

УДК 539.3:534.12

СОБСТВЕННЫЕ НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

Ю. А. КАРПАЧЕВ*, В. А. ТРОЦЕНКО**, Ю. В. ТРОЦЕНКО*

* Межотраслевой научно-исследовательский институт проблем механики "Ритм", Киев

** Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 22.12.2000

Рассмотрена тонкостенная цилиндрическая оболочка с присоединенным абсолютно твердым телом на одном из ее торцов. С использованием уравнений технической теории оболочек сформулирована задача о свободных неосесимметричных колебаниях рассматриваемой системы. На основе вариационного метода предложено приближенное решение спектральной задачи с параметром, входящим как в уравнения, так и в граничные условия. Для сравнительно длинных оболочек приведена упрощенная постановка исходной задачи, которая допускает построение ее точного решения. Приведены результаты расчетов, анализ предложенного алгоритма и установлены границы применимости приближенной постановки задачи.

Розглянута тонкостінна циліндрична оболочка з приєднаним абсолютно твердим тілом на одному з її торців. З використанням рівнянь технічної теорії оболонок сформульована задача про вільні неосесиметричні коливання розглянутої системи. На основі варіаційного методу запропоновано наближений розв'язок спектральної задачі з параметром, що входить як у рівняння, так і в граничні умови. Для порівняно довгих оболонок наведена спрощена постановка вихідної задачі, яка допускає побудову її точного розв'язку. Наведені результати розрахунків, аналіз запропонованого алгоритму та встановлені межі застосування наближеної постановки задачі.

The thin-walled cylindrical shell with the attached absolutely rigid body on one of its ends is considered. Using the equations of technical theory of shells the problem on free non-axisymmetrical oscillations of the considered system is formulated. On basis of a variational method the approximate solution is offered for a spectral problem with the parameter that is present both in equations, and the boundary conditions. For long enough shells the simplified statement of the initial problem is outlined, allowing to develop an exact solution. The numerical results and their analysis are given. Also, the boundaries of applicability for the approximate statement of the problem are offered.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях науки и техники возникает необходимость расчета динамических характеристик сложных составных механических конструкций, представляющих собой разного рода соединения оболочечных элементов, упругих и твердых тел.

Исследованию продольных и крутильных колебаний цилиндрической оболочки, скрепленной с заполнителем и сосредоточенными массами на торцах, посвящены работы [1, 2]. В работах [3, 4] изучено взаимодействие ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела, связанного с внутренней поверхностью оболочки с помощью жестких невесомых стержней вдоль ее образующей. Задача о колебаниях стержней, несущих оболочку, заполненные жидкостью, рассмотрена в работе [5]. Исследованию собственных осесимметричных колебаний упругого цилиндра, боковая поверхность которого свободна от напряжений, а торцевые поверхности армированы тонкими пластинками, посвящена работа [6]. В работах [7–9] изучено взаимодействие предварительно напряженной безмоментной оболочки вращения с

жестким диском при их свободных колебаниях.

Данная работа посвящена определению собственных форм и частот неосесимметричных колебаний системы, состоящей из тонкостенной круговой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела, жестко прикрепленного к одному из ее торцов. Исходя из принципа возможных перемещений, построена математическая модель равновесного состояния рассматриваемой механической системы, подверженной воздействию сосредоточенных и распределенных нагрузок самого общего вида. На основе полученных уравнений сформулирована краевая задача на собственные значения, описывающая неосесимметричные колебания системы, и предложено ее приближенное решение на основе эквивалентной вариационной формулировки.

В предположении, что поперечные сечения оболочки при деформировании остаются плоскими и перпендикулярными к ее оси, сформулирована упрощенная постановка задачи, позволяющая найти точное решение.

Приведен анализ полученных решений, исследовано влияние геометрических и физических параметров системы на частоты совместных колеба-

ний тела и оболочки, при условии, что другой торец последней жестко зашпелен. Проведено сравнение частотных характеристик системы, вычисленных по упрощенной схеме и с учетом оболочечных эффектов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тонкостенной круговой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела, которое жестко прикреплено к одному из его торцов. Считаем, что второй торец оболочки жестко закреплен. Пусть тело обладает двумя плоскостями симметрии, линией пересечения которых является ось Oz , совпадающая с продольной осью оболочки. Координатную плоскость Oxz совместим с одной из плоскостей симметрии твердого тела, а начало системы координат $Oxyz$ поместим в плоскости торцевого сечения оболочки, свободного от твердого тела.

Для описания перемещений твердого тела введем прямоугольную систему координат $Cx_c y_c z_c$ с началом в центре инерции твердого тела и осями Cx_c и Cy_c , параллельными осям Ox и Oy соответственно. Орты системы координат $Cx_c y_c z_c$ обозначим через \vec{i}_c, \vec{j}_c и \vec{k}_c . Срединную поверхность цилиндрической оболочки отнесем к ортогональной системе криволинейных координат z и φ , где φ – полярный угол, отсчитываемый от оси Ox . С этими координатами свяжем локальный ортогональный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, в котором \vec{e}_1, \vec{e}_2 – единичные векторы, касательные к линиям главных кривизн срединной поверхности оболочки и направленные в сторону возрастания координат z и φ , а

$$\vec{e}_3 = [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2].$$

Предположим, что к рассматриваемой конструкции приложена малая нагрузка общего вида: сосредоточенная в точке C сила

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \vec{i}_c + \Delta F_2 \vec{j}_c + \Delta F_3 \vec{k}_c$$

и момент относительно точки C

$$\Delta \vec{M} = \Delta M_1 \vec{i}_c + \Delta M_2 \vec{j}_c + \Delta M_3 \vec{k}_c,$$

действующие на твердое тело, а также распределенная нагрузка

$$\Delta \vec{Q} = \Delta Q_1 \vec{e}_1 + \Delta Q_2 \vec{e}_2 + \Delta Q_3 \vec{e}_3,$$

действующая на оболочку. В результате система придет в возмущенное равновесное состояние,

подвергаясь при этом деформациям и перемещениям. Равновесное состояние системы будем характеризовать вектором перемещения точек срединной поверхности оболочки

$$\vec{u} = u \vec{e}_1 + v \vec{e}_2 + w \vec{e}_3,$$

вектором поступательного перемещения центра масс твердого тела

$$\vec{u}_0 = u_{01} \vec{i}_c + u_{02} \vec{j}_c + u_{03} \vec{k}_c$$

и вектором угла поворота тела вокруг этого центра

$$\vec{\theta}_0 = \theta_{01} \vec{i}_c + \theta_{02} \vec{j}_c + \theta_{03} \vec{k}_c.$$

При этом предположим, что перемещения твердого тела и оболочки настолько малы, что можно пренебречь членами второго и более высоких порядков по сравнению с линейными. Будем также считать, что для цилиндрической оболочки справедливы гипотезы Кирхгоффа – Лява. Уравнения равновесного состояния механической системы получим с привлечением вариационных принципов механики. Такой подход позволяет сформулировать вариационную постановку рассматриваемой задачи, которая может быть использована в дальнейшем при построении ее приближенного решения. Для получения уравнений равновесия системы и естественных граничных условий воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\delta \Pi = \delta A, \tag{1}$$

где $\delta \Pi$ – вариация потенциальной энергии системы; δA – вариация работы внешних сил. Работа внешних сил, приложенных к телу и оболочке, будет

$$A = \iint_{\Sigma} \Delta \vec{Q} \cdot \vec{u} d\Sigma + \Delta \vec{F} \cdot \vec{u}_0 + \Delta \vec{M} \cdot \vec{\theta}_0, \tag{2}$$

где Σ – срединная поверхность оболочки.

Потенциальная энергия деформаций тонкой цилиндрической оболочки может быть представлена в виде [10]

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \times \\ & \times \iint_{\Sigma} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4})] d\Sigma + \\ & + \frac{D}{2} \iint_{\Sigma} [(\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu)(\chi_1 \chi_2 - \chi_{12}^2)] d\Sigma, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

E, ν, h, R – модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина и радиус оболочки соответственно.

