

УДК 534.12+534.143:539.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

О. В. КАРНАУХОВА*, В. И. КОЗЛОВ**, А. О. РАССКАЗОВ*

*Украинский транспортный университет, Киев

**Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Получено 1.11.2000

Дана постановка задачи о параметрических колебаниях упругой трехслойной пьезооболочки, состоящей из среднего ортотропного диэлектрического или металлического слоя и двух пьезоэлектрических слоев. На основе механических гипотез Кирхгофа–Лява и адекватных им гипотез относительно электрических полевых величин получены определяющие уравнения для усилий и моментов для различных случаев расположения электродов, типа поляризации и электрических граничных условий. Указано, как с использованием этих уравнений, универсальных уравнений движения, кинематических соотношений и механических граничных условий записать нелинейные и линеаризованные уравнения, описывающие параметрические колебания оболочек произвольной конфигурации. Линеаризованные уравнения описывают области динамической неустойчивости (ОДН). На границе ОДН имеет место гармоническое движение. Это позволяет свести задачу исследования главной ОДН к задачам на собственные значения и статической устойчивости для предварительно нагруженных пьезооболочек. С целью решения таких задач развит метод конечных элементов. Подробно рассмотрена задача о параметрических колебаниях трехслойной цилиндрической пьезопанели указанной структуры. Для шарнирного закрепления ее торцов получено аналитическое решение. Сопоставление конечно-элементного и аналитического решений свидетельствует о высокой точности первого. Решена задача о параметрических колебаниях механически нагруженной пьезооболочки с короткозамкнутыми и разомкнутыми электродами. Обнаружено существенное влияние электрических граничных условий на размеры ОДН, что может быть использовано для контроля колебаний оболочек. Получено конечно-элементное решение задачи о параметрических колебаниях цилиндрической пьезопанели с жестким защемлением торцов. Анализ численных результатов свидетельствует о существенном влиянии механических граничных условий как на размеры, так и на расположение главной ОДН.

Дано постановку задачі про параметричні коливання пружної тришарової п'єзооболонки, що складається з середнього ортотропного діелектричного або металевого шару та двох п'єзоелектричних шарів. На основі механічних гіпотез Кірхгофа–Лява й адекватних їм гіпотез про електричні польові величини одержані визначальні рівняння для зусиль і моментів для різних випадків розміщення електродів, типу поляризації та електричних граничних умов. Вказано, як з використанням цих рівнянь, універсальних рівнянь руху, кінематичних співвідношень і механічних граничних умов записати нелінійні й лінеаризовані рівняння, які описують параметричні коливання оболонки довільної конфігурації. Лінеаризовані рівняння описують області динамічної нестійкості (ОДН). На межі ОДН має місце гармонічний рух. Це дозволяє звести задачу дослідження головної ОДН до задач на власні значення і статичну стійкість для попередньо навантажених п'єзооболонки. Для розв'язання таких задач розвинуто метод скінченних елементів. Детально розглянуто задачу про параметричні коливання тришарової циліндричної п'єзопанелі вказаної структури. Для шарнірного закріплення торців одержано її аналітичний розв'язок. Порівняння скінченно-елементного й аналітичного розв'язків свідчить про високу точність першого. Розв'язано задачу про параметричні коливання механічно навантаженої п'єзооболонки з короткозамкнутими й розімкнутими електродами. Виявлено суттєвий вплив електричних граничних умов на розміри ОДН, що може бути використано для контролю параметричних коливань оболонки. Одержано скінченно-елементний розв'язок задачі про параметричні коливання циліндричної п'єзопанелі з жорстким закріпленням торців. Аналіз чисельних результатів свідчить про суттєвий вплив механічних граничних умов як на розміри, так і на розміщення головної ОДН.

The problem of parametrical vibrations of elastic three-layer shells composed from middle orthotropic dielectric or metal layer and two piezoelectrical layers is studied. On the basis of the mechanical Kirchoff–Love hypothesis and adequate assumptions for an electrical field the constitutive equations for forces and moments are obtained for varying electrode positions, type of polarization and electrical boundary conditions. It is shown how nonlinear and linearized equations describing the parametrical vibrations of the arbitrary shaped shells can be obtained if the constitutive equations, universal equations of motion, kinematical equations and boundary conditions are used. The linearized equations describe an area of dynamic instability (ADU). On the boundary of ADU the harmonic motion occurs. This gives an opportunity to reduce the problem of investigations of the main ADU to solving the eigen value problems and the problem of static stability. Method of finite elements is developed to solve these problems. The problem of parametrical vibrations of a three-layered cylindrical piezopanel is considered in detail. The analytical solution of the problem is obtained for the case of simply supported edges. Correlation of an analytical and finite-element solutions demonstrate high accuracy of the first. The problem of parametrical vibrations under harmonic mechanical load is solved for the open-circuited and short-circuited conditions. The essential influence of the electrical boundary conditions on the size of ADU that can be used for control of the parametrical vibrations of the shells is shown. The finite-element solution of the problem of parametrical vibrations of cylindrical piezopanel with clamped edges is obtained. The numerical results point to essential influence of mechanical boundary conditions on the size and position of ADU.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию параметрических колебаний упругих тонкостенных элементов конструкций

посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных ученых-механиков. Классические результаты в этой области отражены в известных монографиях [1–4], более поздние

исследования – в [5–8].

Параметрические колебания пьезоэлектрических тонкостенных элементов в литературе практически не рассматривались. Первые результаты в этой области были получены в монографии [9], в которой рассмотрены задачи о параметрических колебаниях однослойных пьезоэлектрических упругих тел: стержня, прямоугольной пластины и цилиндрической оболочки. Постановка задач о параметрических колебаниях тонкостенных упругих и вязкоупругих пьезоэлементов с учетом геометрической нелинейности дана в статьях [10, 12]. Здесь же решены линеаризованные задачи о расчете областей динамической неустойчивости однослойных упругих и вязкоупругих пьезоэлектрических стержней, прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек. Параметрические колебания вязкоупругого пьезоэлектрического стержня с учетом геометрической нелинейности рассмотрены в статье [11].

