше, чем число лэмбовских мод, однако не может быть меньше этого числа. С ростом величины \bar{m} в предельном случае точки пересечения вообще отсутствуют, что полностью согласуется с фактом отсутствия лэмбовских волн в цилиндре с заземленной поверхностью.

Для значений $\bar{m} < 1$ наклон кривой (14) становится больше единицы и ее часть попадает в промежуточный сектор на плоскости (Ω, ξ) . На рис. 4 показано взаимное расположение спектральных кривых и кривой (14) для случая $\bar{m} = 0.09$ (последняя изображена здесь штрих-пунктирной линией). С ростом частоты эта кривая должна выйти в дозвуковую область $p < c_2$. Следовательно,

при любой инерционной нагрузке на боковой поверхности существует лишь конечное число волн лэмбовского типа. Это заключение легко объяснимо физически, если учесть свойства импеданса массового типа. Его величина пропорциональна квадрату частоты и, следовательно, при сколь угодно малой массовой нагрузке с ростом частоты на поверхности цилиндра будут реализовываться условия, близкие к жесткому закреплению. В случае $\bar{m}=0$ (свободная граница) кривая (14) вырождается в прямую $\Omega=\sqrt{2}\bar{\gamma}$, а в цилиндре существует бесконечное число волн лэмбовского типа. Несколько первых мод этого типа отмечены на рис. 1 маркерами.

Исходя из общего для волн лэмбовского типа свойства независимости значений координат точки (Ω_l, ξ_l) от числа Пуассона, можно сделать важный качественный вывод о дисперсионных свойствах нормальных волн в цилиндре с массовой нагрузкой на боковой поверхности. Вычисления показывают, что при изменении коэффициента Пуассона через лэмбовскую точку могут проходить различные спектральные кривые. Это значит, что можно найти такие критические значения ν^* , при которых спектральные кривые соприкасаются. Для двух значений величины массовой нагрузки $\bar{m}=5$ и $\bar{m}=1.2111$ критические значения коэффициентов Пуассона близки к $\nu^*=0.43$ и $\nu^*=0.32$ соответственно. Эти критические значения коэффициента Пуассона определяются как корни уравнений, вытекающих из предположения о соприкосновении дисперсионных кривых:

$$\frac{d}{d\gamma}F(\bar{\gamma}_l, \Omega_l, \nu) = 0,$$

$$\frac{d}{d\Omega}F(\bar{\gamma}_l, \Omega_l, \nu) = 0.$$

При численном решении этих уравнений удалось добиться совпадения значений коэффициентов ν^* для лэмбовских значений частоты и постоянной распространения с точностью до двенадцати значащих цифр.

Совпадение фазовых скоростей мод различных порядков с одной и той же длиной волны важно для возникновения явления селективного затухания [4]. С уменьшением параметра \bar{m} значение критического коэффициента Пуассона стремится к нулю. В предельном случае свободного цилиндра $\bar{m}=0$ при $\nu=0$ существует бездисперсионная волна, распространяющаяся со скоростью $p=c_1$. Соответствующая ей дисперсионная прямая OD пересекает дисперсионные ветви для других волн в бесконечном числе точек.

5. КИНЕМАТИКА РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ МОД

Используя первое или второе из граничных условий (2), характеризующих подкрепление границы в радиальном или осевом направлении, получим общие кинематические формулы для компонент вектора смещений \bar{u}_r и \bar{u}_z в регулярном случае:

$$\bar{u}_r = \tilde{A} (\mathcal{R}^\alpha J_1(\alpha\bar{r}) + \mathcal{R}^\beta J_1(\beta\bar{r})) e^{i(\bar{\gamma}z - \Omega\bar{t})},$$

$$\bar{u}_z = i\tilde{A} (\mathcal{J}^\alpha J_0(\alpha\bar{r}) + \mathcal{J}^\beta J_0(\beta\bar{r})) e^{i(\bar{\gamma}z - \Omega\bar{t})},$$

где

$$\mathcal{R}^\alpha = -\alpha, \quad \mathcal{I}^\alpha = \bar{\gamma},$$

$$\mathcal{R}^\beta = -\frac{(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)J_0(\alpha) - (2 - \bar{R})\alpha J_1(\alpha)}{-2\beta J_0(\beta) + (2 - \bar{R})J_1(\beta)},$$

$$\mathcal{I}^\beta = -\frac{\beta(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)J_0(\alpha) - (2 - \bar{R})\alpha J_1(\alpha)}{\bar{\gamma}(-2\beta J_0(\beta) + (2 - \bar{R})J_1(\beta))}$$

