

УДК 539.3

## ЕЩЕ РАЗ О КРАЕВОМ РЕЗОНАНСЕ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.10.2000

На основе метода суперпозиции проведен анализ особенностей краевого резонанса в полуполосе со свободным торцом при изменении коэффициента Пуассона. Показано, что при изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0.5 частота краевого резонанса увеличивается от 1.99 до 2.61. При этом добротность резонанса резко падает. При рассмотрении первой распространяющейся волны как суперпозиции SV- и P-волн отмечено, что на частоте краевого резонанса на боковых поверхностях полуполосы SV-волна является распространяющейся, а P-волна – неоднородной. На частоте  $\Omega_2 \approx 2.2$  практически для всех коэффициентов Пуассона на ширине полуполосы укладывается целое число SV-полуволн. Для средних значений коэффициента Пуассона – от 0.22 до 0.42 – существует диапазон частот, на котором поперечная волна падает на свободный торец полуполосы под углом, большим критического, и существует продольная распространяющаяся волна. В этом случае также существует частота  $\Omega_e^1$ , на которой боковые поверхности полуполосы свободны от напряжений с учетом SV- и P-волн. Для средних значений коэффициента Пуассона частота краевого резонанса лежит между значениями  $\Omega_2 = 2.2$  и  $\Omega_e^1$ .

На базі методу суперпозиції проведений аналіз особливостей крайового резонансу в півсмугі з вільним торцем при зміні коефіцієнта Пуассона. Показано, що при зміні коефіцієнта Пуассона від 0 до 0.5 частота крайового резонансу збільшується від 1.99 до 2.61. При цьому добротність резонансу різко падає. При розгляді першої хвилі, що поширюється, як суперпозиції SV- і P-хвиль відзначено, що на частоті крайового резонансу на бічних поверхнях півсмуги SV-хвиля поширюється, а P-хвиля – неоднорідна. На частоті  $\Omega_2 \approx 2.2$  практично для всіх коефіцієнтів Пуассона на ширині півсмуги вкладається ціле число SV-півхвиль. Для середніх значень коефіцієнта Пуассона – від 0.22 до 0.42 – існує діапазон частот, на якому поперечна хвиля падає на вільний торець півсмуги під кутом, більшим за критичний, і існує поздовжня хвиля, що поширюється. У цьому випадку також існує частота  $\Omega_e^1$ , на якій бічні поверхні півсмуги є вільними від напружень з урахуванням SV- та P-хвиль. Для середніх значень коефіцієнта Пуассона частота крайового резонансу лежить між значеннями  $\Omega_2 = 2.2$  і  $\Omega_e^1$ .

On the basis of method of superposition the analysis of features of an edge resonance is carried out for a half-strip with free edge at variation of Poisson's ratio. It is shown that with change of Poisson's ratio from 0 up to 0.5 the edge resonance frequency increases from 1.99 to 2.61. In going so, the quality factor sharply falls. Considering the first propagating wave as a superposition of SV- and P-waves we note that at the edge resonance frequency the SV-wave on side surfaces is propagating one, while P-wave is evanescent one. On frequency  $\Omega_2 \approx 2.2$  practically for all Poisson's ratios there are integer numbers of SV-half-waves across the width of a half-strip. For intermediate Poisson's ratios, namely from 0.22 to 0.42, there is a range of frequencies, for which the SV-wave falls on a free end of half-strip at the angle exceeding critical one. In going so, there exist a propagating P-wave. In this case there also exists a frequency  $\Omega_e^1$  where side surfaces of a half-strip are free from stresses when accounting both SV- and P-waves. The edge resonance frequency lays between values  $\Omega_2 = 2.2$  and  $\Omega_e^1$  for intermediate Poisson's ratios.

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее известных типов резонанса на неоднородных волнах является тот, который проявляется в сильной локализации движения вблизи торца волновода. Именно по этому признаку соответствующая форма колебаний получила название краевой, а явление эффективного возбуждения колебаний на данной частоте – название краевого резонанса.

