ISSN 1028-7507 *Акустичний вісник. 2000. Том 3, N 4. С. 64 – 71*

УДК 537.84

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Л. Л. Р О Ж К О, И. Е. Т А Р А П О В

Харьковский национальный университет

Получено 15.06.2000

Получена полная система уравнений, описывающих распространеие малых возмущений в покоящейся среде переменной массы, находящейся в термодинамически неравновесном состоянии (интенсивность однородных источников массы зависит от времени) и взаимодействующей с электромагнитным полем. При зависимости намагниченности среды от поля состояние среды с неподвижными источниками массы неустойчиво в поперечном поле. Найдено в классе монотонных функций такое распределение источников массы, при котором в продольном поле политропный газ будет устойчивым.

Одержана повна система рівнянь, які описують поширення малих збурень у середовищі змінної маси, що перебуває в спокої, не зберігає термодинамічної рівноваги (інтенсивність однорідних джерел маси залежить від часу), а також взаємодіє з електромагнітним полем. У разі залежності намагніченості середовища від поля стан середовища з нерухомими джерелами маси втрачає стійкість у поперечному полі. Знайдено у класі монотонних функцій такий розподіл джерел маси, у разі якого у поздовжньому полі політропний газ буде стійким.

The complete system of equations describing the propagation of small perturbations in the variable mass medium being in rest, not keeping a thermodynamic equilibrium (the mass sources intesity depends on time), and interacting with electromagnetic field. In the case when magnetization of medium depends on the field the medium with motionless mass sources loses the stability in transversal field. It is found such the mass sources distribution in class of monotonous functions, for which in longitudinal field a polytropic gas will be stable.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследовано распространение звуковых волн по покоящейся невязкой сжимаемой среде с непрерывно распределенными источниками массы, находящейся в неравновесном состоянии. В [2] обсуждаются плоские звуковые волны в идеальной ненамагничивающейся среде переменной массы, сохраняющей термодинамическое и механическое равновесие. В данной статье рассматривается распространение плоских звуковых волн по намагничивающейся среде переменной массы, находящейся в термодинамически неравновесном состоянии.

Эта задача имеет отношение к вопросу устойчивости агрегатного состояния переменной массы, ибо если амплитуда малых возмущений в среде возрастает с течением времени, то состояние среды неустойчиво, и она существовать в таком агрегатном состоянии не может. Рассматриваемая математическая модель может найти приложение при изучении движения многокомпонентных сред. При определенном ходе реакции в результате возникновения дополнительной массы какой-либо компоненты движение среды может потерять устойчивость. При этом оказывается, что на устойчивость существенно влияет наличие электромагнитного поля. Кроме того, она представляет и самостоятельный интерес, поскольку в данной постановке изучается распространение звуковых волн по термодинамически неравновесному состоянию, когда, тем не менее, среда находится в состоянии механического покоя.

1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть исходное состояние сплошной однокомпонентной среды переменной массы с однородным непрерывным распределением источников (стоков) массы, которая может изотропно намагничиваться, является состоянием механического покоя, но не сохраняющим термодинамическое равновесие вследствие наличия механизма обмена массой с другими системами. Такое исходное состояние характеризуется параметрами

$$\vec{v}_0 = 0, \qquad S_0 = 0,$$

$$\vec{B}_0 = \text{const}, \qquad q = q(t),$$

$$\rho_0 = \rho_0(t) = \int\limits_0^t q(\tau)d\tau + \rho_{00},$$

$$P_0 = P_0(\rho_0(t), 0),$$

$$T_0 = T_0(\rho_0(t), 0)$$

и значениями их производных

$$P^0_\rho, \quad P^0_S, \quad T^0_\rho, \quad T^0_S,$$

$$\mu^0_H, \quad \mu^0_\rho, \quad \mu^0_T.$$

Здесь $\vec{v}$ – скорость; S – энтропия; ρ – плотность; P – давление; T – температура; $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции; q – интенсивность источников массы; $\vec{\gamma}$ – интенсивность источников импульса. Чтобы не загромождать формулы, верхний нулевой индекс в последующих записях будем опускать. Считая, что $\vec{\gamma}=\gamma_0 q\vec{v}$, в дальнейшем рассмотрим случаи $\gamma_0=0$ и $\gamma_0=1$.