При исследовании параметрических колебаний тонкостенных пьезоэлементов возникает ряд вопросов, требующих специального рассмотрения. Одни из них относятся к области традиционной упругости, другие же связаны со специфическими особенностями поведения пьезоматериалов. Среди наиболее интересных с теоретической и прикладной точек зрения проблем следует отметить следующие:

- 1) исследование областей динамической неустойчивости при действии периодической во времени электрической нагрузки;
- 2) изучение влияния электрического нагружения на параметрические колебания пьезоэлементов при механическом периодическом нагружении и возможности управления параметрическими колебаниями с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов;
- 3) исследование влияния электрических граничных условий на области неустойчивости параметрических колебаний при механическом нагружении (это также связано с вопросом о возможности управления параметрическими колебаниями с помощью изменения типа электрических граничных условий);
- 4) исследование влияния размещения электродов по толщине оболочки либо по ее площади на области неустойчивости.

Возникают также традиционные вопросы о влиянии линейной и нелинейной вязкости, геометрической нелинейности, сил инерции и т. п.

В настоящей статье дана постановка задачи о параметрических колебаниях трехслойных пьезоэлектрических оболочек, состоящих из среднего ортотропного пассивного слоя и двух симметрично расположенных относительно него пьезоэлектрических слоев, поляризованных по толщине. Предполагается, что докритическое состояние определяется из решения квазистатической задачи электроупругости, т. е. в пренебрежении силами инерции. Средний слой может быть изготовлен из металла либо композитного материала. На внешние поверхности оболочки наносятся бесконечно тонкие электроды. Такие же электроды могут быть размещены между пассивным и пьезоактивными слоями. Для решения линеаризованной задачи об определении областей динамической неустойчивости (ОДН) применяется метод конечных элементов (МКЭ). При этом используется тот факт, что на границе главной ОДН имеют место стационарные колебания в окрестности частоты $\omega = 2\Omega$, где Ω – собственная частота изгибных колебаний. Это дает возможность свести исходную задачу к решению двух задач на собственные значения предварительно растянутой и сжатой оболочки. ОДН определяется путем перебора значений предварительных усилий. Такая методика представлена в монографии [5], где при решении указанных задач на собственные значения использован метод дискретной ортогонализации для замкнутых в окружном направлении оболочек вращения. В этом случае перемещения представляются в виде рядов Фурье по окружной координате.

В настоящей статье используется методика, основанная на МКЭ, которая значительно расширяет возможности исследования ОДН. Подробно рассматривается задача о параметрических колебаниях трехслойной цилиндрической пьезопанели с шарнирным закреплением краев. Для таких граничных условий с использованием асимптотических методов нелинейной механики получено аналитическое решение. Сопоставление аналитического и конечно-элементного решений свидетельствует о высокой точности и эффективности использованных подходов. Исследовано влияние электрических и механических граничных условий на параметрические колебания цилиндрической панели. При этом рассмотрены два крайних случая электрических граничных условий: замкнутые и разомкнутые электроды, а также механические граничные условия, отвечающие шарнирному и жесткому защемлению торцов оболочки. Обнаружено существенное влияние электрических и механических граничных условий на характеристики ОДН.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехслойную пьезоэлектрическую оболочку толщиной h , составленную из среднего пассивного слоя толщины h_0 и двух пьезоэлектрических слоев с толщинами h_1 и h_2 соответственно. Введем связанную с оболочкой координатную систему (α, β, γ) , в которой α и β соответствуют координатным линиям, идущим в направлениях главных кривизн, а γ – толщинная координата. Пассивный слой в общем случае считается ортотропным, так что он, в свою очередь, может иметь слоистую структуру. Подобные конструкции широко используются в современной технике для управления колебаниями тонкостенных элементов из пассивных материалов [13, 14]. При моделировании параметрических колебаний указанных элементов используем механические гипотезы Кирхгоффа–Лява [15, 16] в совокупности с дополнительными гипотезами о малости тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического поля и индукции по сравнению с их нормальными составляющими и постоянстве нормальной составляющей вектора индукции по толщине пьезоэлемента [17]. При этом уравнения состояния пьезоактивных и пассивных слоев имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^k &= B_{11}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma)E_\gamma, \\ \sigma_\beta^k &= B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{22}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma)E_\gamma, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma)(\varepsilon_{12} + \gamma\kappa_{12}), \\ D_\gamma &= \gamma_{33}^k(\gamma)E_\gamma + \gamma_{31}^k(\gamma) \times \\ &\times [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)], \\ &k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее используются традиционные обозначения физических полей и материальных констант (см., например, [15–17]). Для пассивного слоя полагаем $\gamma_{31}^0 = 0$, если он диэлектрический, и дополнительно $\gamma_{33}^0 \rightarrow \infty$, если он металлический. При этом величины B_{ij}^0 определяются по известным формулам теории анизотропных оболочек [15, 16]. Для пьезоактивных поляризованных по толщине

слоев имеем [17]

$$\begin{aligned} B_{11}^k(\gamma) &= B_{22}^k(\gamma) = 1/S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)], \\ B_{12}^k(\gamma) &= \nu^k(\gamma)B_{11}^k(\gamma), \\ B_{66}^k(\gamma) &= [1 - \nu^k(\gamma)]B_{11}^k(\gamma), \\ \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^{kT}[1 - k_p^k(\gamma)], \\ \gamma_{31}^k &= d_{31}^k(\gamma)/S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)], \\ k_p^{k2} &= 2d_{31}^k(\gamma)/\varepsilon_{33}^{kT}S_{11}^k(\gamma)[1 - \nu^k(\gamma)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим первый случай расположения электродов: между пассивным и пьезоактивными слоями нанесены бесконечно тонкие электроды. Такие же электроды имеются и на внешних поверхностях оболочки. К каждому из слоев приложена изменяющаяся по гармоническому закону разность потенциалов $V_k^0 \cos \omega t$, $k=0, 1, 2$. Согласно [17], индукция D_γ^k постоянна по толщине пьезослоев, так что

$$D_\gamma^k = C^k(\alpha, \beta). \quad (3)$$

При этом

$$E_\gamma^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \{ C^k - \gamma_{31}^k(\gamma)[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)] \}. \quad (4)$$