Первое из слагаемых в формуле (3) является потенциальной энергией удлинений и сдвигов, а второе – потенциальной энергией изгиба и кручения. В свою очередь, шесть компонентов деформации срединной поверхности оболочки выражаются через ее перемещения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial z}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right), \\ \chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, & \chi_2 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \\ \chi_{12} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi}, & \omega &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя в формулу (3) компоненты деформации срединной поверхности оболочки в виде (4), получаем выражение для потенциальной энергии в перемещениях:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right)^2 + \right. \\ &+ \frac{2\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + \left. \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] d\Sigma + \\ &+ \frac{D}{2} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{R^2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \right)^2 \right] d\Sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $\delta u, \delta v$ и δw вариации перемещений точек срединной поверхности оболочки. Тогда вариация потенциальной энергии упругой де-

формации оболочки примет вид

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint_{\Sigma} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right] \times \right. \\ &\times \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right] \frac{\partial \delta v}{\partial \varphi} + \\ &+ \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right] \delta w + \\ &+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial \varphi} + \\ &+ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial z} \left. \right\} d\Sigma + \\ &+ D \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z^2} + \right. \\ &+ \left(\frac{1}{R^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \left. \frac{2(1-\nu)}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \varphi} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial z \partial \varphi} \right] d\Sigma. \end{aligned} \quad (6)$$

Для 2π -периодических по второй координате функций $f(z, \varphi)$ и $g(z, \varphi)$, при условии что $g(0, \varphi) = 0$, можно установить следующие формулы интегрирования по частям для поверхностных интегралов:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f \frac{\partial g}{\partial z} d\Sigma &= - \iint_{\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial z} d\Sigma + \oint_L f g ds, \\ \iint_{\Sigma} f \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\Sigma &= - \iint_{\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\Sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство перемещений оболочки и твердого тела на контуре L , образованном поперечным сечением срединной поверхности оболочки при $z=l$, приводит к соотношению

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}_0], \quad (8)$$

где $\vec{r}_0 = (R \cos \varphi) \vec{i}_c - (R \sin \varphi) \vec{j}_c - l_c \vec{k}_c$ – радиус-вектор точек контура торца оболочки в системе координат $Cx_c y_c z_c$; l – длина цилиндрической оболочки; l_c – расстояние от точки C вдоль оси Oz до торцевого сечения оболочки, в котором прикреплено твердое тело.

Выразим правую часть формулы (8) в виде разложения по ортам трехгранника Дарбу, учитывая

их связь с ортами системы координат $Cx_c y_c z_c$:

$$\begin{aligned}\vec{i}_c &= -\sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{j}_c &= -\cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_3, \\ \vec{k}_c &= \vec{e}_1.\end{aligned}\quad (9)$$

Принимая во внимание соотношения (9), после приравнивания компонент векторов в формуле (8) получаем

$$\begin{aligned}u &= u_{03} - \theta_{01} R \sin \varphi - \theta_{02} R \cos \varphi, \\ v &= (\theta_{02} l_c - u_{01}) \sin \varphi - (\theta_{01} l_c + u_{02}) \cos \varphi - \theta_{03} R, \\ w &= -(\theta_{01} l_c + u_{02}) \sin \varphi + (u_{01} - \theta_{02} l_c) \cos \varphi.\end{aligned}\quad (10)$$

Граничные условия на краю оболочки накладываются на перемещения u , v , w и угол поворота $\theta_1 = -\partial w / \partial z$ вектора \vec{e}_1 вокруг направления \vec{e}_2 в результате деформирования ее срединной поверхности. Для определения соответствующего угла поворота твердого тела вычислим векторное произведение $[\vec{k}_c \times \vec{k}^*]$, где \vec{k}^* – орт подвижной системы координат $C^* x^* y^* z^*$, жестко связанной с телом, в направлении оси $C^* z^*$. С точностью до линейных слагаемых он определяется как

$$\vec{k}^* = \theta_{02} \vec{i}_c - \theta_{01} \vec{j}_c + \vec{k}_c. \quad (11)$$

С учетом соотношений (11) и (9) имеем

$$\begin{aligned}[\vec{k}_c \times \vec{k}^*] &= \theta_{01} \vec{i}_c + \theta_{02} \vec{j}_c = \\ &= -(\theta_{02} \cos \varphi + \theta_{01} \sin \varphi) \vec{e}_2 - \\ &= -(\theta_{02} \sin \varphi - \theta_{01} \cos \varphi) \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Приравнивая угол поворота вектора \vec{k}_c вокруг направления \vec{e}_2 с соответствующим углом поворота кромки оболочки, получаем

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=l} = \theta_{01} \sin \varphi + \theta_{02} \cos \varphi. \quad (12)$$

Формулы (10) и (12) представляют собой условия сопряжения на контуре L .

Применив формулы (7) к интегралам в соотношении (6), избавимся в них от производных от вариаций δu , δv , δw . С учетом того, что на контуре оболочки при $z=0$ вариации от перемещений удовлетворяют главным граничным условиям, вы-

ражение (6) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu_1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \delta u - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2} w + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta w + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \delta v - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^2}{R^2} \left(R^4 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \varphi^2} \right) \delta w \right] d\Sigma + \\ &\quad + \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \oint_L \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right] \delta u + \right. \\ &\quad \left. + \nu_1 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta v \right\} ds + \\ &\quad + \frac{D}{R^2} \oint_L \left\{ \left[-R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \varphi^2} \right] \delta w + \right. \\ &\quad \left. + \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right\} ds,\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \nu_1 = \frac{1-\nu}{2}; \quad \nu_2 = \frac{1+\nu}{2}.$$

На контуре L вариации δu , δv , δw , $\partial \delta w / \partial z$ не являются независимыми, поскольку перемещения оболочки связаны с параметрами движения твердого тела условиями сопряжения. Принимая во внимание соотношения (10) и (12), для вариаций перемещений оболочки на контуре L получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\delta u &= \delta u_{03} - R \sin \varphi \delta \theta_{01} - R \cos \varphi \delta \theta_{02}, \\ \delta v &= l_c \sin \varphi \delta \theta_{02} - \sin \varphi \delta u_{01} - \\ &\quad - l_c \cos \varphi \delta \theta_{01} - \cos \varphi \delta u_{02} - R \delta \theta_{03}, \\ \delta w &= -l_c \sin \varphi \delta \theta_{01} - \sin \varphi \delta u_{02} - \\ &\quad - l_c \cos \varphi \delta \theta_{02} + \cos \varphi \delta u_{01}, \\ \frac{\partial \delta w}{\partial z} &= \sin \varphi \delta \theta_{01} + \cos \varphi \delta \theta_{02}.\end{aligned}\quad (14)$$

После подстановки формул (14) в выраже-

ние (13) вариационное уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \right. \right. \right. \\
 & + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu_1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \Delta Q_1 \Big) \delta u + \\
 & + \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \right. \\
 & \left. \left. + \nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \Delta Q_2 \right) \delta v - \right. \\
 & - \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{R^2} w + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c^2}{R^2} \Delta \Delta w - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \Delta Q_3 \right) \delta w \right] d\Sigma \Big\} + \\
 & + \left[\int_L (Q_1^* \cos \varphi - S \sin \varphi) ds - \Delta F_1 \right] \delta u_{01} + \\
 & + \left[\int_L (Q_1^* \sin \varphi + S \cos \varphi) ds + \Delta F_2 \right] \delta u_{02} + \\
 & + \left(\int_L T_1 ds - \Delta F_3 \right) \delta u_{03} + \\
 & + \left[\int_L (RT_1 \sin \varphi + M_1 \sin \varphi + l_c S \cos \varphi + \right. \\
 & \left. + l_c Q_1^* \sin \varphi) ds + \Delta M_1 \right] \delta \theta_{01} + \\
 & + \left[\int_L (M_1 \cos \varphi + RT_1 \cos \varphi - l_c S \sin \varphi + \right. \\
 & \left. + l_c Q_1^* \cos \varphi) ds + \Delta M_2 \right] \delta \theta_{02} + \\
 & + \left[\int_L RS ds + \Delta M_3 \right] \delta \theta_{03} = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь Q_1^* – обобщенная поперечная сила на контуре оболочки, вычисляемая по формуле

$$Q_1^* = -c^2 \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \varphi^2} \right];$$

T_1 и S – меридиональная и сдвигающая силы, отнесенные к единице длины нормального сечения срединной поверхности оболочки; M_1 – погонный изгибающий момент в меридиональной плоскости.