При экспериментальном исследовании краевой формы возникают определенные трудности, которые в значительной мере связаны с тем, что эффективный коэффициент электромеханической связи на краевой моде в пьезоактивных пластинах, дисках и цилиндрах близок к нулю. Впервые краевой резонанс наблюдался Шоу [1] и Оливером [2] и к настоящему времени накоплен обширный экспериментальный материал [3], характеризующий это явление.

С точки зрения теоретического объяснения на-

блюдаемого эффекта важную роль сыграли работы Д. С. Газиса и Р. Д. Миндлина [4]. В них явление краевого резонанса впервые было связано со спецификой возбуждения неоднородных волн. Тем самым была подчеркнута особая важность роли, которую играют волны с комплексными постоянными распространения при формировании волнового поля. В дальнейшем появилось значительное количество публикаций, посвященных изучению краевого резонанса в конечных цилиндрах [5, 6], круглых дисках [4, 7] и прямоугольных пластинках конечной длины [8].

Одновременно, для достижения более глубокого понимания специфики возбуждения неоднородных волн значительное внимание было уделено анализу краевого резонанса в полубесконечных телах. При изучении волнового поля в таких телах использовались различные подходы: метод однородных решений [9], метод суперпозиции [8, 10], метод конечных элементов [14], метод конечных разностей и другие [15].

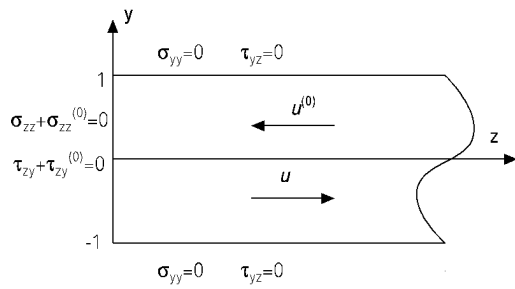


Рис. 1. Геометрия задачи

В рамках метода однородных решений при описании явления краевого резонанса широкое распространение получили теория “второго порядка” [4, 5], а также вариационные методы [9, 12, 13]. Изучение краевого резонанса на основе метода суперпозиции проводилось в работах [8, 10, 11].

Работы, посвященные изучению краевого резонанса в полуограниченных телах, показали, что частота, на которой происходит сильная локализация движения вблизи торца волновода, действительно совпадает с частотой краевого резонанса в конечных упругих телах, измеренной в экспериментах. Однако между резонансными явлениями в неограниченных и ограниченных упругих телах имеется существенное различие. Вследствие связанности через граничные условия на торце распространяющейся и неоднородных волн, в неограниченном теле проявляется радиационное демпфирование и амплитуды колебаний неоднородных волн остаются ограниченными. Исключение составляют продольные колебания полуполосы и симметричные колебания полуцилиндра [8] при коэффициенте Пуассона  $\nu=0$ , а также несимметричные колебания полуцилиндра для любых значений  $\nu$ . В случае симметричных колебаний полуполосы и полуцилиндра связь между распространяющейся и неоднородными волнами устраняется для  $\nu=0$  за счет соответствующего выбора нагрузки на торце. Возбуждая полуограниченный волновод самоуравновешенной нагрузкой, можно получить действительный резонанс, т.е. обращение в бесконечность амплитуд смещений на некоторой частоте [8]. В работе [16] подробно проанализирован краевой резонанс в полуполосе с коэффициентом Пуассона, равным нулю.

В случае неосесимметричных колебаний полуцилиндра в некотором частотном диапазоне распространяющиеся волны отсутствуют вне зависимости от величины  $\nu$ , так как наименьшая частота запертия волновода больше нуля. Здесь также

наблюдается неограниченный рост амплитуд смещений и резонанс на неоднородных волнах проявляется в чистом виде при любом  $\nu$ .