Интегрируя выражение (4) по толщине пьезослоев, имеем

$$\begin{aligned} C^k &= \frac{1}{v_0^k} [-V_k^0 + v_1^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + v_2^k(\kappa_1 + \kappa_2)], \\ &k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в формулу (4), а полученное выражение для E_γ^k – в уравнения (1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^k &= B_{11}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) + \sigma_0^k, \\ \sigma_\beta^k &= B_{12}^k(\gamma)(\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + \\ &+ B_{22}^k(\gamma)(\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) + \sigma_0^k, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma)(\varepsilon_{12} + \gamma\kappa_{12}), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0^k &= \frac{\gamma_{31}^k}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \left\{ \left[\gamma_{31}^k(\gamma) - \frac{v_1^k}{v_0^k} \right] (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \right. \\ &\left. + \left[\gamma_{31}^k(\gamma) - \frac{v_2^k}{v_0^k} \right] (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{V_0^k}{v_0^k} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (6) по толщине оболочки, учитывая расположение электродов и считая $\dot{V}_0 = 0$, получаем определяющие уравнения для трехслойной пьезооболочки:

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \\ &\quad + K_{11}\kappa_1 + K_{12}\kappa_2 + \overset{\circ}{N}, \\ N_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + \\ &\quad + K_{12}\kappa_1 + K_{22}\kappa_2 + \overset{\circ}{N}, \\ M_1 &= K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + \\ &\quad + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + \overset{\circ}{M}, \\ M_2 &= K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + \\ &\quad + D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + \overset{\circ}{M}, \\ S &= C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}\kappa_{12}, \\ H &= K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}\kappa_{12}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{N} &= \frac{v_1}{v_0} V_0^1 + \frac{v_2}{v_0} V_0^2; \quad \overset{\circ}{M} = \frac{v_1}{v_0} V_0^1 + \frac{v_2}{v_0} V_0^2; \\ (C_{66}, K_{66}, D_{66}) &= \int_{(h)} B_{66}(\gamma) \cdot (1, \gamma, \gamma^2) d\gamma; \\ C_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) d\gamma + \overset{1}{v_3} + \overset{2}{v_3} - \frac{v_1^2}{v_0} - \frac{v_2^2}{v_0}; \\ K_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma + \overset{1}{v_4} + \overset{2}{v_4} - \frac{v_1 v_2}{v_0} - \frac{v_1^2 v_2}{v_0^2}; \\ D_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma + \overset{1}{v_5} + \overset{2}{v_5} - \frac{v_2^2}{v_0} - \frac{v_2^2}{v_0^2}; \\ &\quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} v_0^k &= \int_{(hk)} \frac{1}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\ v_{(1,2)}^k &= \int_{(hk)} \frac{\gamma_{31}^k \cdot (1, \gamma)}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\ v_{(3,4,5)}^k &= \int_{(hk)} \frac{\gamma_{31}^{k2} \cdot (1, \gamma, \gamma^2)}{\gamma_{33}^k} d\gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим второй случай, когда между пассивным диэлектрическим и пьезоактивными слоями электроды отсутствуют. К внешним электродам подведена разность потенциалов $\overset{\circ}{V} \cos \omega t$. Тогда нормальная составляющая индукции постоянна по всей толщине оболочки:

$$D_\gamma^k = C(\alpha, \beta). \tag{10}$$

При этом

$$E_\gamma^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k(\gamma)} (C - \gamma_{31}^k(\gamma)) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)]. \tag{11}$$

Интегрируя уравнение (11) по толщине оболочки h , находим

$$C = \frac{1}{v_0} \left[-\overset{\circ}{V} + v_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + v_2(\kappa_1 + \kappa_2) \right]. \tag{12}$$

Подставляя выражение (12) в формулу (11), а полученное выражение для E_γ^k - в уравнения (1), приходим к соотношениям типа (6), однако

$$\begin{aligned} \sigma_0^k &= \frac{\gamma_{31}^k}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \left\{ \left[\gamma_{31}^k(\gamma) - \frac{v_1}{v_0} \right] (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \right. \\ &\left. + \left[\gamma_{31}^k(\gamma) - \frac{v_2}{v_0} \right] (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{V_0^k}{v_0} \right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Интегрируя выражение (6) по толщине оболочки, получаем определяющие уравнения для трехслой-

ной пьезооболочки вида (7), где

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{N} &= \frac{v_1}{v_0} \overset{\circ}{V}; & \overset{\circ}{M} &= \frac{v_2}{v_0} \overset{\circ}{V}; \\ (C_{66}, K_{66}, D_{66}) &= \int_{(h)} B_{66} \cdot (1, \gamma, \gamma^2) d\gamma; \\ C_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) d\gamma + v_3 - \frac{v_1^2}{v_0}; \\ K_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma + v_4 - \frac{v_1 v_2}{v_0}; \\ D_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma + v_5 - \frac{v_2^2}{v_0}; \\ & i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

В уравнениях (13) и (14)

$$\begin{aligned} v_0 &= \int_{(h)} \frac{1}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\ v_{(1,2)} &= \int_{(h)} \frac{\gamma_{31}^k \cdot (1, \gamma)}{\gamma_{33}^k} d\gamma; \\ v_{(3,4,5)} &= \int_{(h)} \frac{\gamma_{31}^{k^2} \cdot (1, \gamma, \gamma^2)}{\gamma_{33}^k} d\gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

Для случая пьезоактивных слоев, имеющих одинаковую толщину, одинаковые электромеханические свойства и противоположные направления поляризации $\overset{2}{\gamma}_{31} = -\overset{1}{\gamma}_{31}$ ($\overset{1}{\gamma}_{31} \geq 0$), получаем следующие выражения для электромеханических характеристик уравнений состояния:

- 1) при наличии электродов между пассивным и пьезоактивными слоями, к которым подведены разности потенциалов $\overset{\circ}{V}_1 = \overset{\circ}{V}_2 = \overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{V}_0 = 0$,

$$\begin{aligned} C_{ij} &= h_0 \overset{\circ}{B}_{ij} + 2h_1 \overset{1}{B}_{ij}, \\ D_{ij} &= \tilde{D}_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\overset{1^2}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} h_1 (h_1 + h_0)^2, \\ \overset{\circ}{M} &= \overset{1}{\gamma}_{31} (h_1 + h_0) \overset{\circ}{V}, \\ K_{ij} &= 0, & \overset{\circ}{N} &= 0; \end{aligned} \quad (16)$$