Эти величины определяются по известным зависимостям:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega, \\
 M_1 &= D(\chi_1 + \nu \chi_2).
 \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку вариации перемещений оболочки и параметров движения твердого тела являются независимыми, то, приравнявая в выражении (15) коэффициенты при δu , δv и δw в поверхностных интегралах нулю, получаем уравнения равновесия цилиндрической оболочки. В свою очередь, из равенства нулю коэффициентов при вариациях параметров движения твердого тела следует уравнения равновесия твердого тела.

Уравнения собственных колебаний системы “тело – оболочка” можно получить, пользуясь принципом Даламбера и полагая

$$\begin{aligned}
 \Delta Q_1 &= -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \Delta Q_2 &= -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 \Delta Q_3 &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \Delta F_1 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2}, \\
 \Delta F_2 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2}, & \Delta F_3 &= -m_0 \frac{\partial^2 u_{03}}{\partial t^2}, \\
 \Delta M_1 &= -J_{x_c} \frac{\partial^2 \theta_{01}}{\partial t^2}, & \Delta M_2 &= -J_{y_c} \frac{\partial^2 \theta_{02}}{\partial t^2}, \\
 \Delta M_3 &= -J_{z_c} \frac{\partial^2 \theta_{03}}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь J_{x_c} , J_{y_c} , J_{z_c} – моменты инерции твердого тела относительно соответствующих осей; m_0 – масса твердого тела; ρ – плотность оболочки. При записи формулы (16) учитывалось, что начало системы координат $Cx_c y_c z_c$ связано с центром масс твердого тела.

Для определения собственных частот и форм колебаний рассматриваемой системы положим

$$\{ \vec{u}, \vec{u}_0, \vec{\theta}_0 \} = \{ \tilde{u}, \tilde{u}_0, \tilde{\theta}_0 \} \exp(i\omega t).$$

В дальнейшем для удобства записи знак тильды над векторами опускаем.

В результате получим спектральную задачу, состоящую из трех уравнений в частных производ-

ных относительно перемещений оболочки:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= -\rho\omega^2 \frac{(1-\nu^2)}{E}u, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= -\rho\omega^2 \frac{(1-\nu^2)}{E}v, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= \rho\omega^2 \frac{(1-\nu^2)}{E}w, \end{aligned} \quad (17)$$

а также шести нелокальных граничных условий при $z=l$

$$\begin{aligned} \oint_L (Q_1^* \cos \varphi - S \sin \varphi) ds &= m_0 \omega^2 u_{01}, \\ - \oint_L (Q_1^* \sin \varphi + S \cos \varphi) ds &= m_0 \omega^2 u_{02}, \\ \oint_L T_1 ds &= m_0 \omega^2 u_{03}, \\ \oint_L [T_1 R \sin \varphi + M_1 \sin \varphi + \\ &+ l_c (Q_1^* \sin \varphi + S \cos \varphi)] ds = \omega^2 J_{x_c} \theta_{01}, \\ \oint_L [T_1 R \cos \varphi + M_1 \cos \varphi + \\ &+ l_c (Q_1^* \cos \varphi - S \sin \varphi)] ds = \omega^2 J_{y_c} \theta_{02}, \\ \oint_L SR ds &= \omega^2 J_{z_c} \theta_{03}. \end{aligned} \quad (18)$$

В уравнениях (17)

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\nu_1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; & L_{12} &= L_{21} = \frac{\nu_2}{R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \varphi}; \\ L_{13} &= L_{31} = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial z}; & L_{22} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \nu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\ L_{23} &= L_{32} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}; & L_{33} &= \frac{1}{R^2} (c^2 \Delta \Delta + 1); \\ \Delta &= R^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

К соотношениям (17) и (18) необходимо добавить геометрические граничные условия для оболочки при $z=0$ вместе с условиями сопряжения между перемещениями и углами поворота контура

оболочки при $z=l$ и обобщенными координатами твердого тела (10) и (12). Таким образом, определение шести компонент движения твердого тела и трех компонент вектора перемещения оболочки свелось к решению задачи на собственные значения, где собственные значения входят как в граничные условия (18), так и в уравнения (17).

Особо следует отметить, что граничные условия (18) являются естественными для функционала $I = \Pi - A$ на классе функций, удовлетворяющих условиям сопряжения (10), (12) и главным условиям закрепления торца оболочки, свободного от твердого тела. Это означает, что при минимизации функционала I на упомянутом классе функций отпадает необходимость априорного выполнения достаточно сложных граничных условий (18), что обеспечивает определенное преимущество энергетическому методу построения приближенного решения рассматриваемой задачи, по сравнению с другими методами математической физики.

Малость параметров движения системы и осевая симметрия оболочки позволяют общее движение системы разложить на независимые составляющие в направлении и вокруг продольной оси, а также в двух взаимно перпендикулярных плоскостях Oxz и Oyz . Это дает возможность упростить решение задачи и представить конечные результаты в обозримой форме. Так, из выведенных уравнений легко получить известные постановки задач для случая крутильных и осесимметричных колебаний рассматриваемой механической системы [1, 2].

Обратимся теперь к формулировке краевой задачи в случае неосесимметричных колебаний конструкции. Будем считать, что при совместных колебаниях система совершает движение в одной из плоскостей симметрии, за которую, в частности, примем плоскость Oxz . При установившихся гармонических колебаниях системы с частотой ω в рассматриваемом случае собственные формы срединной поверхности цилиндрической оболочки будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(z, \varphi) &= u_n(z) \cos n\varphi, \\ v(z, \varphi) &= v_n(z) \sin n\varphi, \\ w(z, \varphi) &= w_n(z) \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

После подстановки выражений (19) в кинематические условия сопряжения на контуре L (10)

и (12) получаем

$$\begin{aligned} u_{03} - \theta_{01}R \sin \varphi - \theta_{02}R \cos \varphi - u_n \cos n\varphi &= 0, \\ (\theta_{02}l_c - u_{01}) \sin \varphi - (\theta_{01}l_c + u_{02}) \cos \varphi - \\ - \theta_{03}R - v_n \sin n\varphi &= 0, \\ -(\theta_{01}l_c + u_{02}) \sin \varphi + (u_{01} - \theta_{02}l_c) \cos \varphi - \\ - w_n \cos n\varphi &= 0, \\ \theta_{01} \sin \varphi + \theta_{02} \cos \varphi - \frac{dw_n}{dz} \cos n\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношения (20) должны выполняться при любом значении угла φ . Если номер окружной моды равен единице ($n = 1$), то из соотношений (20) следуют равенства

$$\begin{aligned} u_{02} = u_{03} = 0, \quad \theta_{01} = \theta_{03} = 0, \\ u_1(l) = -\theta_{02}R, \quad v_1(l) = \theta_{02}l_c - u_{01}, \\ w_1(l) = u_{01} - \theta_{02}l_c, \quad \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=l} = \theta_{02}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для случая $n > 1$ соотношения (20) дают

$$\begin{aligned} u_{01} = u_{02} = u_{03} = 0, \quad \theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{03} = 0, \\ u_n(l) = v_n(l) = w_n(l) = \left. \frac{dw_n}{dz} \right|_{z=l} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно, при номере окружной моды, превышающем единицу, колебания механической системы происходят также, как и в случае жесткого закрепления контура оболочки при $z=l$: тело неподвижно, а оболочка совершает пространственные движения в плоскости Oxz . Для случая $n=1$, в соответствии с исходными предположениями, тело будет совершать только поперечные колебания в плоскости Oxz , а срединная поверхность цилиндрической оболочки будет испытывать пространственную деформацию, характеризующуюся тремя составляющими вектора ее перемещений $u_1(z)$, $v_1(z)$ и $w_1(z)$. В соответствии с выражениями (19), усилия и моменты в срединной поверхности оболочки будут определяться формулами

$$\begin{aligned} T_1 = T_{1(n)} \cos n\varphi, \quad T_2 = T_{2(n)} \cos n\varphi, \\ S = S_{(n)} \sin n\varphi, \quad Q_1^* = Q_{1(n)}^* \cos n\varphi, \\ M_1 = M_{1(n)} \cos n\varphi, \quad M_2 = M_{2(n)} \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом соотношений (23), для $n > 1$ все уравнения (18) обращаются в тождества, а при $n = 1$

остаются только первое и пятое уравнения, которые принимают вид:

$$R\pi(Q_{1(1)}^* - S_{(1)}) = m_0\omega^2 u_{01}, \quad (24)$$

$$R\pi(Q_{1(1)}^* l_c - S_{(1)} l_c + RT_{1(1)} + M_{1(1)}) = \omega^2 J_{yc} \theta_{02}.$$

К полученным граничным условиям необходимо добавить уравнения движения оболочки (17), записанные с учетом формул (19), и условия закрепления оболочки при $z=0$.