Исходной для рассмотрения задачи о распространении волн малой амплитуды в изотропно намагничивающейся среде переменной массы является система уравнений МГД-приближения основной системы уравнений гидромеханики намагничивающейся и поляризующейся среды переменной массы [2], которая имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=q,\\
&p=p(\rho,S),\\
&\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+q\vec{v}=\\
&\qquad=-\nabla(p+\Psi^{(p)})+\frac{1}{c}(\vec{j}\times\vec{B})+\\
&\qquad+M\nabla H+\mathrm{div}\hat{\tau}+\vec{\gamma},\\
&\rho T\frac{\partial S^n}{\partial t}+\rho T(\vec{v}\cdot\nabla S^n)+qS^nT=\\
&\qquad=\mathrm{div}(\lambda^0\nabla T)+\tau^i_j\nabla_i v^j+\frac{\nu_m}{4\pi}(\mathrm{rot}\vec{H})^2,\\
&\mathrm{div}\vec{B}=0,\\
&\vec{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\vec{H},\\
&\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{B})-c\,\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{j}}{\sigma}\right),\\
&S^n=S+S^{Э}=S+\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^H\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_{\rho,H}dH=\\
&\qquad=S+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^H\mu_T H\,dH,\\
&\vec{B}=\vec{H}+4\pi\vec{M}(\rho,T,H)\equiv\mu(\rho,T,H)\vec{H}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\vec{j}$ – объемная плотность электрического тока; c – скорость света; $\vec{M}$ – намагниченность; $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля; $\hat{\tau}$ – тензор вязких напряжений; S^n – полная (с учетом влияния электромагнитного поля) энтропия; η_1, η_2 – коэффициенты первой и второй вязкости; λ^0 – коэффициент теплопроводности; μ – магнитная проницаемость; σ – проводимость; ν_m – магнитная вязкость;

$$\nu_m=\frac{c^2}{4\pi\sigma};$$

$$T=T(\rho,S);$$

$$\Psi^\rho\equiv-\rho^2\int\limits_0^H\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{M}{\rho}\right)_{T,H}dH=$$

$$=\int\limits_0^H\left[M-\rho\left(\frac{\partial M}{\partial\rho}\right)_{T,H}\right]dH;$$

$$\vec{M}=M(\rho,T,H)\frac{\vec{H}}{H}\equiv\frac{\mu-1}{4\pi}\vec{H};$$

$$M(\rho,T,H)\equiv\frac{H}{4\pi}(\mu-1);$$

$$\tau^i_j=P^i_j+pg^i_j;$$

$$P_{ij}=-pg_{ij}+\eta_1(\rho,S)(\nabla_i v_j+\nabla_j v_i)+$$

$$+\left(\eta_2-\frac{2}{3}\eta_1\right)g_{ij}\mathrm{div}\vec{v};$$

$\hat{P}$ – тензор гидромеханических напряжений для ньютоновской среды.

Ограничимся рассмотрением плоских волн, когда все переменные зависят только от координаты x и времени t:

$$\rho=\rho_0(t)+\rho'(x,t),$$

$$p=p_0(t)+p'(x,t),$$

$$T=T_0(t)+T'(x,t),$$

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'(x,t),$$

$$S=S'(x,t),$$

$$\vec{v}=\vec{v}'(x,t).$$

При этом квадратами возмущений будем всюду пренебрегать.

Поле $\vec{H}=\vec{B}/\mu(\rho,T,H)$ в среде получит возмущение за счет неоднородности намагниченности, так что в рассматриваемом приближении это возмущение будет линейной функцией ρ', S' и $\vec{B}'$:

$$H'_x=-\frac{B_{x0}l_1}{l_2}\rho'-\frac{B_{x0}\mu_T T_S}{l_2}S'-$$

$$-\frac{\mu_H B_{x0}B_{y0}}{\mu B_0 l_2}B'_y-\frac{\mu_H B_{x0}B_{z0}}{\mu B_0 l_2}B'_z,$$

$$H'_y=-\frac{B_{y0}l_1}{l_2}\rho'-\frac{B_{y0}\mu_T T_S}{l_2}S'+$$

$$+\frac{\mu^2 B_0+\mu_H(B_{x0}^2+B_{z0}^2)}{\mu B_0 l_2}B'_y-\frac{\mu_H B_{y0}B_{z0}}{\mu B_0 l_2}B'_z,$$

$$H'_z=-\frac{B_{z0}l_1}{l_2}\rho'-\frac{B_{z0}\mu_T T_S}{l_2}S'-$$

$$-\frac{\mu_H B_{y0}B_{z0}}{\mu B_0 l_2}B'_y+\frac{\mu^2 B_0+\mu_H(B_{x0}^2+B_{y0}^2)}{\mu B_0 l_2}B'_z,$$

$$l_1=(\mu_\rho+\mu_T T_\rho),\qquad l_2=\mu^2+\mu_H B_0,$$

причем возмущение $B'_x=0$ остается постоянным, что следует из четвертого и шестого уравнений системы (1).