- 2) при отсутствии электродов

$$\begin{aligned} C_{ij} &= h_0 \overset{\circ}{B}_{ij} + 2h_1 \left(\overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{1^2}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right), \\ D_{ij} &= \tilde{D}_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\overset{1^2}{\gamma}_{31}}{\overset{\circ}{\gamma}_{33}} \frac{h_1^2 (h_0 + h_1)^2 \overset{\circ}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{\circ}{\gamma}_{33}}, \\ \overset{\circ}{M} &= \frac{\overset{1}{\gamma}_{31} h_1 (h_0 + h_1) \overset{\circ}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{\circ}{\gamma}_{33}} \overset{\circ}{V}_0, \\ K_{ij} &= 0, & \overset{\circ}{N} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij} &= \frac{h_0^3}{12} \overset{\circ}{B}_{ij} + \left(\frac{2}{3} \overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{1^2}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right) \times \\ & \times \left[\left(\frac{h_0}{2} + h_1 \right)^3 - \left(\frac{h_0}{2} \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

Если же пьезоактивные слои имеют одинаковые толщины, одинаковые свойства и одинаковую поляризацию ($\overset{1}{\gamma}_{31} = \overset{2}{\gamma}_{31}$), характеристики пьезооболочки определяются по следующим формулам:

- 1) при наличии электродов между пассивным и пьезоактивными слоями

$$\overset{\circ}{N} = 2\overset{1}{\gamma}_{31} \overset{\circ}{V}_1, \quad \overset{\circ}{M} = 0, \quad (18)$$

а C_{ij}, K_{ij}, D_{ij} имеют вид (16);

- 2) при отсутствии электродов

$$\begin{aligned} C_{ij} &= h_0 \overset{\circ}{B}_{ij} + 2h_1 \left(\overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{1^2}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right) - \\ & - 4 \frac{\overset{1^2}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \frac{h_1^2 \overset{\circ}{\gamma}_{33} \overset{1}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{\circ}{\gamma}_{33}}, \\ \overset{\circ}{N} &= 2 \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \frac{h_1^2 \overset{\circ}{\gamma}_{33} \overset{1}{\gamma}_{33}}{h_0 \overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1 \overset{\circ}{\gamma}_{33}} \overset{\circ}{V}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$D_{ij} = \tilde{D}_{ij}, \quad K_{ij} = 0, \quad \overset{\circ}{M} = 0.$$

Как видно из представленных выше формул, наличие или отсутствие электродов между пассивным и пьезоактивными слоями влияет на жесткостные характеристики оболочки и электрическую нагрузку.

Из определяющих уравнений (7) видно, что по форме они совпадают с определяющими уравнениями термоупругости оболочек, хотя и описывают совершенно другой физический процесс. Эта формальная аналогия позволяет перенести многие из результатов, полученных в термоупругости оболочек, на задачи о колебаниях пьезооболочек.

Остальные уравнения – кинематические соотношения и уравнения движения (линейные или нелинейные), а также граничные условия – носят универсальный характер, не зависящий от определяющих уравнений, и имеют известный из теории оболочек вид [15, 16]. Для вязкоупругого материала они представлены в статьях [10, 11]. Для такого материала в приведенных выше соотношениях (7) необходимо операцию умножения заменить оператором Вольтерра [9]. При определении границ ОДН следует воспользоваться линеаризованными соотношениями [10, 11]. В дальнейшем они будут конкретизированы при рассмотрении задачи о параметрических колебаниях цилиндрической пьезооболочки.

При оценке влияния типа электрических граничных условий на параметрические колебания при механическом периодическом нагружении необходимо получить определяющие уравнения для двух крайних случаев: когда электроды закорочены и когда они разомкнуты. В первом случае при наличии электродов между пассивными и пьезоактивными слоями жесткостные характеристики определяются по формулам (16) и (18), в которых следует положить $\overset{\circ}{V}_k = 0$, ($k=0, 1, 2$), а при их отсутствии – по формулам (19). Во втором случае при выводе определяющих соотношений для трехслойной пьезооболочки необходимо положить $\overset{k}{D}_\gamma = 0$ при наличии электродов и $C(\alpha, \beta) = 0$ при их отсутствии. В обоих случаях это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} K_{ij} &= 0, \\ C_{ij} &= h_0 \overset{\circ}{B}_{ij} + 2h_1 \left(\overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}^2}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right), \\ D_{ij} &= \frac{h_0^3}{12} \overset{\circ}{B}_{ij} + \frac{2}{3} \left(\overset{1}{B}_{ij} + \frac{\overset{1}{\gamma}_{31}^2}{\overset{1}{\gamma}_{33}} \right), \times \\ &\times \left[\left(\frac{h_0}{2} + h_1 \right)^3 - \left(\frac{h_0}{2} \right)^3 \right], \\ i, j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

2. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДН ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим случай периодического механического или электрического нагружения пьезоэлектрических трехслойных оболочек вращения. Предполагаем, что докритическое электромеханическое состояние может быть найдено с использованием безмоментной квазистатической теории. Заметим, что используемый в дальнейшем метод конечных элементов позволяет без особых затруднений рассчитывать ОДН и для моментного докритического состояния. С использованием результатов, представленных в монографии [2], для рассмотренных случаев определяющих уравнений докритического состояния легко может быть найдено аналитически для общего случая оболочек вращения. При расчете моментного докритического состояния следует использовать МКЭ. В работах [10, 11] представлены нелинейные и линеаризованные уравнения для вязкоупругих пьезоэлектрических оболочек вращения. Последние из них дают информацию об ОДН. Как известно, учет вязкости приводит к нереальным минимальным значениям параметра возбуждения для главных ОДН [2]. Поэтому основной интерес при исследовании параметрических колебаний представляют главные ОДН. В дальнейшем ограничимся расчетом главных ОДН, на границах которых реализуется периодическое движение, когда перемещения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u_i &= u'_i(\alpha, \beta) \cos \frac{\omega}{2} t + u''_i(\alpha, \beta) \sin \frac{\omega}{2} t, \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив выражения (21) в линеаризованные уравнения параметрических колебаний, получим две независимые системы дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями. Параметр возбуждения входит в эти системы с разными знаками. Решая для каждой из них задачу на собственные значения для различных значений параметра возбуждения, получаем границы главной ОДН. Ранее такая методика была использована в [5]. При этом задачи на собственные значения решались методом дискретной ортогонализации. Использование МКЭ существенно расширяет возможности такого подхода, позволяя, например, находить границы областей динамической неустойчивости незамкнутых оболочек вращения при сложных типах граничных условий.