Таким образом, использование условий симметрии рассматриваемой механической системы позволило существенно упростить краевую задачу о ее свободных колебаниях относительно положения равновесия.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Обратимся к построению решения сформулированной задачи математической физики.

Перейдем к безразмерным величинам, которые связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$\begin{aligned} \{u_n, v_n, w_n, u_{01}\} &= R \{\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n, \bar{u}_{01}\}, \\ \{T_{1(1)}, Q_{1(1)}^*, S_{(1)}\} &= \\ &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \{\bar{T}_{1(1)}, \bar{Q}_{1(1)}^*, \bar{S}_{(1)}\}, \\ \omega^2 &= \frac{E}{(1-\nu^2)\rho R^2} \bar{\omega}^2, \\ M_{1(1)} &= \frac{EhR}{(1-\nu^2)} \bar{M}_{1(1)}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$m_0 = \pi\rho h R^2 \bar{m}_0, \quad J_{yc} = \pi\rho h R^4 \bar{J}_{yc}.$$

В дальнейшем для упрощения записи черту над безразмерными величинами будем опускать. Тогда уравнения движения оболочки (17) после отделения угловой координаты примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n}{dz^2} - \nu_1 n^2 u_n + \nu_2 n \frac{dv_n}{dz} + \nu \frac{dw_n}{dz} + \omega^2 u_n &= 0, \\ \nu_1 \frac{d^2 v_n}{dz^2} - \nu_2 n \frac{du_n}{dz} - n^2 v_n - n w_n + \omega^2 v_n &= 0, \\ \nu \frac{du_n}{dz} + n v_n + c^2 \Delta_n \Delta_n w_n + w_n - \omega^2 w_n &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Delta_n = \frac{d^2}{dz^2} - n^2.$$

Для случая $n=1$ к уравнениям (26) необходимо присоединить граничные условия при $z=l$:

$$\begin{aligned} Q_{1(1)}^* - S_{(1)} &= \omega^2 m_0 u_{01}, \\ -S_{(1)} l_c + T_{1(1)} + M_{1(1)} + Q_{1(1)}^* l_c &= \omega^2 J_{y_c} \theta_{02}, \end{aligned} \quad (27)$$

условия сопряжения:

$$\begin{aligned} u_1(l) &= -\theta_{02}, & v_1(l) &= \theta_{02} l_c - u_{01}, \\ w_1(l) &= u_{01} - l_c \theta_{02}, & \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=l} &= \theta_{02}, \end{aligned} \quad (28)$$

а также, условие жесткого закрепления торца оболочки при $z=0$:

$$u_1(0) = v_1(0) = w_1(0) = \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (29)$$

Для $n > 1$ уравнения (26) должны решаться при граничных условиях (29) и

$$u_1(l) = v_1(l) = w_1(l) = \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=l} = 0. \quad (30)$$

Таким образом, при $n > 1$ имеем классическую задачу об определении частот и форм собственных колебаний цилиндрической оболочки с двумя жестко защемленными торцами. В случае же $n = 1$ имеем спектральную задачу, где частотный параметр входит не только в уравнения (26), но и в граничные условия (27). Помимо этого, в граничные условия (27) входят и обобщенные координаты движения твердого тела, которые связаны с составляющими перемещения оболочки при $z=l$ условиями сопряжения (28).

С помощью соотношений (27) из условий (28) можно исключить компоненты u_{01} и θ_{02} , получив при $z=l$ граничные условия относительно u_1 , v_1 , w_1 , имеющие довольно сложную структуру. Поскольку соотношения (26) представляют собой систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то существует возможность построения ее точного решения по методу Эйлера. При этом для определения вида решения необходимо найти корни характеристического уравнения восьмого порядка, часть из которых оказываются комплексными. В свою очередь, удовлетворение решений крайним условиям приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно постоянных интегрирования, равенство

нулю определителя которой дает частотное уравнение. В результате процесс нахождения одной собственной частоты состоит в последовательном подборе значения ω , удовлетворяющего частотному уравнению с предварительным нахождением для каждого фиксированного значения ω корней характеристического уравнения [11–13]. Все это приводит к достаточно сложному алгоритму вычисления частот и форм собственных колебаний. Поэтому при расчете колебаний цилиндрических оболочек в условиях закрепления торцов, отличных от шарнирного опирания, в большинстве случаев применяются различные приближенные методы решения задач на собственные значения [14–17]. В данном случае, как уже отмечалось выше, определенные перспективы получения эффективного алгоритма расчета динамических характеристик рассматриваемой системы связаны с эквивалентной вариационной формулировкой исходной краевой задачи, которая при этом позволяет учесть и переменность толщины оболочки.

Для того, чтобы иметь возможность воспользоваться вариационным соотношением (1), приведем выражение работы инерционных сил на возможных перемещениях системы при движении ее в плоскости Oxz :

$$\begin{aligned} \delta A &= -\rho h \iint_{\Sigma} [\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w] d\Sigma - \\ &\quad - m_0 \ddot{u}_{01} \delta u_{01} - J_{y_c} \ddot{\theta}_{02} \delta \theta_{02}. \end{aligned}$$

Здесь точки сверху обозначают дифференцирование по времени. Подставляя это выражение в уравнение (1), после отделения в перемещениях оболочки и твердого тела временного множителя, сводим задачу к отысканию стационарных значений функционала

$$I = \Pi - \omega^2 A_1. \quad (31)$$

Здесь Π – потенциальная энергия свободных колебаний системы;

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left[\rho h \iint_{\Sigma} (u^2 + v^2 + w^2) d\Sigma + \right. \\ &\quad \left. + m_0 u_{01}^2 + J_{y_c} \theta_{02}^2 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

После отделения угловой переменной по формулам (19) и выполнения интегрирования по переменной φ , функционал (31) в безразмерных вели-

чинах примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{du_n}{dz} \right)^2 + (w_n + nv_n)^2 + \right. \\ & \left. + 2\nu \frac{du_n}{dz} (w_n + nv_n) + \nu_1 \left(\frac{dv_n}{dz} - nu_n \right)^2 \right] dz + \\ & + \frac{c^2}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{d^2w_n}{dz^2} \right)^2 + n^4 w_n^2 - \right. \\ & \left. - 2\nu n^2 \frac{d^2w_n}{dz^2} w_n + 2(1-\nu)n^2 \left(\frac{dw_n}{dz} \right)^2 \right] dz - \\ & - \frac{\omega^2}{2} \left[\int_0^l (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) dz - \right. \\ & \left. - \delta_{1n} (m_0 u_{01}^2 + J_{yc} \theta_{02}^2) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\delta_{1n} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Функционал (33) необходимо минимизировать на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} u_n(l) = & -\delta_{1n} \theta_{02}, \quad v_n(l) = \delta_{1n} (l_c \theta_{02} - u_{01}), \\ w_n(l) = & \delta_{1n} (u_{01} - l_c \theta_{02}), \quad \left. \frac{dw_n}{dz} \right|_{z=l} = \delta_{1n} \theta_{02}, \quad (34) \\ u_n(0) = & v_n(0) = w_n(0) = \left. \frac{dw_n}{dz} \right|_{z=0} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия (27) являются естественными для функционала (33).