Линеаризация исходной системы уравнений (1) относительно невозмущенного состояния среды приводит к системе семи линейных дифференциальных уравнений для малых возмущений:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+x_{ik}(t)\frac{\partial U_k}{\partial x}=d_{ik}(t)\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2}+$$
$$+b_{ik}(t)U_k+f_i(x,t),\quad i,k=1,2,\dots 7. \qquad (2)$$

Здесь $U_1\equiv\rho'$; $U_2\equiv S'$; $U_3\equiv v'_x$; $U_4\equiv v'_y$; $U_5\equiv v'_z$; $U_6\equiv B'_y$; $U_7\equiv B'_z$, а ненулевые компоненты матриц x_{ik}, d_{ik}, b_{ik} и вектора f_i есть

$$f_2=-\frac{1}{\rho_0 T_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}(S^Э T'+S^Э T_0+S^Э_\rho+S^Э T_\rho),$$

$$b_{22}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t},$$

$$b_{33}=b_4=b_{55}=-\frac{(1-\gamma_0)}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t},$$

$$x_{13}=\rho_0,$$

$$x_{23}=N\{\mu_T\rho_0 m B_0^2 l_1-$$
$$-\mu_T m\mu(B_{y0}^2+B_{z0}^2)-\rho_0(S^Э_\rho+S^Э_T T_\rho)\},$$

$$x_{24}=N\mu m\mu_T B_{x0}B_{y0},$$

$$x_{25}=N\mu m\mu_T B_{x0}B_{z0},$$

$$x_{31}=\frac{1}{\rho_0}(p_\rho+\Psi_\rho^{(\rho)}+\Psi_T^{(\rho)}T_\rho)+$$
$$+m(\mu_\rho+\mu_T T_\rho)\{\rho_0\mu_\rho B_0^2-\mu(B_{y0}^2+B_{z0}^2)\},$$

$$x_{32}=\frac{1}{\rho_0}(p_\rho+\Psi_T^{(\rho)}T_S)+$$
$$+m\{\rho_0\mu_\rho B_0^2-\mu(B_{y0}^2+B_{z0}^2)\}\mu_T T_S,$$

$$x_{36}=mB_{y0}l_3-\rho_0\mu_\rho\mu,$$

$$x_{37}=mB_{z0}l_3-\rho_0\mu_\rho\mu,$$

$$x_{41}=m\mu B_{x0}B_{y0}l_1,$$

$$x_{42}=m\mu B_{x0}B_{y0}B_{z0}\mu_T T_S,$$

$$x_{46}=-mB_{x0}\left(\frac{B_{x0}^2+B_{z0}^2}{B_0}\mu_H+\mu^2\right),$$

$$x_{47}=m\mu_H\frac{B_{x0}B_{y0}B_{z0}}{B_0},$$

$$x_{51}=m\mu B_{x0}B_{z0}l_1,$$

$$x_{52}=m\mu B_{x0}B_{z0}\mu_T T_S,$$

$$x_{56}=m\mu_H\frac{B_{x0}B_{y0}B_{z0}}{B_0},$$

$$x_{57}=-mB_{x0}\left(\frac{B_{x0}^2+B_{y0}^2}{B_0}\mu_H+\mu^2\right),$$

$$x_{63}=B_{y0},$$

$$x_{64}=-B_{x0},$$

$$x_{73}=B_{z0},$$

$$x_{75}=-B_{x0},$$

$$d_{21}=N\left\{\frac{\lambda^0 T_S}{\rho_0 T_0}+4\pi\rho_0\mu^2 m^2\mu_T\nu_m(\mu_\rho+\right.$$
$$\left.+\mu_T T_S)(B_{y0}^2+B_{z0}^2)\right\},$$

$$d_{22}=N\left\{\frac{\lambda^0 T_S}{\rho_0 T_0}+4\pi\rho_0\mu^2 m^2\mu_T\nu_m T_S(B_{y0}^2+B_{z0}^2)\right\},$$