Несмотря на значительный объем информации о структуре и свойствах резонанса на неоднородных волнах, в этой области еще остается ряд невыясненных вопросов. Для плоских волноводов это обусловлено тем, что как при симметричных, так и при несимметричных колебаниях на частоте краевого резонанса существуют распространяющиеся волны и краевой резонанс в “чистом” виде выделить не удастся. Поэтому очень важна оценка интенсивности возбуждения неоднородных волн, а следовательно, и степени проявления краевого резонанса в зависимости от различных параметров.

В данной работе изучается эффективность проявления краевого резонанса при различных коэффициентах Пуассона. При этом установлено, что с увеличением  $\nu$  частота краевого резонанса увеличивается, а добротность падает. Это обусловлено увеличением связанности неоднородных волн и единственной распространяющейся волны с ростом  $\nu$ .

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу о распространении нормальных волны в полуполосе  $|Y| \leq h, Z \geq 0$  со свободными от напряжений боковыми поверхностями  $Y = \pm h$  (рис. 1). Свойства изотропной среды характеризуются модулем сдвига  $\mu$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . Для перехода к безразмерным величинам координаты нормируем на  $h$ :  $y = Y/h, z = Z/h$ .

Волновое поле возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $z$  из бесконечности:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= 0, & z=0, & |y| \leq 1, \\ \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0, & z=0, & |y| \leq 1, \\ \sigma_{yy}(\pm 1, z) = \tau_{yz}(\pm 1, z) &= 0, & y = \pm 1, & z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}^{(0)}}{2\mu} &= -i \left( \alpha_1^2 \xi^2 \alpha_2 \frac{\text{ch} \alpha_2 y}{\text{sh} \alpha_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\xi^2 + \alpha_2^2)}{2} (\xi^2 + \Omega_0^2) \alpha_1 \frac{\text{ch} \alpha_1 y}{\text{sh} \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\tau_{zz}^{(0)}}{2\mu} = \xi \alpha_1^2 \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \left( \frac{\text{sh} \alpha_2 y}{\text{sh} \alpha_2} - \frac{\text{sh} \alpha_1 y}{\text{sh} \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}.$$

Постоянная распространения  $\xi$  равна первому действительному корню дисперсионного уравнения для изотропной бесконечной полосы со свободными поверхностями:

$$\Delta(\xi) = (2\xi^2 - \Omega_2)^2 \alpha_1 \operatorname{cth} \alpha_1 - 4\xi^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \operatorname{cth} \alpha_2 = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3)

$$\alpha_n = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_n^2}, & |\xi| \geq \Omega_n, \\ -i\sqrt{\Omega_n^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_n; \end{cases} \quad (4)$$

$\Omega_1 = \omega h / c_l$ ;  $\Omega_2 = \omega h / c_s$ ;  $c_l$  и  $c_s$  – скорости продольной и поперечной волн соответственно. Здесь и в дальнейшем временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опускается ( $\omega$  – круговая частота).

Необходимо найти вектор смещения, удовлетворяющий заданным граничным условиям и однородной системе уравнений Ламе. Дополнительно к граничным условиям (1) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна уносит энергию от торца полуполосы на бесконечность.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данном исследовании применялся метод суперпозиции [8]. В его рамках построим решение граничной задачи для продольных колебаний волновода. Следуя общей схеме метода суперпозиции [8], компоненты вектора смещений ( $z \geq 0$ ) представим в виде

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \sin \beta_k y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_z^{(1)} &= -iA_0 \Omega_1 e^{i\Omega_1 z} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z} \right) \cos \beta_k y + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

с неизвестными постоянными  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) и функцией  $x(\tau)$ . Кроме того, здесь