Для решения задачи о параметрических колебаниях оболочек вращения МКЭ используем линейризованное относительно некоторого докритического состояния вариационное уравнение

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (22)$$

В последнем соотношении функционал имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int_F \left[C_{11} \varepsilon_\alpha^2 + 2K_{11} \varepsilon_\alpha \kappa_\alpha + 2D_{11} \kappa_\alpha^2 + \right. \\ & + 2C_{12} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + 2K_{12} (\varepsilon_\alpha \kappa_\beta + \varepsilon_\beta \kappa_\alpha) + \\ & + 2D_{12} \kappa_\alpha \kappa_\beta + C_{22} \varepsilon_\beta^2 + 2K_{22} \varepsilon_\beta \kappa_\beta + \\ & + D_{22} \kappa_\beta^2 + 2C_{66} \varepsilon_{\alpha\beta}^2 + 4K_{66} \varepsilon_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + \\ & + 2D_{66} \kappa_{\alpha\beta}^2 + 2\tilde{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w \right) + \\ & \left. + (\overset{\circ}{N}_\alpha \zeta_\alpha^2 + \overset{\circ}{N}_\beta \zeta_\beta^2 + \overset{\circ}{N}_{\alpha\beta} \zeta_\alpha \zeta_\beta) \right] dF, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1}; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} u + \frac{w}{R_2}; \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} v \right); \\ \kappa_\alpha &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \\ \kappa_\beta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r R_2} v; \\ \zeta_\alpha &= -\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}; \\ \zeta_\beta &= -\frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{v}{R_2}; \\ \tilde{\rho} &= h_0 \rho^0 + 2h_1 \rho^1; \end{aligned}$$

R_1, R_2 – радиусы главных кривизн поверхности оболочки; θ – угол между нормалью к поверхности и осью вращения; $\beta = r\varphi$ – окружная координата. Уравнения (22), (23) дают уравнения движения в перемещениях для оболочки, предварительно нагруженной усилиями $\overset{\circ}{N}_\alpha, \overset{\circ}{N}_\beta, \overset{\circ}{N}_{\alpha\beta}$.

Широкое практическое применение при исследовании параметрических колебаний получила техническая теория оболочек [15], согласно которой в соотношениях для кривизн и углов поворота следует сохранять лишь слагаемые, содержащие нормальное перемещение. Для решения вариационной задачи (22), (23) используем вариант МКЭ, изложенный в работах [18, 19]. Разобьем поверхность оболочки $\gamma = 0$ n узловыми точками на m четырехугольных двенадцатиузловых изопараметрических элементов. При этом прогиб оболочки в пределах элемента аппроксимируется бикубическими полиномами Эрмита

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)_i + \\ & + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_i \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \varphi \partial \alpha} \right)_i, \end{aligned} \quad (24)$$

а тангенциальные составляющие перемещений и геометрические параметры – Сирендиповыми полиномами третьей степени

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{12} S_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{12} S_i v_i, \\ \alpha &= \sum_{i=1}^{12} S_i \alpha_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{12} S_i \varphi_i. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $w_i, u_i, \dots, \varphi_i$ – соответственно значения перемещений, производных и координат в узловых точках; L_i, S_i – аппроксимирующие функции, приведенные в [18, 19]. Из соотношений (24), (25) следует, что рассматриваемый элемент имеет 40 степеней свободы. Аппроксимируя усилия $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ кубическими полиномами S_i и подставляя выражения (24), (25) в вариационное уравнение (22), для определения компонент вектора перемещений получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций времени в матричном виде:

$$\begin{aligned} M \ddot{U}(t) + KU(t) + \\ + (N_\alpha^n P_\alpha + N_\beta^n P_\beta + N_{\alpha\beta}^n P_{\alpha\beta}) U(t) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Матрицы $M, K, P_\alpha, P_\beta, P_{\alpha\beta}$ являются симметричными и имеют ленточную структуру, характерную для МКЭ. Входящие в соотношения (26) значения усилий $N_\alpha^n, N_\beta^n, N_{\alpha\beta}^n$ в соответствующих узловых точках – периодические функции с периодом ω . Представление решения в виде выражений (24)–(26) позволяет задачу определения главных ОДН для случая, когда

$N_\alpha^n = N_\beta^n = N^0 + N^1 \cos \omega t$, $N_{\alpha\beta}^n = 0$, свести к решению обобщенной задачи на собственные значения:

$$\left[K - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 M + (N^0 \pm \frac{N_1}{2})(P_\alpha + P_\beta) \right] \times \tilde{U} \left(w, u, \dots, \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) = 0. \quad (27)$$

Детальный анализ методов решения конечно-элементных задач на собственные значения приведен в [20]. В данной работе для вычисления собственных чисел и собственных векторов используется алгоритм, основанный на методе хорд.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ОДН ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

При расчете главных ОДН прямоугольной в плане цилиндрической пьезопанели $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ симметричной по толщине структуры будем исходить из технической теории оболочек. Эта теория широко используется в механике оболочек при исследовании параметрических колебаний [3, 15, 16]. Рассмотрим две задачи:

- 1) задачу о параметрических колебаниях цилиндрической пьезопанели, возбуждаемой подведенной к электродам разностью потенциалов $\overset{\circ}{V} \cos \omega t$;
- 2) задачу о параметрических колебаниях той же панели, возбуждаемой механической нагрузкой, при закороченных и разомкнутых электродах.