$$d_{26}=-N4\pi\rho_0\mu m^2\mu_T\nu_m B_{y0}l_3,$$

$$d_{27} = -N4\pi\rho_0\mu m^2\mu_T\nu_m B_{z0}l_3,$$

$$d_{33} = \frac{1}{\rho_0}\left(\eta_2 + \frac{4}{3}\eta_1\right),$$

$$d_{44} = d_{55} = \frac{\eta_1}{\rho_0},$$

$$d_{61} = -\frac{\nu_m B_{y0}(\mu_\rho + \mu_T T_S)}{l_2},$$

$$d_{62} = -\frac{\nu_m B_{y0}\mu_T T_S}{l_2},$$

$$d_{66} = \nu_m\left[\frac{\mu^2 B_0 + \mu_H(B_{x0}^2 + B_{z0}^2)}{\mu B_0 l_2}\right],$$

$$d_{67} = -\frac{\nu_m\mu_H B_{y0}B_{z0}}{\mu B_0 l_2},$$

$$d_{71} = -\frac{\nu_m B_{z0}(\mu_\rho + \mu_T T_S)}{l_2},$$

$$d_{72} = -\frac{\nu_m B_{z0}\mu_T T_S}{l_2},$$

$$d_{76} = -\frac{\nu_m\mu_H B_{y0}B_{z0}}{\mu B_0 l_2},$$

$$d_{77} = \nu_m\left[\frac{\mu^2 B_0 + \mu_H(B_{x0}^2 + B_{y0}^2)}{\mu B_0 l_2}\right].$$

В приведенных соотношениях

$$l_3 = \mu^2 + \mu_H\frac{B_{x0}^2}{B_0}; \qquad m = \frac{1}{4\pi\rho_0\mu l_2};$$

$$N = \frac{1}{1 + T_S(S_T^\ni - m\mu_T^2 B_0^2)}.$$

Уравнения (2) составляют полную систему, описывающую процесс распространения плоских звуковых волн. В дальнейшем будем изучать малые возмущения без учета диссипации ($d_{ik}=0$).

Для рассматриваемого здесь случая неподвижных источников массы $\gamma_0=0$ имеем

$$b_{22} = b_{33} = b_{44} = b_{55} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 S') + \rho_0 x_{2k}\frac{\partial U_k}{\partial x} = \rho_0 f_2.$$

Поэтому для U_3, U_4, U_5 справедливо уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 U_i) + \rho_0 x_{ik}\frac{\partial U_k}{\partial x} = 0, \qquad i = 3, 4, 5.$$

Таким образом, окончательно получаем систему уравнений вида

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + x_{ik}^*(t)\frac{\partial U_k}{\partial x} = f_i^*(x,t), \quad i,k = 1,2,\dots 7, \quad (3)$$

где $U_1=\rho'$; $U_2=\rho_0 S'$; $U_3=\rho_0 v_x'$; $U_4=\rho_0 v_y'$; $U_5=\rho_0 v_z'$; $U_6=B_y'$; $U_7=B_z'$, а ненулевые компоненты x_{ik}^*, f_i^* будут

$$\begin{array}{lll}
x_{13}^* = x_{13}/\rho_0; & x_{23}^* = x_{23}; & x_{24}^* = x_{24}; \\
x_{25}^* = x_{25}; & x_{31}^* = \rho_0 x_{31}; & x_{36}^* = \rho_0 x_{36}; \\
x_{37}^* = \rho_0 x_{37}; & x_{41}^* = \rho_0 x_{41}; & x_{46}^* = \rho_0 x_{46}; \\
x_{47}^* = \rho_0 x_{47}; & x_{51}^* = \rho_0 x_{51}; & x_{56}^* = \rho_0 x_{56}; \\
x_{57}^* = \rho_0 x_{57}; & x_{63}^* = x_{63}/\rho_0; & x_{64}^* = x_{64}/\rho_0; \\
x_{73}^* = x_{73}/\rho_0; & x_{75}^* = x_{75}/\rho_0; & f_2^* = \rho_0 f_2.
\end{array}$$

Пользуясь общим выражением (2), нетрудно выписать систему уравнений и для случая $\gamma_0=1$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ С НЕПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ МАССЫ