Для отыскания минимума функционала (33) будем пользоваться методом Ритца. В связи с этим, представим искомые функции $u_n(z)$, $v_n(z)$, $w_n(z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_n(z) = & \sum_{j=1}^N a_j u_j(z) + \delta_{1n} \theta_{02} u_0(z), \\ v_n(z) = & \sum_{j=1}^N b_j v_j(z) + \delta_{1n} (\theta_{02} l_c - u_{01}) v_0(z), \quad (35) \\ w_n(z) = & \sum_{j=1}^N c_j w_j(z) + \delta_{1n} (u_{01} w_0(z) + \theta_{02} f(z)), \end{aligned}$$

где a_j , b_j , c_j – произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем; $\{u_j(z)\}$, $\{v_j(z)\}$, $\{w_j(z)\}$ – системы координатных функций, удовлетворяющих на концах интервала $[0; l]$ граничным

условиям

$$u_j = v_j = w_j = \frac{dw_j}{dz} = 0. \quad (36)$$

В свою очередь, от функций $u_0(z)$, $v_0(z)$, $w_0(z)$ и $f(z)$ потребуем выполнения условий

$$\begin{aligned} u_0(0) = v_0(0) = & 0, \quad u_0(l) = -1, \quad v_0(l) = 1, \\ w_0(0) = \left. \frac{dw_0}{dz} \right|_{z=0} = & \left. \frac{dw_0}{dz} \right|_{z=l} = 0, \quad w_0(l) = 1, \quad (37) \end{aligned}$$

$$f(0) = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad f(l) = -l_c, \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=l} = 1.$$

При выполнении граничных условий (36) и (37), представления (35) будут удовлетворять главным граничным условиям (34) для функционала (33) при любых значениях вектора

$$\vec{X} = [a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N, u_{01}, \theta_{02}].$$

Построение систем базисных функций и функций $u_0(z)$, $v_0(z)$, $w_0(z)$, $f(z)$ будем осуществлять на классе степенных функций, которые обеспечивают их полноту и линейную независимость на отрезке $[0; l]$. В результате получим

$$\begin{aligned} u_0(z) = & -\frac{1}{l} z, \quad v_0(z) = \frac{1}{l} z, \\ w_0(z) = & \left(\frac{3}{l^2} - \frac{2}{l^3} z \right) z^2, \\ u_k(z) = & v_k(z) = z(z-l)z^{k-1}, \quad (38) \\ w_k(z) = & z^2(z-l)^2 z^{k-1}, \\ f(z) = & \left(-\frac{l+3l_c}{l^2} + \frac{2l_c+l}{l^3} z \right) z^2, \\ & k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Обращает на себя внимание тот факт, что, в отличие от традиционного метода Ритца, построенные представления (35) для функций $u_n(z)$, $v_n(z)$, $w_n(z)$ в случае $n=1$ не являются независимыми, поскольку они включают в себя общие постоянные u_{01} и θ_{02} , подлежащие определению в дальнейшем.

Воспользовавшись условиями для экстремума функционала, приравняем к нулю все частные производные от него по коэффициентам a_i , b_i , c_i , u_{01} и θ_{02} . При этом исходную задачу сведем к решению однородной алгебраической системы

$$(A - \omega^2 B) \vec{X}^T = 0, \quad (39)$$

где A и B – симметричные матрицы порядков $3N+2$ для $n=1$ и $3N$ для $n>1$.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(p, q) &= \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz} + \nu_1 n^2 p q, \\ \Psi_{12}(p, q) &= \nu n p \frac{dq}{dz} - \nu_1 n \frac{dp}{dz} q, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \nu p \frac{dq}{dz}, \quad \Psi_{23}(p, q) = n p q, \\ \Psi_{22}(p, q) &= n^2 p q + \nu_1 \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz}, \\ \Psi_{33}(p, q) &= p q + c^2 \left[\left(\frac{d^2 p}{dz^2} - \nu n^2 p \right) \frac{d^2 q}{dz^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(n^4 p - \nu n^2 \frac{d^2 p}{dz^2} \right) q + 2(1-\nu) n^2 \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz} \right].\end{aligned}\quad (40)$$

В формулах (40) $p(z)$ и $q(z)$ – произвольные функции. Используя эти соотношения, найдем матрицы, входящие в уравнение (39). Отметим, что искомые матрицы симметричны относительно своих главных диагоналей. Элементы матрицы A имеют вид

$$\begin{aligned}a_{i,j} &= \int_0^l \Psi_{11}(u_j, u_i) dz, \\ a_{i,j+N} &= \int_0^l \Psi_{12}(v_j, u_i) dz, \\ a_{i,j+2N} &= \int_0^l \Psi_{13}(w_j, u_i) dz, \\ a_{i,3N+1} &= \int_0^l [\Psi_{13}(w_0, u_i) - \Psi_{12}(v_0, u_i)] dz, \\ a_{i,3N+2} &= \int_0^l [\Psi_{11}(u_0, u_i) + \\ &\quad + l_c \Psi_{12}(v_0, u_i) + \Psi_{13}(f, u_i)] dz, \\ a_{i+N,j+N} &= \int_0^l \Psi_{22}(v_j, v_i) dz, \\ a_{i+N,j+2N} &= \int_0^l \Psi_{23}(w_j, v_i) dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{i+N,3N+1} &= \int_0^l [\Psi_{23}(w_0, v_i) - \Psi_{22}(v_0, v_i)] dz, \\ a_{i+N,3N+2} &= \int_0^l [\Psi_{12}(v_i, u_0) + \\ &\quad + l_c \Psi_{22}(v_0, v_i) + \Psi_{23}(f, v_i)] dz, \\ a_{i+2N,j+2N} &= \int_0^l \Psi_{33}(w_j, w_i) dz, \\ a_{i+2N,3N+1} &= \int_0^l [\Psi_{33}(w_0, w_i) - \Psi_{23}(w_i, v_0)] dz, \\ a_{i+2N,3N+2} &= \int_0^l [\Psi_{13}(w_i, u_0) + \\ &\quad + l_c \Psi_{23}(w_i, v_0) + \Psi_{33}(f, w_i)] dz, \\ a_{3N+1,3N+1} &= \int_0^l [\Psi_{22}(v_0, v_0) - \\ &\quad - 2\Psi_{23}(w_0, v_0) + \Psi_{33}(w_0, w_0)] dz, \\ a_{3N+1,3N+2} &= \int_0^l [\Psi_{33}(f, w_0) - \Psi_{12}(v_0, u_0) - \\ &\quad - l_c \Psi_{22}(v_0, v_0) - \Psi_{23}(f, v_0) + \\ &\quad + \Psi_{13}(w_0, u_0) + l_c \Psi_{23}(w_0, v_0)] dz, \\ a_{3N+2,3N+2} &= \int_0^l [\Psi_{11}(u_0, u_0) + 2l_c \Psi_{12}(v_0, u_0) + \\ &\quad + 2\Psi_{13}(f, u_0) + l_c^2 \Psi_{22}(v_0, v_0) + \\ &\quad + 2l_c \Psi_{23}(f, v_0) + \Psi_{33}(f, f)] dz.\end{aligned}$$

Что касается матрицы B , то ее элементы выглядят так:

$$\begin{aligned}b_{i,j} &= \int_0^l u_i u_j dz, \\ b_{i,j+N} &= b_{i,j+2N} = b_{i,3N+1} = 0, \\ b_{i,3N+2} &= \int_0^l u_0 u_i dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{i+N,j+N} &= \int_0^l v_i v_j dz, \\
 b_{i+N,j+2N} &= 0, \\
 b_{i+N,3N+1} &= - \int_0^l v_0 v_i dz, \\
 b_{i+N,3N+2} &= l_c \int_0^l v_0 v_i dz, \\
 b_{i+2N,j+2N} &= \int_0^l w_j w_i dz, \\
 b_{i+2N,3N+1} &= \int_0^l w_0 w_i dz, \\
 b_{i+2N,3N+2} &= \int_0^l f w_i dz, \\
 b_{3N+1,3N+1} &= \int_0^l (v_0^2 + w_0^2) dz + m_0, \\
 b_{3N+1,3N+2} &= \int_0^l (f w_0 - l_c v_0^2) dz, \\
 b_{3N+2,3N+2} &= \int_0^l (u_0^2 + l_c^2 v_0^2 + f^2) dz + J_y.
 \end{aligned}$$