В первом случае будем считать, что на торцах оболочки заданы нулевые перемещения. При этом для всех рассмотренных случаев размещения электродов докритическое состояние определяется по формуле

$$\overset{\circ}{N}_1 = \overset{\circ}{N}_2 = \overset{\circ}{N}. \quad (28)$$

Если же торцы $y=0$, $y=b$ свободны, то безмоментное докритическое состояние определяется соотношениями

$$\overset{\circ}{N}_1 = \left(1 - \frac{C_{11}}{C_{12}} \right) \overset{\circ}{N}, \quad \overset{\circ}{N}_2 = 0. \quad (29)$$

При механическом нагружении на торцах оболочки заданы изменяющиеся по гармоническому закону усилия $\overset{\circ}{N}_1, \overset{\circ}{N}_2$ (пусть $\overset{\circ}{N}_1 = \overset{\circ}{N}_2 = \overset{\circ}{N}$). Как при электрическом, так и при механическом нагружении будем считать, что для двухосного нагружения

$$\overset{\circ}{N} = N^0 + N^1 \cos \omega t,$$

а для одноосного –

$$\overset{\circ}{N}_1 = N^0 + N^1 \cos \omega t.$$

Согласно технической теории, уравнения движения и неразрывности деформаций имеют вид [3, 6, 15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \\ \frac{N_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \tilde{N} - \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Здесь для двухосного нагружения

$$\tilde{N} = \overset{\circ}{N} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (31)$$

а для одноосного –

$$\tilde{N} = \overset{\circ}{N}_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (32)$$

Введением функции усилий Φ такой, что

$$N_1 = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_2 = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (33)$$

тождественно удовлетворяются первые два уравнения (30). Разрешив уравнения состояния (7) относительно деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$, с использованием соотношений (33), из уравнений (30) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \left(D_{12} + D_{66} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \tilde{N} + \tilde{\rho} \ddot{w} &= 0, \\ A_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2 \left(A_{12} + A_{66} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{hR} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$A_{11} = \frac{C_{22}}{\Delta}; \quad A_{12} = \frac{C_{12}}{\Delta};$$

$$A_{22} = \frac{C_{11}}{\Delta}; \quad A_{66} = \frac{1}{C_{66}};$$

$$\Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Для шарнирного закрепления краев

$$\begin{cases} w = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ v = 0, & \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, a, \quad (35)$$

$$\begin{cases} w = 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ u = 0, & \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{при } y = 0, b.$$

Эти условия тождественно удовлетворяются при выборе решения в виде

$$w = w_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \quad (36)$$

$$\Phi = \Phi_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y,$$

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad p_n = \frac{n\pi}{b}.$$

Подставив выражения (36) в соотношения (34), получим уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \ddot{w}_{mn}(t) + [p_{mn} - \overset{\circ}{N}_{mn}(t)]w_{mn}(t) + \\ + \frac{hk_m^2}{R} \Phi_{mn}(t) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$k_{mn} \Phi_{mn} - \frac{k_m^2}{hR} w_{mn} = 0,$$

где

$$k_{mn} = A_{11}k_m^4 - 2(A_{12} + A_{66})k_m^2 p_n^2 + A_{22}p_n^4; \quad (38)$$

$$p_{mn} = D_{11}k_m^4 - 2(D_{12} + D_{66})k_m^2 p_n^2 + D_{22}p_n^4.$$

При этом для двухосного нагружения

$$\overset{\circ}{N}_{mn} = \overset{\circ}{N}_1 N_{mn}, \quad N_{mn} = k_m^2 + p_n^2, \quad (39)$$

а для одноосного –

$$\overset{\circ}{N}_{mn} = \overset{\circ}{N} N_{mn}, \quad N_{mn} = k_m^2. \quad (40)$$

Исключая Φ_{mn} из второго уравнения (37) и подставляя его в первое из (37), получаем уравнение Матье:

$$\ddot{w} + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos \omega t) w_{mn} = 0. \quad (41)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_{mn}^2 &= \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{N^0}{N_{kr}}\right); \\ \omega_{mn}^2 &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(p_{mn} + \frac{k_m^4}{R^2 k_{mn}}\right); \\ N_{kr} &= \frac{1}{N_{mn}} \left(p_{mn} + \frac{k_m^4}{R^2 k_{mn}}\right); \\ \mu_{mn} &= \frac{N^1}{2(N_{kr} - N^0)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Главная ОДН сосредоточена в окрестности частоты

$$\omega_{mn} = 2\Omega_{mn}, \quad (43)$$

где Ω_{mn} – собственная частота изгибных колебаний с учетом влияния начальных усилий N^0 .

Использование асимптотических методов нелинейной механики приводит к следующему выражению для главной ОДН:

$$\omega_{mn} = 2\Omega_{mn} (1 \pm \mu_{mn})^{\frac{1}{2}}. \quad (44)$$

При других типах граничных условий не удается получить столь простое решение. В этом случае используем следующий подход. Как известно [2], с достаточно высокой точностью можно считать, что главная ОДН ограничена периодическими решениями вида

$$w = w_1(x, y) \cos \frac{\omega t}{2} + w_2(x, y) \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (45)$$

$$\Phi = \Phi_1(x, y) \cos \frac{\omega t}{2} + \Phi_2(x, y) \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (34) и приравнявая коэффициенты при $\cos \omega t/2$, $\sin \omega t/2$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \tilde{\rho} \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 w_1 = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} + 2(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + A_{22} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} + \frac{1}{hR} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Табл. 1. Сравнение аналитического и конечно-элементного решений