В системе (3) коэффициенты x_{ik}^* зависят от времени, и поэтому она представляется весьма сложной для исследования в общем случае. Ограничимся рассмотрением для магнитной проницаемости случая $\mu=\mu(H)$, т.е. исключим магнитострикционные и магнитокалорические эффекты ($\mu_\rho=\mu_T=0$). В этом случае система (3) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v_x') = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 S') = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v_x') + p_\rho\frac{\partial S'}{\partial x} + \rho_0 m B_{y0}\left(\mu^2 + \mu_H\frac{B_{x0}^2}{B_0}\right)\times \\
\times\frac{\partial B_y'}{\partial x} + \rho_0 m B_{z0}\left(\mu^2 + \mu_H\frac{B_{x0}^2}{B_0}\right)\frac{\partial B_z'}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v_y') + p_\rho\frac{\partial S'}{\partial x} + \qquad (4) \\
+\rho_0 m B_{x0}\left(\mu^2 + \mu_H\frac{B_{x0}^2 + B_{z0}^2}{B_0}\right)\times \\
\times\frac{\partial B_y'}{\partial x} + \rho_0 m\mu_H\frac{B_{x0}B_{y0}B_{z0}}{B_0}\frac{\partial B_z'}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial B_y'}{\partial t} + B_{y0}\frac{\partial v_x'}{\partial x} - B_{x0}\frac{\partial v_y'}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial B_z'}{\partial t} + B_{z0}\frac{\partial v_x'}{\partial x} - B_{x0}\frac{\partial v_z'}{\partial x} = 0.
\end{gathered}$$

Из второго уравнения этой системы следует

$$\rho_0(t)S' = f(x),$$

т.е. начальные условия выбираются таким образом, что всюду в дальнейшем можно считать $S' \equiv 0$.

В случае поперечного поля ($B_{x0}=0$) из системы уравнений (4) имеем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v'_x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_x) + a^2(t)\frac{\partial \rho'}{\partial x} + b^2\frac{\partial b'_z}{\partial x} = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial b'_z}{\partial t} = -\frac{\partial v'_x}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial t}.$$

Здесь введены обозначения

$$b'_z \equiv \frac{B'_z}{B_{z0}}; \qquad b^2 \equiv \frac{\mu B_0^2}{4\pi l_2}; \qquad a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0.$$

Параметр a^2 соответствует скорости распространения звука в невозмущенной среде, а

$$B'_y = \frac{B_{y0}}{B_{z0}} B'_z$$

при нулевых для них начальных условиях, что следует из шестого и седьмого уравнений системы (4) и, кроме того, начальные условия выбраны так, что $v'_y \equiv v'_z \equiv 0$ (это следует из четвертого и пятого уравнений системы (4) при $B_{x0}=0$).

Для политропного газа ($p=c\rho^\kappa$) имеем для исходного невозмущенного состояния $p_0(t)=c\rho_0^\kappa(t)$. При этом можно представить

$$a^2(t) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 = c\kappa\rho_0^{\kappa-1}(t) = a_0^2\left(\frac{\rho_0(t)}{\rho_{00}}\right)^{\kappa-1},$$

где $a(0) \equiv a_0$; $\rho_0 \equiv \rho_{00}$. Таким образом, для политропного газа имеем:

$$q(t) = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \frac{2}{\kappa-1}\rho_0(t)\frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Исследуем систему уравнений (5) с помощью приема, использованного в [1]. Будем искать ее частное решение в виде

$$U'(x,t) = \lambda(t) w(x,t),$$

где $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{a'}{a}\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \qquad (6)$$

так что

$$w(x,t) = f_1\left(x + \int\limits_0^t a(\tau)d\tau\right) + f_2\left(x - \int\limits_0^t a(\tau)d\tau\right)$$

представляет собой ограниченное решение при $t\to\infty$, поскольку вид произвольных функций f_1 и f_2 определяется из начальных условий. В таком случае поведение $U'(x,t)$ при $t\to\infty$ целиком определяется видом функции $\lambda(t)$. Приводя системы (5) к уравнениям относительно ρ' и $\rho_0 v'_x$, получаем

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2(t)\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{b^2}{\rho_0(t)}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x \partial t} = 0, \qquad (7)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_0 v'_x) - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho_0 v'_x) - 2\frac{a'}{a}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_x) + \\ +2\frac{a' b^2}{a\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v'_x) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b^2}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v'_x)\right) = 0.\end{gathered} \qquad (8)$$

Если $\rho'(x,t)=\lambda(t)w(x,t)$ и $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6), из уравнения (7) имеем

$$\lambda'' w + \frac{\partial w}{\partial t}\left(2\lambda' + \frac{a'}{a}\lambda\right) + \frac{b^2}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0. \qquad (9)$$

Аналогичную операцию можно проделать и с уравнением (8). Однако уравнение (7) дает

$$\lambda'' = 0, \qquad 2\lambda' + \frac{a'}{a}\lambda = 0, \qquad \lambda' = \lambda = 0.$$

Таким образом, частное решение с невозрастающей функцией w при $b^2 \neq 0$ дает тождественный нуль. Отсюда заключаем, что среда неустойчива в поперечном поле.