введены обозначения

$$\begin{aligned} U_y(\tau, y) &= p_1^2 \left( \tau^2 \frac{\sinh p_2 y}{\sinh p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2) \sinh p_1 y}{2 \sinh p_1} \right); \\ U_z(\tau, y) &= \tau p_1 \left( p_1 p_2 \frac{\cosh p_2 y}{\cosh p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2) \cosh p_1 y}{2 \cosh p_1} \right); \\ p_n &= \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_n^2}, & |\tau| \geq \Omega_n, \\ -i\sqrt{\Omega_n^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_n; \end{cases} \\ q_n &= \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_n^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_n, \\ -i\sqrt{\Omega_n^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_n, \quad \beta_k = k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Представление (5) выбрано таким образом, чтобы условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях  $y = \pm 1$  выполнялось автоматически. Выполнение оставшихся граничных условий приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_0$ ,  $y_k = (-1)^k \beta_k B_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) и функции  $x(\tau)$ . При этом  $A_k = -B_k (\beta_k^2 + q_2^2) / (2\beta_k q_1)$ , а система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x(\tau) \Delta(\tau) + A_0 \frac{i\Omega_0^2 \Omega_1}{\tau^2 - \Omega_1^2} - \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k(\tau) &= 0, \\ A_0 \Omega_0^2 + \frac{\Omega_0^2 \Omega_2^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau &= f_0, \\ y_k R_k - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) p_1^2(\tau) b_k(\tau) d\tau &= f_k, \end{aligned} \quad (6)$$

$(k=1, 2, \dots)$ .

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2q_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{(\beta_k^2 + \Omega_0^2)(\beta_k^2 + q_2^2)}{\beta_k^2(\beta_k^2 + p_1^2)}, \\ b_k &= \frac{2\tau^2 p_2^2}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{(\tau^2 + \Omega_0^2)(\tau^2 + p_2^2)}{\tau^2 + q_1^2}, \\ R_k &= q_2 - \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{4\beta_k^2 q_1}; \end{aligned} \quad (7)$$

$\Delta(\tau)$  – определитель Рэлея–Лэмба (3). Алгоритм решения этой системы аналогичен приведенному в [10] и здесь на нем останавливаться не будем. Отметим только, что при редукции системы применялась асимптотика

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) \tau^4 = a_0. \quad (8)$$

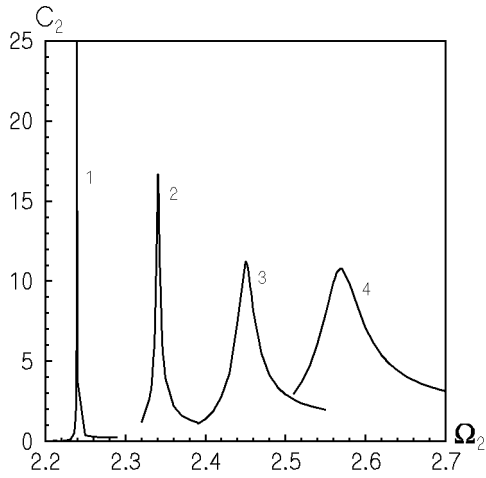


Рис. 2. Частотная зависимость амплитуды возбуждения первой неоднородной волны для разных значений коэффициента Пуассона

Для замыкания конечной системы использовались соотношения, определяющие граничные условия в угловой точке в виде

$$\sigma_{zz}(1, 0) - \sigma_{yy}(1, 0) = 2\mu\sigma_{zz}^{(0)}(1, 0). \quad (9)$$

Решения граничной задачи (1) по методу суперпозиции можно представить через нормальные волны следующим образом:

$$\mathbf{u}(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{U}(\xi_n, y) e^{i\xi_n z}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{U}(\xi_n, y) = \{U_y(\xi_n, y), U_z(\xi_n, z)\}$ , а  $\xi_n$  – корни уравнения Рэля – Лэмба (3). Коэффициенты возбуждения нормальных волн находятся, исходя из соотношения

$$C_n = \frac{1}{\Delta'(\xi_n)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_k(\xi_n) - A_0 \frac{2i\Omega_0^2 \Omega_1}{\xi_n^2 - \Omega_1^2} \right). \quad (11)$$