Для случая $n > 1$ матрицы A и B получаются из построенных матриц для $n = 1$ вычеркиванием из них последних двух столбцов и строк. Если цилиндрическая оболочка обладает постоянной толщиной, то в силу симметрии граничных условий ее формы колебаний распадаются на симметричные и антисимметричные относительно $z = l/2$. Учитывая это обстоятельство, порядок алгебраической системы можно уменьшить вдвое, выбрав координатные функции для симметричных форм колебаний в виде

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \left(z - \frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2, & v_{i+1} &= v_i \left(z - \frac{l}{2}\right)^2, \\
 u_1 &= v_1 \left(z - \frac{l}{2}\right), & u_{i+1} &= v_{i+1} \left(z - \frac{l}{2}\right), \\
 w_1 &= v_1^2, & w_{i+1} &= w_i \left(z - \frac{l}{2}\right)^2,
 \end{aligned}$$

а для антисимметричных – в виде

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \left(z - \frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2, & u_{i+1} &= u_i \left(z - \frac{l}{2}\right)^2, \\
 v_1 &= u_1 \left(z - \frac{l}{2}\right), & v_{i+1} &= u_{i+1} \left(z - \frac{l}{2}\right), \\
 w_1 &= u_1^2 \left(z - \frac{l}{2}\right), & w_{i+1} &= w_i \left(z - \frac{l}{2}\right)^2.
 \end{aligned}$$

В двух последних группах соотношений $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Таким образом, задача определения собственных частот и форм неосесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным к одному из ее торцов абсолютно твердым телом свелась к вычислению квадратур с последующим решением обобщенной алгебраической задачи на собственные значения (39). При удачном выборе базисных функций в разложениях (35), обеспечивающих требуемую точность вычисления искомого решения и устойчивость вычислительного процесса, последняя задача легко решается с помощью стандартных подпрограмм, имеющихся в математическом обеспечении современных ПЭВМ.

3. УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ

В предыдущем разделе задача о свободных колебаниях оболочки и твердого тела решалась в строгой постановке. Однако при достаточно больших длинах оболочки исходную задачу можно существенно упростить, если предположить, что поперечные сечения оболочки при деформировании остаются плоскими и перпендикулярными к ее оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, пренебрежимо малы. В этом случае существенными из компонент тензоров напряжений и деформаций являются только σ_{11} и ε_{11} , а саму оболочку можно схематизировать тонкостенным упругим стержнем. В связи с этим, ниже приведем на этой основе упрощенную постановку рассматриваемой задачи и построим ее точное решение.

Для описания движения конструкции в данном случае удобно, наряду с ранее введенными системами координат, ввести еще одну систему координат $O_1 x_1 y_1 z_1$, оси которой параллельны осям Ox , Oy и Oz . Ее начало свяжем с центром сечения оболочки, где крепится твердое тело, а орты обозначим через $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$. Поскольку, как и в ранее рассмотренном случае, система имеет две плоскости симметрии, то ее колебания в плоскостях Oxz

и Oyz можно рассматривать независимо. Поэтому далее будем рассматривать колебания системы только в плоскости Oxz .

Обозначим перемещения точек нейтральной линии упругого стержня в направлении оси Ox через $\xi(z, t)$. Тогда

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=l} = \xi'(l, t)$$

соответствует углу поворота торцевого сечения $z=l$ стержня относительно оси Oy . С учетом вышесказанного, вектор перемещения точек твердого тела \vec{u}^* можно представить в виде

$$\vec{u}^* = \vec{u}_0 + [\vec{\theta}_0 \times \vec{r}]. \quad (41)$$

Здесь \vec{r} – радиус-вектор точек твердого тела; $\vec{u}_0 = \{\xi_0, 0, 0\}$ и $\vec{\theta}_0 = \{0, \xi'_0, 0\}$ – векторы малого перемещения и поворота системы координат $O_1x_1y_1z_1$; $\xi_0 = \xi(l, t)$; $\xi'_0 = \xi'(l, t)$. В развернутом виде вектор (41) имеет вид

$$\vec{u}^* = (\xi_0 + z_1 \xi'_0) \vec{i}_1 + (-\xi'_0 x_1) \vec{k}_1. \quad (42)$$

Для вывода уравнений движения системы “тело–стержень” воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= -\gamma \iiint_V \vec{u}^* \delta \vec{u}^* dV - \int_0^l \rho F \ddot{\xi} \delta \xi dz, \\ \delta \Pi &= \int_0^l EJ \xi'' \delta \xi'' dz, \end{aligned} \quad (43)$$

где Π – потенциальная энергия упругого стержня; γ и V – плотность и объем твердого тела; ρF и EJ – погонная масса и изгибная жесткость стержня. Как и ранее, двоеточие над величинами в уравнении (43) обозначает двукратное дифференцирование их по времени t . В рассматриваемом случае площадь поперечного сечения стержня F и его момент инерции J относительно оси Oy равны

$$F = 2\pi R h, \quad J = \pi R^3 h. \quad (44)$$

Подставляя выражение (42) в уравнения (43), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l EJ \xi'' \delta \xi'' dz &= - \int_0^l \rho F \ddot{\xi} \delta \xi dz - \\ &- \left(\ddot{\xi}_0 m_0 + \ddot{\xi}'_0 L_{03} \right) \delta \xi_0 - \\ &- \left(\ddot{\xi}_0 L_{03} + J_{y_1} \ddot{\xi}'_0 \right) \delta \xi'_0. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь через

$$\begin{aligned} L_{03} &= \gamma \iiint_V z_1 dv, \\ J_{y_1} &= \gamma \iiint_V (x_1^2 + z_1^2) dv \end{aligned}$$

обозначены статический момент инерции твердого тела относительно плоскости $O_1y_1z_1$ и момент инерции твердого тела относительно оси O_1y_1 , а через m_0 – масса твердого тела.

Легко видеть, что l_c – координата центра тяжести твердого тела в системе координат $O_1y_1z_1$. Тогда

$$L_{03} = m_0 l_c, \quad J_{y_1} = m_0 l_c^2 + J_{y_c}, \quad (46)$$

где J_{y_c} – момент инерции твердого тела относительно оси Cy_c .

Выполнив в левой части соотношения (45) интегрирование по частям и приняв во внимание независимость вариации $\delta \xi$ в случае жесткого закрепления торца стержня при $z=0$, получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} (EJ \xi'')'' + \rho F \ddot{\xi} &= 0, \\ EJ \xi''_0 &= -L_{03} \ddot{\xi}_0 - J_{y_1} \ddot{\xi}'_0, \\ (EJ \xi''') &= m_0 \ddot{\xi}_0 + L_{03} \ddot{\xi}'_0, \\ \xi(0, t) &= \xi'(0, t) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Для случая свободных гармонических колебаний системы представим $\xi(z, t)$ в виде

$$\xi(z, t) = w(z) \exp(i\omega t). \quad (48)$$

Тогда по формулам (25), перейдя к безразмерным величинам, получим следующую задачу на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dz^4} - \beta^4 w &= 0, \\ \left[\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{\beta^4}{2} (L_{03} w + J_{y_1} \frac{dw}{dz}) \right]_{z=l} &= 0, \\ \left[\frac{d^3 w}{dz^3} + \frac{\beta^4}{2} (m_0 w + L_{03} \frac{dw}{dz}) \right]_{z=l} &= 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$w(0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = 0.$$

При этом безразмерная частота ω с безразмерным параметром β будут связаны соотношением

$$\omega^2 = \frac{1 - \nu^2}{2} \beta^4. \quad (50)$$

Перейдем к построению точного решения сформулированной задачи. Общее решение уравнения из (49) можно представить в виде

$$w(z) = C_1 S(\beta z) + C_2 T(\beta z) + C_3 U(\beta z) + C_4 V(\beta z), \quad (51)$$

где C_i – произвольные постоянные. В выражение (51) входят функции Крылова:

$$\begin{aligned} S(\beta z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \beta z + \cos \beta z); \\ T(\beta z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \beta z + \sin \beta z); \\ U(\beta z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \beta z - \cos \beta z); \\ V(\beta z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \beta z - \sin \beta z). \end{aligned} \quad (52)$$