В случае продольного поля ($B_{y0}=B_{z0}=0$, $B_{x0}=B_0$) из системы уравнений (4) получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v'_x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_x) + a^2(t)\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_y) - \rho_0 m B_0 l_2\frac{\partial B'_y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_z) - \rho_0 m B_0 l_2\frac{\partial B'_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial t} - B_0\frac{\partial v'_y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial t} - B_0\frac{\partial v'_z}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует $v'_z = v'_y$, $B'_z = B'_y$ при нулевых для них начальных условиях. Тогда имеем систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v'_x) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_x) + a^2(t)\frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_y) - \frac{B_0}{4\pi\mu}\frac{\partial B'_y}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial B'_y}{\partial t} - B_0\frac{\partial v'_y}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Отсюда нетрудно получить:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2(t)\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_0 v'_x) - a^2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho_0 v'_x) -\\
&-\left(\frac{d}{dt}\ln a^2\right)\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_x) = 0,
\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_0 v'_y) - A_x^2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho_0 v'_y) = 0, \qquad (13)$$

где $A_x^2 \equiv B'_{x0}/(4\pi - \mu\rho_0)$ соответствует скорости Альфвена.

Исследуем рассматриваемый случай с помощью примененного ранее решения

$$U'(x,t) = \lambda(t) w(x,t).$$

Уравнения (11) и (12) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2(t)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha\frac{a'}{a}\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \qquad (14)$$

где уравнению (11) соответствуют $U = \rho'$, $\alpha = 0$, а уравнению (12) – $U = \rho_0 v'_x$, $\alpha = 2$.

Рассмотрим частное решение уравнения (14) вида $U'(x,t) = \lambda(t) w(x,t)$, $\lambda(0) = 1$. Подставив его в уравнение (14) и разделив на λ, получим для w:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a'}{a}\alpha\lambda - 2\lambda'\right)\frac{\partial w}{\partial t} +\\
&+\frac{w}{\lambda}\left(\lambda'' - \alpha\frac{a'}{a}\lambda'\right) = 0.
\end{aligned}$$

При этом должны выполняться условия

$$\lambda'' - \alpha\frac{a'}{a}\lambda' = 0,$$

$$\frac{a'}{a}\alpha\lambda - 2\lambda' = \frac{a'}{a}\lambda\alpha,$$

из которых получаем явную зависимость $\lambda(t)$ и $a(t)$:

$$\lambda(t) = \left[1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\lambda'(0)t\right]^{-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}},$$

$$\overline{a}(t) \equiv \frac{a(t)}{a(0)} = \left[1 - \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\lambda'(0)t\right]^{-\frac{2}{\alpha+1}}.$$

Тогда

$$\lambda(t) = [\overline{a}(t)]^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

причем $\lambda'(0) = (\lambda-1)\overline{a}'(0)/2$. Выражение для $q(t)$ можно переписать в виде

$$q(t) = \frac{2}{\kappa-1}\rho_0(t)\frac{\overline{a}(t)'}{\overline{a}(t)}.$$

Функция $\lambda(t)$ будет убывать со временем, если:

1) $\alpha > 1$ и $\overline{a}'(t) < 0$, т. е. $q(t) < 0$;

2) $\alpha < 1$ и $\overline{a}'(t) > 0$, т. е. $q(t) > 0$.

Обращаясь к рассматриваемым случаям возмущений ρ' и v'_x и конкретным значениям α, приходим к следующим заключениям:

- при $\alpha = 0$ функция $\rho'(x,t)$ будет затухающей для $q(t) > 0$;
- при $\alpha = 2$

  $$v'_x = \frac{U}{\rho_0(t)} = \frac{w(x,t)}{\rho_{00}}\overline{a}^{-\frac{5-\kappa}{2(\kappa-1)}},$$

  где $\rho_0(t)$ находится из соотношения

  $$\overline{a}(t) \equiv \frac{a(t)}{a(0)} = \left(\frac{\rho_0(t)}{\rho_{00}}\right)^{\frac{\kappa-1}{2}}.$$