При редукции системы главным критерием качества полученного решения являлся контроль за точностью выполнения граничных условий. При  $k=1, \dots, 10$  и при ограничении верхнего предела в интегралах до 150 (для  $\tau > 150$  использовались асимптотические представления для подынтегральных функций) граничные условия на торце выполнялись с погрешностью до 1.0 % напряжения падающей волны, а на поверхностях  $y = \pm 1$  – до 0.2 %. Дополнительным критерием достоверности результатов был контроль за выполнением закона сохранения энергии, который выполнялся с точностью до 99.7 % энергии падающей волны. Перейдем к анализу численных результатов, характеризующих краевой резонанс в полуполосе.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе рассматривалась эффективность возбуждения краевой моды. Краевой резонанс наблюдался на частоте, когда в волноводе может существовать только одна распространяющаяся волна. Наличие волны, уносящей энергию от торца, обуславливает существование радиационного демпфирования. За счет этого при симметричных волновых движениях (продольные колебания) в полуполосе из материалов с  $\nu \neq 0$  амплитуды смещений на резонансной частоте остаются конечными, а интенсивность проявления резонанса зависит от ряда факторов. Для фиксированного  $\nu$  определяющее значение имеет степень согласования нагрузки и формы краевой моды [10, 11]. При фиксированной нагрузке эффективность проявления краевого резонанса сильно зависит от величины коэффициента Пуассона.

Традиционно при анализе резонансных ситуаций необходимо следить за изменением фазовых характеристик и увеличением амплитудных. В данной работе рассматривались частотные зависимости коэффициентов возбуждения нормальных волн в диапазоне частот, где для различных значений коэффициентов Пуассона существует только одна распространяющаяся волна. В этой частотной области для всех коэффициентов Пуассона амплитуда отраженной бегущей волны равнялась амплитуде падающей ( $C_1 = C_0 = 1$ ), что непосредственно следует из закона сохранения энергии. О поведении фазовых характеристик можно судить по частотной зависимости  $\text{Im}(C_1/C_0)$ . Во всех рассмотренных случаях вблизи частоты краевого резонанса  $\text{Im}(C_1/C_0)$  изменяется от  $-1$  до  $1$ . Частоту, на которой  $\text{Im}(C_1/C_0) = 0$ , естественно считать резонансной. На ней наблюдается резкое увеличение амплитуд неоднородных волн.

На рис. 2 представлена амплитуда возбуждения первой неоднородной волны, нормированная на амплитуду падающей волны:  $C_2/C_0$ . Кривая 1 соответствует коэффициенту Пуассона  $\nu = 0.24$ , кривая 2 –  $\nu = 0.32$ , кривая 3 –  $\nu = 0.4$ , а кривая 4 –  $\nu = 0.48$ . С уменьшением коэффициента Пуассона добротность резонанса увеличивается, амплитуда первой неоднородной волны значительно возрастает.

Первая неоднородная волна вносит определяющий вклад в формирование краевой моды. Однако в формировании краевой моды принимают участие все неоднородные волны. Это подтверждается двумя обстоятельствами.

С одной стороны, на частоте краевого резонанса не только амплитуда возбуждения первой

неоднородной волны, но и амплитуды неоднородных волн высших порядков достигают своего максимального значения, хотя степень возбуждения высших неоднородных волн значительно слабее и с увеличением номера неоднородной волны максимальное значение амплитуды уменьшается. С уменьшением коэффициента Пуассона амплитуды возбуждения неоднородных волн высших порядков на частоте краевого резонанса увеличиваются. При этом относительный рост амплитуд неоднородных волн высших порядков значительно меньше, чем увеличение амплитуды первой неоднородной волны.

С другой стороны, для более полной характеристики краевого резонанса необходимо проанализировать форму краевой моды. Для этого в работе [8] проведено сравнение характера движения частиц полуполосы на частоте краевого резонанса с соответствующими движениями в отдельных неоднородных волнах для коэффициента Пуассона  $\nu=0.3$ . Такое сравнение показало, что хотя форма колебаний на краевом резонансе близка к форме колебаний первой неоднородной волны, однако не совпадает с ней полностью.

Таким образом, в формировании краевой моды участвуют все неоднородные волны. При этом первая неоднородная волна является доминирующей.