При представлении решения в форме (51) произвольные постоянные можно выразить через начальные значения функции $w(z)$ и ее производные:

$$\begin{aligned} C_1 &= w(0), & C_2 &= \frac{1}{\beta} w'(0), \\ C_3 &= \frac{1}{\beta^2} w''(0), & C_4 &= \frac{1}{\beta^3} w'''(0). \end{aligned} \quad (53)$$

Так как в данном случае рассматриваются условия жесткого защемления торца стержня при $z=0$, то, подставляя в соотношения (53) соответствующие граничные условия для w , получаем $C_1 = C_2 = 0$. Тогда решение для $w(z)$ принимает вид

$$w(z) = C_3 U(\beta z) + C_4 V(\beta z). \quad (54)$$

Подставляя выражение (54) в граничные условия при $z=l$, получаем однородную алгебраическую систему относительно постоянных C_3, C_4 :

$$\begin{cases} C_3 \alpha_{11} + C_4 \alpha_{12} = 0, \\ C_3 \alpha_{21} + C_4 \alpha_{22} = 0, \end{cases} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2} \beta^2 L_{03} U(\beta l) + \frac{1}{2} \beta^3 J_{y_1} T(\beta l) - S(\beta l); \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{2} \beta^2 L_{03} V(\beta l) + \frac{1}{2} \beta^3 J_{y_1} U(\beta l) - T(\beta l); \\ \alpha_{21} &= \frac{1}{2} \beta m_0 U(\beta l) + \frac{1}{2} \beta^2 L_{03} T(\beta l) + V(\beta l); \\ \alpha_{22} &= \frac{1}{2} \beta m_0 V(\beta l) + \frac{1}{2} \beta^2 L_{03} U(\beta l) + S(\beta l). \end{aligned}$$

Из условия существования решения алгебраической системы (55) получаем характеристическое

уравнение для определения параметра β :

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (56)$$

Если параметр β определен, то из решения системы (55) найдем

$$C_4 = -\frac{\alpha_{11}(\beta)}{\alpha_{12}(\beta)} C_3,$$

а формы колебаний тонкостенного стержня будут определяться по формуле

$$w(z) = C_3 \left(U(\beta z) - \frac{\alpha_{11}(\beta)}{\alpha_{12}(\beta)} V(\beta z) \right). \quad (57)$$

Заметим, что значение $\beta=0$ в рассматриваемом случае не является собственным значением задачи (49), так как ему соответствует нулевое решение.

Получение точного решения задачи позволяет проанализировать поведение системы в зависимости от параметров твердого тела. Полагая $J_{y_1} = K m_0$, где $K \neq l_c^2$, при $m_0 \rightarrow 0$, краевая задача (49) переходит в соответствующую задачу о свободных колебаниях стержня с защемленным левым и свободным правым торцами. Характеристическое уравнение в данном случае принимает вид

$$\operatorname{ch} \beta l \cos \beta l = -1. \quad (58)$$

Для другого предельного случая при $m_0 \rightarrow \infty$ уравнение (56) принимает следующую форму:

$$\beta^4 (1 - \operatorname{ch} \beta l \cos \beta l) = 0. \quad (59)$$

Первый корень уравнения (59) равен нулю, а остальные определяются уравнением

$$\operatorname{ch} \beta l \cos \beta l = 1, \quad (60)$$

первый корень которого также равен нулю.

Таким образом, при увеличении массы тела первые два частотных параметра уравнения (56) стремятся к нулевым значениям, тогда как остальные – к ненулевым корням уравнения (60). В этом предельном случае твердое тело остается неподвижным, тогда как стержень совершает свободные колебания при условиях жесткого закрепления его краев.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем некоторые результаты расчета безразмерной частоты связанных колебаний оболочки и присоединенного к ней твердого тела по предложенным выше алгоритмам. В дальнейшем предполагается, что к оболочке присоединено твердое

тело, имеющее форму кругового цилиндра радиуса R и высоты H . В этом случае безразмерные масса тела и его момент инерции относительно оси Oy_c определяются по формулам

$$m_0 = \frac{\gamma H}{\rho h}, \quad J_{y_c} = \frac{m_0}{12}(3 + H^2),$$

где γ – плотность материала тела; $H = 2l_c$.

В расчетах были приняты следующие значения безразмерных параметров системы: $\nu = 0.3$, $h = 0.01$; $l_c = 0.5$. Длина оболочки l и масса тела варьировались. При вычислении элементов матриц A и B использовалась квадратурная формула Гаусса с числом узлов интегрирования, обеспечивающим необходимую точность вычислений.

При уменьшении относительной длины оболочки сходимость процесса улучшается. В то же время, при увеличении длины оболочки, точность вычислений понижается при фиксированном значении числа N . Однако при $N = 10$ и $l = 10$, вычисления по формулам (39) дают приемлемую для практических приложений точность. Дальнейшее увеличение длины оболочки ($l > 10$) должно сопровождаться при расчетах увеличением числа координатных функций. Вычисления также показывают, что влияние массы тела и координаты его центра масс на сходимость вариационного метода оказывается незначительным.

В табл. 1 приведены результаты вычислений первых пяти низших частот неосесимметричных колебаний ($n=1$ механической системы “тело–оболочка” при $l=4$ и $m_0=100$ в зависимости от количества членов в разложениях (35)). Поведение собственных частот системы в зависимости от величины безразмерной массы m_0 представлено в табл. 2. При этом остальные входные параметры системы выбирались такими же, как и при получении данных табл. 1. Число координатных функций полагалось равным 10. Как видно из табл. 2, увеличение массы твердого тела приводит к понижению частот системы. Подобное поведение вполне объяснимо, поскольку с увеличением массы тела возрастает кинетическая энергия системы. При сохранении неизменными иных параметров системы это приводит к повышению ее инерционности и, как следствие, к понижению частотного спектра. Дальнейшее увеличение массы тела приводит к тому, что первая и вторая частоты системы стремятся к нулю, а остальные – к своим предельным значениям. При этом предельные значения частот, обозначенные в таблице звездочкой, соответствуют частотам колебаний цилиндрической оболочки с заземленными торцами для окружной моды с $n = 1$.

Табл. 1. Пять низших частот неосесимметричных колебаний механической системы “тело–оболочка” в зависимости от количества членов в разложениях (35) при $l=4$, $m_0=100$

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	0.01588	0.14488	0.36642	0.99237	1.44936
2	0.01492	0.12800	0.36151	0.61986	0.93573
3	0.01487	0.12788	0.32597	0.61914	0.81503
4	0.01479	0.12695	0.32564	0.57759	0.81062
5	0.01477	0.12692	0.32295	0.57743	0.76241
6	0.01474	0.12662	0.32294	0.57618	0.76238
7	0.01473	0.12660	0.32212	0.57618	0.76122
8	0.01472	0.12648	0.32211	0.57589	0.76121
9	0.01471	0.12646	0.32181	0.57588	0.76106
10	0.01471	0.12641	0.32181	0.57583	0.76106

Табл. 2. Пять низших частот неосесимметричных колебаний механической системы “тело–оболочка” в зависимости от массы твердого тела при $l=4$

m_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0	0.10798	0.35011	0.62905	0.73106	0.81753
10^2	0.01471	0.12641	0.32181	0.57583	0.76106
10^3	0.00469	0.04232	0.30744	0.57360	0.76019
10^4	0.00148	0.01345	0.30615	0.57339	0.76010
10^5	0.00047	0.00426	0.30602	0.57337	0.76010
(*)	–	–	0.30600	0.57336	0.76010