Хотя $\alpha = 2$, функция $v'_x(x,t)$ при возрастающей функции $\overline{a}(t)$ и ограниченной $w(x,t)$ для $1 < \kappa < 5$ будет убывать. Таким образом, $v'_x(x,t)$ будет затухающей функцией также при $q(t) > 0$, т. е. когда по среде непрерывно распределены источники массы. Исследуя аналогичным образом решение уравнения (13), получаем

$$\lambda(t) = \left[\overline{A}_x(t)\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad \overline{A}_x(t) \equiv \frac{A_x(t)}{A_x(0)};$$

$$v'_y = \frac{U}{\rho_0(t)} = \frac{\lambda(t) w(x,t)}{\rho_0(t)} = \frac{\overline{A}_x^{-\frac{1}{2}} w(x,t)}{\rho_{00}\overline{a}^{\frac{2}{\kappa-1}}} =$$

$$= \frac{w(x,t)}{\rho_{00}\overline{a}^{\frac{2}{\kappa-1}}}\,\frac{\rho_{00}^{-\frac{1}{4}}}{\left(\rho_{00}\overline{a}^{\frac{2}{\kappa-1}}\right)^{-\frac{1}{4}}} = \frac{w(x,t)}{\rho_{00}}\overline{a}^{-\frac{3}{2(\kappa-1)}}.$$

Следовательно, при возрастающей функции $\overline{a}(t)$ (т. е. $q(t)>0$) и ограниченной $w(x,t)$ для $\kappa>1$ функция $v'_y(x,t)$ будет убывать.

Итак, в случае продольного поля политропный газ при $\gamma_0=0$ с равномерно и непрерывно распределенными стоками ($q(t)<0$) будет неустойчивым, а с равномерно и непрерывно распределенными источниками ($q(t)>0$) может быть устойчивым.

Поскольку исследование систем уравнений в случаях поперечного и продольного полей было основано на анализе частного решения для возмущения U', то, конечно, по устойчивости политропного газа, которая следует из анализа частного решения, нельзя судить об устойчивости состояния среды в общем случае. В связи с этим обратимся к общему анализу решения уравнения (14). Будем искать его в виде

$$U=\sum_{n=1}^{\infty} e^{ik_nx}A_n(t),$$

где k_n – значения из дискретного спектра.

Требование устойчивости состояния среды предполагает невозрастание со временем решения U, которое представляет собой малое возмущение ρ' при $\alpha=0$ и $\rho_0 v'_x$ при $\alpha=2$. В последнем случае дополнительно требуется проверка ограниченности на бесконечности малого возмущения v'_x. Следовательно, функции $A_n(t)$ должны быть ограниченными при $t\to\infty$.

Подставляя решение в уравнение, получаем

$$A''_n-\alpha\frac{a'}{a}A'_n+k_n^2a^2A_n=0. \qquad (15)$$

Представляя

$$A_n(t)=a^{\frac{\alpha}{2}}B_n(t),$$

уравнение (15) можно переписать в виде

$$B''_n+\left\{a^{\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{(a^{\alpha/2})'}{a^{\alpha}}\right]'+k_n^2a^2\right\}B_n=0. \qquad (16)$$

Для политропного газа имеем

$$a(t)=c\rho_0^{\gamma}(t),$$

где

$$c=\frac{a_0}{\rho_{00}^{\gamma}}, \qquad \gamma=\frac{\kappa-1}{2}.$$

Тогда, с учетом $\partial\rho_0/\partial t=q(t)$ уравнение (16) принимает вид

$$B''_n+\left\{\frac{\alpha}{2}\gamma\left(q'\rho_0^{-1}-\left(\frac{\alpha}{2}\gamma+1\right)q^2\rho_0^{-2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+c^2{k_n}^2\rho_0^{2\gamma}\right)\right\}B_n=0. \qquad (17)$$

Будем искать такое распределение источников массы $q(t)$, чтобы решение уравнения (17) $B_n(t)$ было ограниченным на бесконечности при любом k_n:

$$|B_n(t)|<\infty, \quad t\to\infty.$$

Рассмотрим распределение источников $q(t)$ в классе монотонных функций. Считая, что

$$q(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{q_{0k}}{(1+t)^k},$$

исследуем поведение $B_n(t)$ при $q(t)=q_0/(1+t)^k$. Тогда для $k\neq1$

$$\rho_0(t)=\rho_{00}+\int\limits_0^t q(\tau)d\tau=\rho_{00}+l_4, \qquad (18)$$

где

$$l_4=\frac{q_0}{(1-k)(1+t)^{k-1}}.$$

Обозначая

$$f(t)+\lambda=\frac{\alpha}{2}\gamma\left(q'\rho_0^{-1}-\left(\frac{\alpha}{2}\gamma+1\right)q^2\rho_0^{-2}\right)+c^2k_n^2\rho_0^{2\gamma},$$