В отличие от обычных резонансных ситуаций в теории колебаний, краевой резонанс реализуется на собственных формах, структура которых существенно зависит от частоты. Поскольку спектральные характеристики полосы заметно изменяются при изменении коэффициента Пуассона, то наблюдается еще одна характерная особенность краевого резонанса – зависимость резонансной частоты от коэффициента Пуассона. При этом с уменьшением  $\nu$  частота краевого резонанса уменьшается. Такая зависимость представлена на рис. 3. Для коэффициента Пуассона  $\nu=0$  полученное значение частоты краевого резонанса совпадает с известной величиной [8].

Сам факт значительного возбуждения неоднородных волн на частоте краевого резонанса хорошо известен, однако до настоящего времени не были проанализированы процессы, обуславливающие рост амплитуд неоднородных волн.

Значительное возбуждение неоднородных волн обусловлено особенностями отражения распространяющейся поперечной волны от свободного торца полуполосы. Рассмотрим первую распространяющуюся волну в безграничной упругой полосе как суперпозицию продольной (P) и поперечной (SV) волн, которые отражаются от границ

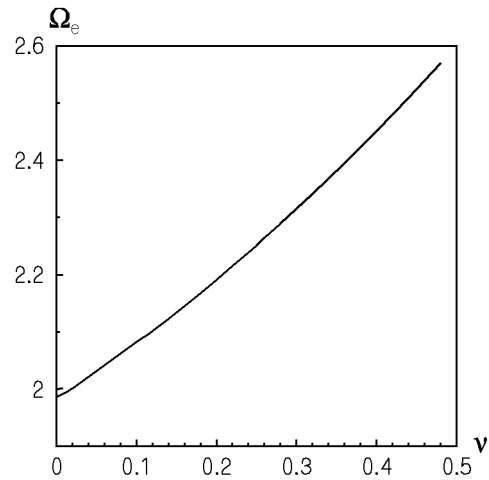


Рис. 3. Зависимость частоты краевого резонанса от коэффициента Пуассона

$y = \pm 1$  под определенными углами (рис. 4):

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi,$$

$$\phi = \Phi \cos(k_l y \sin \gamma) \exp[-ik_l z \cos \gamma],$$

$$\psi_x = \Psi \sin(k_s y \sin \gamma) \exp[-ik_s(z \cos \gamma)],$$

где  $k_s = \omega/c_s$  – волновое число поперечной (SV) волны;  $k_l = \omega/c_l$  – волновое число продольной (P) волны;

$$k_l \sin \gamma = \sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2};$$

$$k_s \sin \gamma = \sqrt{\Omega_2^2 - \xi_1^2}.$$

На частоте краевого резонанса угол отражения поперечных волн  $\sin \gamma = \sqrt{\Omega_2^2 - \xi_1^2}/\Omega_2$  всегда действителен ( $\Omega_2^2 - \xi_1^2 > 0$ ) и увеличивается с уменьшением  $\nu$ , а угол отражения продольной волны  $\sin \theta = \sqrt{\Omega_1^2 - \xi_1^2}/\Omega_1$  – мнимый ( $\Omega_1^2 - \xi_1^2 < 0$ ). Следовательно, на частоте краевого резонанса при отражении от границ  $y = \pm 1$  существует распространяющаяся поперечная и неоднородная продольная волны. Значения углов падения поперечной волны на частоте краевого резонанса для различных величин коэффициентов Пуассона приведено в табл. 1.