или

$$\mathcal{R}^\alpha = \frac{\alpha(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)J_1(\beta) - \beta\bar{Z}J_0(\beta)}{\bar{\gamma}(\bar{Z}J_0(\alpha) - 2\alpha J_1(\alpha))},$$

$$\mathcal{I}^\alpha = \frac{(\Omega^2 - 2\bar{\gamma}^2)J_1(\beta) - \beta\bar{Z}J_0(\beta)}{2\alpha J_1(\alpha) - \bar{Z}J_0(\alpha)},$$

$$\mathcal{R}^\beta = -\bar{\gamma}, \quad \mathcal{I}^\beta = -\beta.$$

Поскольку значения Ω и $\bar{\gamma}$, входящие в соотношения (16) и (17), связаны дисперсионным соотношением (3), эти выражения эквивалентны с точностью до некоторой постоянной \tilde{A} . Кинематические соотношения показывают, что, независимо от того свободна или подкреплена граница, амплитудные функции радиуса в компонентах вектора смещений \bar{u}_r и \bar{u}_z являются функциями частоты Ω . Поэтому характер движения в нормальной волне изменяется при движении по дисперсионной кривой. Это свойство определяет важную особенность нормальных волн в упругих волноводах [18].

В целом можно предположить, что изменение кинематических свойств нормальных волн при движении по спектральной кривой качественно будет подобно движению, наблюдающемуся в случае свободных границ. При этом возможно постепенное изменение характера волны от преимущественно продольного к преимущественно сдвиговому. В рассматриваемом случае инерционного нагружения границы определенным интерес представляет та область частот и волновых чисел, где в окрестности лэмбовских точек наблюдается

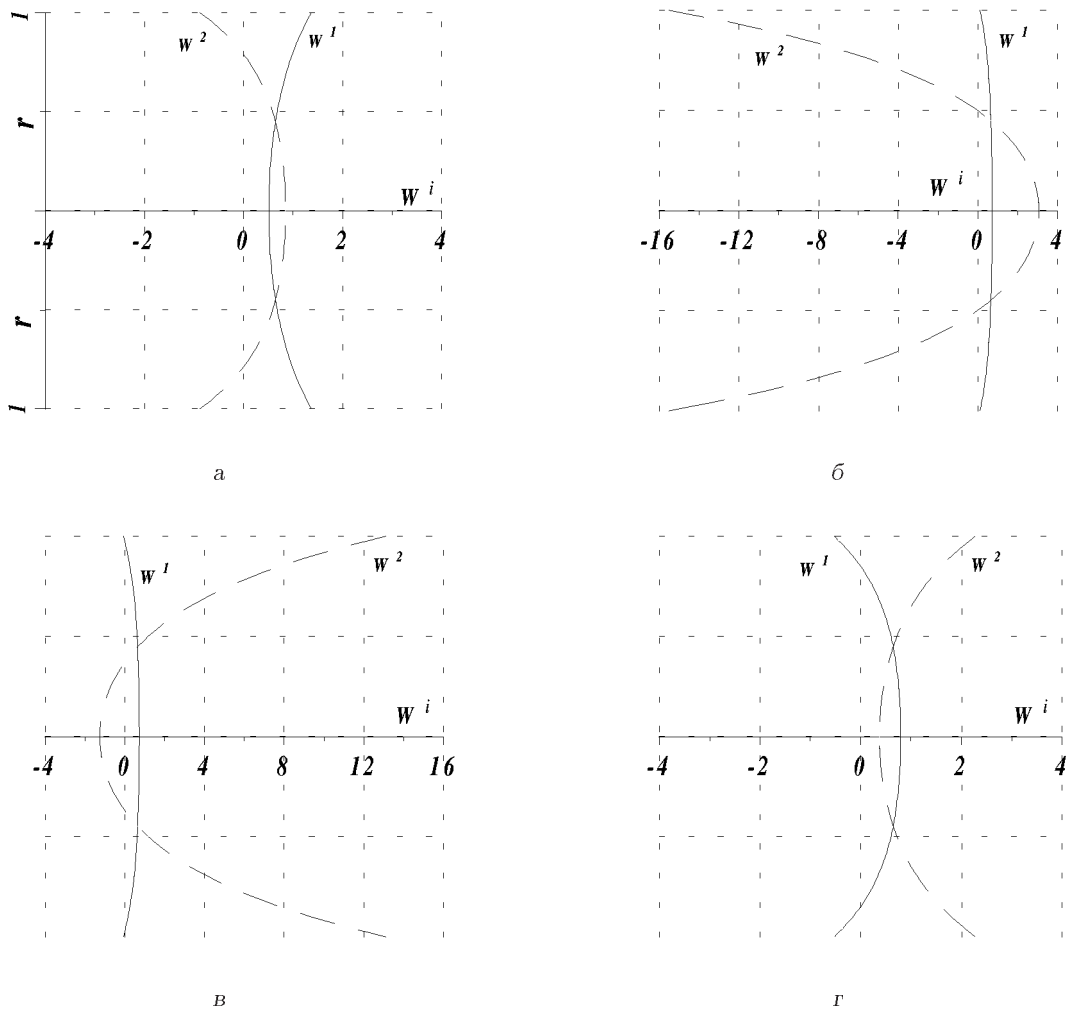


Рис. 5. Радиальные зависимости осевых смещений в инерционно нагруженном цилиндре для двух нижних нормальных волн:
 а - $\xi = 2.478870$, б - $\xi = 2.478892$, в - $\xi = 2.478894$, г - $\xi = 2.478914$

сближение (и, в некоторых случаях, касание) спектральных кривых. Интерес к этой области спектра стимулируется также тем обстоятельством, что она близка к области существования, так называемой, обратной волны [3]. Как видно из рис. 3, точка касания дисперсионных кривых практически совпадает с точкой смены знака групповой скорости для волн, соответствующих второй ветви.