$h_0 \times 10^2$	m, n	Аналитическое решение		Решение МКЭ	
		$\Omega \cdot 10^3, \text{ Гц}$	$N_k \cdot 10^{-5}, \text{ Н/м}$	$\Omega \cdot 10^3, \text{ Гц}$	$N_k \cdot 10^{-5}, \text{ Н/м}$
0.00	1,1	1,3604	39.2045	1.3604	39.2046
	1,2	0,5739	2.8702	0.5739	2.8703
	1,3	0.3808	0.6378	0.3808	0.6378
	1,4	0.4637	0.5587	0.4638	0.5587
	1,5	0.6695	0.7629	0.6695	0.7630
0.05	1,1	1.5076	38.0672	1.5076	38.0673
	1,2	0.6355	2.7822	0.6355	2.7823
	1,3	0.4186	0.6096	0.4186	0.6096
	1,4	0.5061	0.5260	0.5061	0.5260
	1,5	0.7292	0.7155	0.7292	0.7156
0.10	1,1	1.7316	36.9230	1.7316	36.9231
	1,2	0.7294	2.6957	0.7295	2.6958
	1,3	0.4785	0.5856	0.4785	0.5856
	1,4	0.5757	0.5006	0.5758	0.5007
	1,5	0.8287	0.6795	0.8288	0.6796
0.15	1,1	2.1305	35.7684	2.1305	35.7683
	1,2	0.8964	2.6050	0.8965	2.6050
	1,3	0.5820	0.5542	0.5820	0.5542
	1,4	0.6921	0.4628	0.6921	0.4628
	1,5	0.9931	0.6243	0.9932	0.6244

При шарнирном закреплении оболочки граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} w_1 = 0, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \\ v_1 = 0, & \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0, a, \quad (47)$$

$$\begin{cases} w_1 = 0, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0, \\ u_1 = 0, & \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{при } y = 0, b.$$

В уравнениях (46) для двухосного нагружения

$$\tilde{N} = \left(N^0 + \frac{N^1}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (48)$$

а для одноосного –

$$\tilde{N} = \left(N^0 + \frac{N^1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (49)$$

Аналогичная система уравнений получается и для $w_2(x, y), \Phi_2(x, y)$, при этом в соотношениях (46)–(49) следует заменить $N^0 + N^1/2$ на $N^0 - N^1/2$.

При фиксированном значении параметра возбуждения частотная ширина главной ОДН определя-

$$\Delta\omega = 2\Omega[(1 + \mu)^{\frac{1}{2}} - (1 - \mu)^{\frac{1}{2}}]. \quad (50)$$

Для других видов закрепления торцов граничные условия имеют стандартный вид.

Таким образом, определение областей динамической неустойчивости сводится к решению двух задач на собственные значения при различных значениях параметров N^0 и N^1 .

4. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Получим аналитическое решение задачи (46), (47) для w_1 и аналогичное решение для w_2 . В обоих случаях решение выбирается в виде (45). Подставляя выражения (36) в уравнения (46), находим связь между частотой параметрических колебаний ω_{mn} , собственной частотой изгибных колебаний Ω_{mn} и параметром возбуждения μ_{mn} , определяющую границы главной ОДН. Легко проверить, что это соотношение совпадает с выражением (44). Таким образом, при шарнирном закреплении торцов оболочки решение краевой задачи с точностью до $O(\mu^2)$

совпадает с аналитическим решением (44), полученным асимптотическим методом. Из общих соображений следует, что такой же результат будет иметь место и при других граничных условиях, поскольку в разложении (45) удерживается одна гармоника. С целью оценки точности предлагаемого варианта МКЭ рассмотрим задачу определения ОДН шарнирно опертой трехслойной незамкнутой цилиндрической оболочки. Оболочка составлена из двух одинаково поляризованных внешних пьезоэлектрических слоев и внутреннего электропроводящего слоя. Если к внешним пьезоэлектрическим слоям подведена разность потенциалов $V = V_0 \cos \omega t$, то $N^0 = 0$, а $N^1 = 2V_0 \gamma_{31}$. В табл. 1 приведены значения пяти изгибных частот $\Omega_{mn} = \omega_{mn}/2$ и критических сил N_k для различных толщин внутреннего слоя, полученных в результате аналитического решения и вычисленных с помощью МКЭ.

Как видно из таблицы, значения характеристик ОДН, найденные различными методами, хорошо согласуются между собой, что свидетельствует о достаточной точности разработанного варианта МКЭ. В табл. 2 представлены значения критических частот ω' и ω'' свободно опертой слоистой панели ($h = 0.0005$ м) для различных значений нагрузок N^1 , действующих в двух направлениях.

Расчеты проводились для оболочки, составленной из одинаково поляризованных внешних слоев пьезокерамики типа ЦТСтБС-2 и внутреннего дюралюминиевого слоя со следующими характеристиками и геометрическими параметрами:

$$d_{31} = -1.6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/Н},$$

$$S_{11} = 12.5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad S_{12} = 4.2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н},$$

$$\varepsilon_{33} = 21000 \varepsilon^0, \quad \varepsilon^0 = 8.454 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

$$E_a = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu_a = 0.34,$$

$$\rho_1 = 7500 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_a = 2790 \text{ кг/м}^3,$$

$$a = 0.3 \text{ м}, \quad R = 0.2 \text{ м}, \quad h = 0.0015 \text{ м},$$

$$\varphi = \pi/2, \quad b = \varphi R.$$

Как видно из табл. 2, характеристики ОДН оболочки с указанными электрическими граничными условиями существенно различаются между собой, что свидетельствует об их заметном влиянии на ОДН.

В качестве второго примера использования предлагаемого подхода рассмотрим задачу о параметрических колебаниях слоистой панели с жестко заземленными краями. На рис. 1 показано из-

Табл. 2. Влияние электрических граничных условий на границы главной ОДН

$N \times 10^{-5}$, Н/м	Закороченные электроды		Разомкнутые электроды	
	ω' кГц	ω'' кГц	ω' кГц	ω'' кГц
0.00	0.8373	0.8373	0.9151	0.9151
0.05	0.8543	0.8199	0.9306	0.8992
0.10	0.8709	0.8022	0.9460	0.8831
0.15	0.8873	0.7841	0.9611	0.8666
0.20	0.9034	0.7655	0.9754	0.8499
0.25	0.9191	0.7465	0.9905	0.8328
0.30	0.9346	0.7270	1.0049	0.8154
0.35	0.9499	0.7069	1.0191	0.7975
0.40	0.9649	0.6863	1.0331	0.7793
0.45	0.9797	0.6651	1.0469	0.7606
0.50	0.9942	0.6431	1.0606	0.7415

менение минимальной изгибной частоты и минимального критического усилия в зависимости от толщины среднего слоя. Кривые 1, 2 соответствуют решению задачи для свободно опертой оболочки, кривые 3, 4 – решению для оболочки с жестко заземленными торцами. Как видно из формул (43), (44), главная ОДН упирается своим острием в точку, совпадающую с удвоенным значением минимальной изгибной частоты. Поэтому из анализа кривых 1, 3 следует, что с изменением толщины среднего слоя имеет место существенный сдвиг главной ОДН по частотной оси как для шарнирного, так и для жесткого закрепления торцов оболочки.