получаем для $k>1$

$$f(t)=\frac{\alpha}{2}\gamma\left\{-\frac{q_0k}{(1+t)^{k+1}}(\rho_{00}+l_4)^{-1}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\alpha}{2}\gamma+1\right)\frac{q_0^2k}{(1+t)^{2k}}(\rho_{00}+l_4)^{-2}\right\}+$$
$$+c^2k_n^2\rho_0^{2\gamma}-\lambda=$$
$$=-\frac{\alpha}{2}\gamma\left\{q_0k\rho_{00}^{-1}O\left(t^{-(k+1)}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\alpha}{2}\gamma+1\right)q_0\rho_{00}^{-2}O\left(t^{-2k}\right)\right\}+$$
$$+c^2k_n^2\rho_{00}^{2\gamma}-\lambda+O\left(t^{-2\gamma(k-1)}\right).$$

Если выбрать $\lambda=c^2\rho_{00}^{2\gamma}k_n^2$, то получим $f(t)=O\left(t^{-m}\right)$, где $m=2\gamma(k-1)>0$ для $k>1$. Тогда, как известно [3], для $m=1$ произвольное решение, соответствующее данному значению λ, будет ограниченным на бесконечности, а для $m>1$ каждое решение, тождественно не равное нулю, может быть представлено в виде

$$B_n(t)=N(t)\sin\left(c^2\rho_{00}^{2\gamma}k_n^2t+\sigma(t)\right),$$

где

$$N(t) = N_0 + O(t^{m-1})^{-1},$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + O(t^{m-1})^{-1}.$$

Тогда

$$A_n(t) = N(t) a^{\frac{\alpha}{2}} \sin\Big(c^2 \rho_{00}^{2\gamma} k_n^2 t + \sigma(t)\Big)$$

и, следовательно, на бесконечности

$$A_n(t) = N_0 \rho_{00}^{\frac{\alpha}{2}\gamma} \sin\Big(c^2 \rho_{00}^{2\gamma} k_n^2 t + \sigma_0\Big),$$

т.е. ограничено при любом действительном k_n.

Принимая во внимание, что $v_x' = U/\rho_0(t)$ и учитывая уравнение (18), сделаем вывод о невозрастании с течением времени малых возмущений ρ', и v_x'. Анализ уравнения (13) приводит к выводу, что при соответствующем выборе

$$\beta^2 \equiv \frac{k_n^2 B_{x0}^2}{4\pi\mu\rho_{00}}$$

его решения будут ограниченными на бесконечности при любом k_n [3]. Поскольку $v_y' = U/\rho_0(t)$, то, учитывая выражение (18), получаем, что и v_y' не возрастает с течением времени.

Таким образом:

1) если $k=1$, т.е. мощность $q(t)$ (интенсивность источников и стоков массы) убывает по абсолютной величине, а плотность $\rho_0(t) = \rho_{00} + q_0 \ln(1+t)$ при $t \to \infty$ убывает (для $q_0 < 0$) или возрастает (для $q_0 > 0$), то состояние среды неустойчиво, так как гарантировать ограниченное общее решение для возмущения U' нельзя;

2) если $k > 1$, т.е. мощность $q(t)$ убывает по абсолютной величине и плотность $\rho_0(t) \to \rho_{00}$ при $t \to \infty$, то это состояние среды устойчиво: любое малое возмущение плотности и скорости остается малым;

3) если $k < 1$, т.е. величина интенсивности источников (стоков) возрастает, то среда теряет устойчивость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На основании МГД-приближения основной системы уравнений движения среды переменной массы в электромагнитном поле получена полная система уравнений распространения звуковых волн по намагничивающейся неравновесной среде с непрерывно и равномерно распределенными источниками (стоками) массы, находящейся в состоянии механического покоя, но с термодинамическим равновесием, нарушенным за счет действия внутренних источников массы.

2. В пренебрежении магнитострикционными и магнитокалорическими эффектами рассмотрен случай зависимости намагниченности только от поля.

3. Исследовано частное решение полученной системы уравнений, на основании чего сделан вывод о неустойчивости среды в поперечном поле.

4. В результате исследования поведения общего решения для возмущения U' с ростом времени удалось найти распределение источников массы в классе монотонных функций, обеспечивающее устойчивость состояния политропного газа в продольном поле: если мощность $q(t)$ убывает по величине, так что плотность при $t \to \infty$ стремится к своему равновесному значению, то состояние среды (политропного газа) устойчиво.

1. *Бурнаев Б. Е., Тарапов И. Е.* Звуковые волны в среде переменной массы // Мат. физ., анализ, геометр.– 1995.– **2**, N 3/4.– С. 399–407.
2. *Тарапов И. Е.* О некоторых основных задачах механики сплошной среды переменной массы // Прикл. гидромех.– 1999.– **1(73)**, N 4.– С. 61–76.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1976.– С. 154–155.