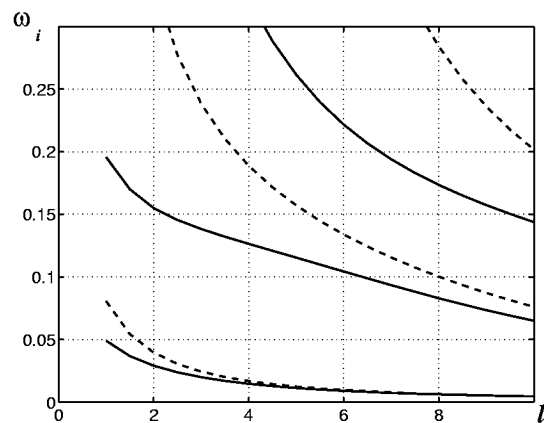


Рисунок. Зависимости частот первых трех тонов колебаний системы “оболочка – твердое тело” от длины оболочки l :
 сплошные – полная расчетная схема,
 штриховые – стержневая расчетная схема

Табл. 3. Низшие частоты ω_{1n} для цилиндрической оболочки с жестко заземленными торцами, $n > 1$ – тело неподвижно (истинные значения частот умножены на 10)

l	$\delta=200$	$\delta=400$	$\delta=600$	$\delta=800$	$\delta=1000$
2	1.12969 ₍₇₎	0.82296 ₍₉₎	0.67886 ₍₁₀₎	0.59474 ₍₁₁₎	0.53114 ₍₁₁₎
4	0.58626 ₍₅₎	0.42330 ₍₆₎	0.34532 ₍₇₎	0.30348 ₍₈₎	0.26967 ₍₈₎
6	0.39910 ₍₄₎	0.28260 ₍₅₎	0.23213 ₍₆₎	0.20214 ₍₆₎	0.18249 ₍₇₎
8	0.29661 ₍₄₎	0.21836 ₍₅₎	0.17340 ₍₅₎	0.15440 ₍₅₎	0.13619 ₍₆₎
10	0.24526 ₍₃₎	0.16821 ₍₄₎	0.14396 ₍₅₎	0.12075 ₍₅₎	0.10834 ₍₅₎
12	0.19431 ₍₃₎	0.14264 ₍₄₎	0.11534 ₍₄₎	0.10411 ₍₄₎	0.09115 ₍₅₎
14	0.16645 ₍₃₎	0.12714 ₍₃₎	0.09907 ₍₄₎	0.08577 ₍₄₎	0.07886 ₍₄₎

Таким образом, наличие жестко прикрепленного твердого тела на одном из торцов оболочки при заземленном другом торце может привести к появлению в системе двух достаточно низких первых частот, обусловленных подвижностью твердого тела. При этом упомянутые частоты могут оказаться меньшими, чем минимальные частоты оболочки с обоими заземленными торцами ($n > 1$).

На рисунке представлены зависимости частот первых трех тонов колебаний системы от длины оболочки l . При расчетах полагалось $m_0 = 100$, $n = 1$. Сплошными линиями показаны частоты ω_i совместных колебаний, вычисленные по изложенной выше методике, а штриховыми – частоты ω_i^* , полученные по стержневой схеме, в которой оболочка заменялась участком стержня с постоянными по его длине погонной массой и изгибной жесткостью. Проведенные расчеты показали, что $\omega_i \leq \omega_i^*$ и различие в этих частотах уменьшается при увеличении длины оболочки. Так, первые частоты ω_1 и ω_1^* практически совпадают уже при $l \geq 4$, в то время как различие между ω_2 и ω_2^* при $l = 10$ составляет 16 %.

В табл. 3 приведены некоторые результаты расчетов минимальных частот ω_{1n} для цилиндрической оболочки с жестко заземленными торцами ($n > 1$ – тело неподвижно) в широком диапазоне входных параметров $l/R = 2 \div 14$, $\delta = R/h = 200 \div 1000$. В скобках указаны соответствующие этим частотам номера окружных мод упругой поверхности оболочки n . Наименьшим частотам соответствуют симметричные формы колебаний оболочки. Поэтому при расчетах использовались соответствующие системы координатных функций при сохранении в разложениях Ритца по 10 членов. Сравнение данных этой таблицы с данными работы [12], полученными на основе точного решения рассматриваемой задачи на собственные значения, указывает на их пол-

ное совпадение. При этом на получение данных в нашем случае требуются значительно меньшие затраты вычислительного времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель связанных колебаний цилиндрической оболочки и прикрепленного к одному из ее торцов абсолютно твердого тела. Предложено приближенное решение задачи по определению частот и форм собственных колебаний рассматриваемой системы на основе эквивалентной вариационной формулировки. Разработанный алгоритм сведен к вычислению квадратур и решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения, имеющей невысокую размерность. При этом обеспечена достаточно высокая точность получаемых результатов в широком диапазоне входных параметров системы.

Из анализа полученных результатов следует, что наличие твердого тела на торце оболочки может привести к появлению в системе достаточно низких частот. Упомянутые частоты могут оказаться меньшими, чем минимальные частоты оболочки с обоими заземленными торцами.

Расчеты показали, что частоты совместных колебаний системы, вычисленные по оболочечной схеме, лежат ниже соответствующих частот, полученных по стержневой схеме, причем различие между ними уменьшается с увеличением относительной длины оболочки. На конкретном примере показано, что приемлемые результаты расчета первой собственной частоты по стержневой схеме можно получить уже при $l/R \geq 4$. Относительно второй частоты это же заключение может быть сделано при $l/R \geq 14$.

В целом же, в ряде случаев учет оболочечных эффектов приводит к значительному отличию частот совместных колебаний по сравнению

с соответствующими частотами, вычисленными по стержневой схеме. Указанные обстоятельства вызывают необходимость привлекать для достоверного описания динамических свойств системы в этом случае расчетные схемы, основанные на уравнениях теории оболочек.

1. Бреславский В. Е. Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким наполнителем и сосредоточенными массами // Пробл. машиностр.– 1981.– N 14.– С. 27–32.
2. Бреславский В. Е. Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем // Труды VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ленинград, 21–28 мая, 1973 г.– М.: Наука, 1973.– С. 271–276.
3. Паламарчук В. Г. Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. мех.– 1978.– 14, N 4.– С. 56–62.
4. Паламарчук В. Г. Динамическая неустойчивость системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. мех.– 1978.– 14, N 5.– С. 45–51.
5. Рабинович Б. И., Шмаков В. П., Кобычкин В. С. К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью // Исследования по теории сооружений.– 1970.– Вып. 18.– С. 68–84.
6. Шейба Л. С., Шляпочников С. А. О собственных колебаниях упругого цилиндра, армированного по торцам тонкими пластинами // Изв. АН СССР. МТТ.– 1976.– N 3.– С. 133–139.
7. Кладинога В. С. Малые крутильно-сдвиговые колебания осесимметрично деформированной кольцеобразной мембраны с жестким концентрическим включением // Фильтрация и управление в механических системах.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1991.– С. 28–34.
8. Кладинога В. С. Собственные колебания полого деформированной мембраны с жесткой вставкой // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1991.– С. 18–29.
9. Троценко В. А., Кладинога В. С. Неосесимметричные колебания предварительно напряженной оболочки вращения с присоединенным жестким диском // Прикл. мех.– 1994.– 30, N 7.– С. 17–24.
10. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек.– Л.: Судпромгиз, 1962.– 432 с.
11. Forsberg K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells // AIAA J.– 1964.– 2, N 12.– P. 55–76.
12. Швейко Ю. Ю., Гаврилов Ю. В., Брусилковский А. Д. О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрических оболочек // Докл. науч.-техн. конф. по итогам науч.-исслед. работ за 1964–1965 гг. Секция энергомашиностроения.– М.: МЭИ, 1965.– С. 131–148.
13. Кушцов В. И. О собственных поперечных колебаниях консольных ортотропных цилиндрических оболочек // Прикл. мех.– 1977.– 13, N 4.– С. 38–44.
14. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек.– К.: Наук. думка, 1964.– 288 с.
15. Sewall I. L., Pusey C. G. Vibration study of clamped-free elliptical cylindrical shells // AIAA J.– 1971.– 9, N 6.– P. 1004–1011.
16. Медведев В. И., Мяченков В. И. Несимметричные колебания оболочек вращения // Изв. АН СССР, МТТ.– 1971.– N 2.– С. 53–58.
17. Мяченков В. И., Репин А. А. Влияние граничных условий на собственные частоты колебаний цилиндрических оболочек // Прикл. мех.– 1971.– 7, N 6.– С. 31–36.