Главные ОДН слоистой панели со свободно опертыми (кривые 1) и с жестко заземленными краями (кривые 2) изображены на рис. 2. Здесь по оси абсцисс отложены значения критической частоты возбуждения, а по оси ординат – безразмерный параметр μ . Как видно из рис. 2, ширина ОДН оболочки с жестко заземленными краями значительно превосходит ширину ОДН шарнирно опертой панели.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена постановка задачи о параметрических колебаниях трехслойной упругой пьезооболочки вращения, составленной из среднего пассивного ортотропного диэлектрического или металлического слоя и двух пьезоактивных слоев, между которыми могут быть размещены бесконечно тонкие электроды. Для расчета глав-

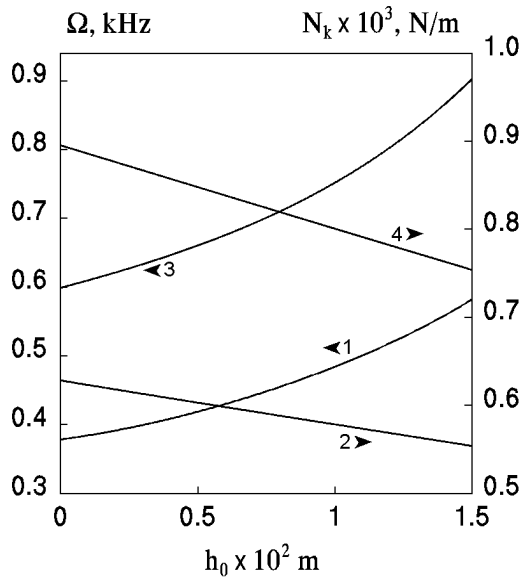


Рис. 1. Зависимость минимальной частоты (1, 3) изгибных колебаний и минимального критического усилия (2, 4) от толщины среднего слоя: 1, 2 – свободно опертые торцы, 3, 4 – жестко защемленные торцы

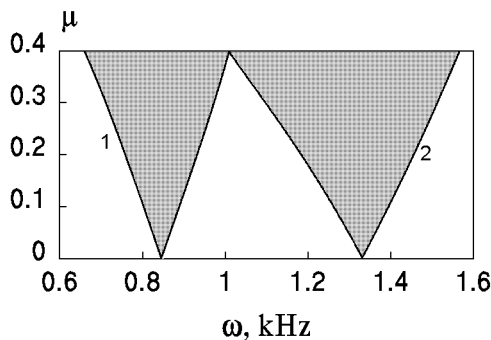


Рис. 2. Главные ОДН цилиндрической оболочки: 1, 2 – свободно опертые торцы, 3, 4 – жестко защемленные торцы

ной области динамической неустойчивости (ОДН) предложена упрощенная методика, основанная на определении методом конечных элементов собственных частот изгибных колебаний с учетом предварительного нагружения растягивающей и сжимающей силой.

При шарнирном закреплении торцов цилиндрической пьезопанели получено аналитическое решение для различных случаев расположения электродов. Дано сопоставление аналитических и конечно-элементных решений, свидетельствующее о высокой точности рассмотренного варианта метода конечных элементов.

Исследовано влияние электрических граничных условий на границы главной области динамической неустойчивости параметрических колебаний цилиндрической пьезопанели при ее механическом нагружении. При этом рассмотрены два крайних случая: замкнутые и разомкнутые электроды. Проведенные расчеты характеристик ОДН для шарнирно и жестко закрепленных торцов пьезопанели показывают существенное влияние механических граничных условий на их параметры.

Известно, что для пьезоэлектрических материалов критическое значение напряженности электрического пробоя превосходит значения напряженности электрического поля, при котором имеют место параметрические колебания. Следовательно, работоспособность пьезооболочки может быть потеряна в результате возникновения таких колебаний.

1. Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композиционных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. Механика композитов: в двенадцати томах. Том 9. Динамика элементов конструкций / Кубенко В. Д. и др. – К.: АСК, 1999. – 384 с.
6. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща школа, 1989. – 208 с.
7. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи колебаний тонкостенных оболочек (Обзор) // Прикл. мех. – 1998. – 34, N 8. – С. 3–31.
8. Popov A. A., Thompson J. M. T., McRobic F. A. Low dimensional models of shell vibrations. Parametrically excited vibrations of cylindrical shells // J. Sound Vib. – 1998. – 209, N 1. – P. 163–186.
9. Механика связанных полей в элементах конструкций: в пяти томах. Том 4. Электротермовязкоупругость / Карнаухова В. Г., Киричок И. Ф. – К.: Наук. думка, 1988. – 320 с.
10. П'ятецький В. О., Карнаухова О. В. Параметричні коливання тонкостінних елементів з п'єзоелектричних матеріалів // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – С. 136–146.
11. П'ятецький В. О., Карнаухова О. В. Параметричні коливання тонкостінних елементів з в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. наук. – Київ, 1996. – С. 77–88.
12. П'ятецький В. О., Карнаухова О. В. Исследование параметрических колебаний вязкоупругого пьезоэлектрического стержня с учетом геометрической нелинейности // Прикл. мех. – 1998. – 34, N 11. – С. 92–96.

13. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Review.- 1994.- **47**, N 4.- P. 113-123.
14. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Review.- 1998.- **51**, N 8.- P. 505-521.
15. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1960.- 266 с.
16. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1974.- 446 с.
17. Механика связанных полей в элементах конструкций: в пяти томах. Том 5. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.- К.: Наук. думка, 1989.- 280 с.
18. Рассказов А. О., Козлов А. В. Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочки вращения при неосесимметричном нагружении // Прикл. мех.- 1998.- **34**, N 5.- С. 68-75.
19. Bhimaraddi A., Carr A. J., Moss P. T. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // Comput. Struct.- 1989.- **31**, N 3.- P. 299-308.
20. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.- М.: Стройиздат, 1982.- 448 с.