По-видимому, отмеченным обстоятельством объясняется резкая смена фазы в кинематических и силовых характеристиках нормальной волны при прохождении через указанную точку. На рис. 5 представлены данные об изменении распределения по радиусу цилиндра осевых смещений в

двух нижних модах при изменении волнового числа. Эти данные соответствуют значению коэффициента Пуассона $\nu = 0.322$.

Из сравнения кривых на рис. 5, а и г видно, что после прохождения точки максимального сближения происходит обмен типами движения между модами различных порядков. Следует также отметить, что в этой области характер движений в моде демонстрирует очень высокую чувствительность к изменению коэффициента Пуассона. Так, даже при незначительном изменении ν (в третьем знаке) наблюдается существенное, по сравнению с данными на рис. 5, б и в, уменьшение неравномерности в распределении смещений по радиусу цилиндра.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренное изменение в типах граничных условий на поверхности упругого цилиндра позволило выявить интересные изменения в характере дисперсионных зависимостей для нормальных волн. Установлено качественное отличие свойств нормальных волн в случае инерционного нагружения границы по сравнению с классическими случаями свободной и защемленной границы. Существенным является также изменение в свойствах мод лэмбовского типа. По сравнению с классическими случаями не только меняется их количество, но и могут наблюдаться новые эффекты взаимодействия волновых движений в упругом волноводе вблизи соответствующих характерных точек спектра. Показано, что, прилагая на поверхности цилиндра даже относительно малую массовую нагрузку, можно существенно изменять свойства некоторых нормальных волн, в частности, обратной волны. В рассмотренном примере предполагалось, что массовая нагрузка на поверхности цилиндра обладает как нормальной, так и касательной составляющей. При моделировании взаимодействия цилиндра с идеальной жидкостью касательная составляющая будет отсутствовать, однако предложенная аналитическая методика в полной мере может быть использована и в этом частном случае.

1. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *Zeitschrift für Mathematik.*– 1876.– **81.**– S. 324–336.
2. *Chree C.* The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates. Their solution and applications // *Trans. Cambridge Phil. Soc.*– 1889.– **14.**– P. 250–369.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– Киев: Наук. думка, 1981.– 283 с.
4. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинах // *Физическая акустика: том. 1, часть А.*– М.: Мир, 1966.– С. 140–203.
5. *Bancroft D.* The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // *Phys. Rev.*– 1941.– **59.**– P. 588–593.
6. *Nayfeh A. H., Nagy P. B.* Axisymmetric waves in layered anisotropic fibers and their composites // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **99,** N 2.– P. 931–941.
7. *Nagy P. B., Kent R. M.* Ultrasonic assessment of Poisson's ratio in thin rods // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1995.– **98,** N 5.– P. 2694–2701.
8. *Mason T. A.* Variation in the dispersion of axisymmetric waves in infinite circular rods with crystallographic wire texture // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1999.– **106,** N 3.– P. 1262–1270.
9. *Degertekin F. L., Khuri-Yakub B. T.* Hertzian contact transducers for nondestructive evaluation // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **99,** N 1.– P. 299–308.
10. *Freedman A.* Effects of fluid-loading on Lamb mode spectra // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **99,** N 6.– P. 3488–3496.
11. *Nagy P. B.* Leaky guided wave propagation along imperfectly bounded fibers in composite materials // *J. Nondestr. Eval.*– 1994.– **13.**– P. 137–145.
12. *Ляв А.* Математическая теория упругости.– М.: ОНТИ, 1935.– 674 с.
13. *Miklovitz J.* The theory of elastic waves and waveguides.– Amsterdam: North-Holland Publ.– 1973.
14. *Оное М., Макнивен Г. Д., Миндлин П. Д.* Дисперсия осесимметричных волн в упругих стержнях // *Прикладная механика. Тр. Америк. общ. инженеров-механиков.*– 1962.– **62,** N 4.– С. 139–145.
15. *Lamb H.* On Waves in Elastic Plate // *Proc. Roy. Soc. London, ser. A.*– 1917.– **93,** N 4.– P. 122.
16. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic waves propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1972.– **51.**– P. 265–283.
17. *Sinclair R.* Velocity dispersion of Raleigh waves propagating along rough surfaces // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1971.– **50,** N 3, Pt. 2.– P. 841–845.
18. *Новотный С. В.* Стационарные волны кручения в цилиндре с ограниченно податливой границей // *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, матем., мех.*– 1996.– N 4.– С. 77–85.