Для всех коэффициентов Пуассона продольная волна на поверхностях  $y = \pm 1$ ,  $z \geq 0$  неоднородна. Для коэффициента Пуассона  $\nu=0$  угол отражения поперечной волны равен  $45^\circ$ . При падении поперечной волны на свободную границу под углом  $45^\circ$  имеет место случай полного сохранения типа движения [8], т.е. продольная волна не возбуждается. Рассмотрим отражение поперечной SV-волны

Табл. 1. Значения углов падения поперечной волны на частоте краевого резонанса, резонансной частоты, критических углов и энергетических характеристик  $J_1, J_2$  для различных коэффициентов Пуассона

$\nu$	0.48	0.40	0.32	0.24
$\sin \gamma$	0.57	0.62	0.66	0.70
$\cos \gamma'_1$	0.19	0.41	0.51	0.58
$\Omega_e$	2.57	2.45	2.34	2.24
$J_1$	0.821	0.888	0.952	0.996
$J_2$	0.179	0.112	0.048	0.004

Табл. 2. Изменение углов отражения распространяющейся поперечной волны в зависимости от частоты

$\Omega_2$	1.0	1.5	2.0	2.5	2.6	2.7
$\cos \gamma_1$	0.81	0.79	0.76	0.58	0.53	0.47

от свободного торца. На частоте краевого резонанса при отражении распространяющейся поперечной волны от границы  $z=0$  (угол отражения равен  $\gamma_1$ , при этом  $\sin \gamma = \cos \gamma_1$ , см. рис. 4) для коэффициентов Пуассона  $\nu \neq 0$  возбуждается неоднородная продольная волна. Поскольку при углах падения поперечной волны  $\gamma_1$ , меньших критического угла  $\gamma'_1$  ( $\cos \gamma'_1 = c_s/c_l$ ), отраженная продольная волна становится неоднородной [8]. Значения критических углов для различных коэффициентов Пуассона приведено в табл. 1.

Для коэффициента Пуассона  $\nu=0.5$  критический угол равен  $90^\circ$  ( $\cos \gamma'_1 = 1$ ). Таким образом, на частоте краевого резонанса как на границе  $y=\pm 1, z \geq 0$ , так и на границе  $z=0, |y| \leq 1$  продольные волны могут быть только неоднородными, а поперечная волна является распространяющейся. Как уже отмечалось, для коэффициента Пуассона  $\nu=0$  угол отражения поперечной волны равен  $45^\circ$ . Этот угол является критическим, а также углом, при котором наблюдается сохранение типа движения.

Рассмотрим отражение распространяющейся поперечной волны от свободной границы  $z=0$ . Из рис. 4 видно, что

$$k_s \cos \gamma_1 = k_s \sin \gamma = \sqrt{\Omega_2^2 - \xi_1^2}/h = \xi_y.$$

Тогда SV-волна описывается потенциалом

$$\psi = \Psi \sin \xi_y y e^{-ik_s z \sin \gamma_1}.$$

Проекция волнового числа на ось  $y$  имеет максимальное значение  $\xi_y = \pi/2$  вблизи частоты  $\Omega_2 \approx 2.2$ . С ростом коэффициента Пуассона от  $\nu=0.1$  до  $\nu=0.48$  диапазон частот, в котором

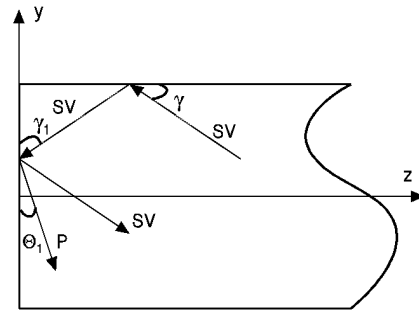


Рис. 4. Схема отражения распространяющейся поперечной волны от свободной границы

$\xi_y = \pi/2$ , незначительно расширяется. Так, для  $\nu=0.1$   $\xi_y = \pi/2$  при  $\Omega_2 = 2.222$ , а для  $\nu=0.48$   $\xi_y = \pi/2$  в диапазоне частот  $2.216 \leq \Omega_2 \leq 2.229$ .

Используя соотношения закона Гука, выражения для напряжений через потенциалы продольной и поперечной волн  $\phi$  и  $\psi$  записываем в виде

$$\frac{\sigma_{yy}}{2\mu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\nu k_l^2}{2(1-\nu)} \phi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \tag{12}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2\mu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Если учитывать только вклад поперечной составляющей волнового движения, то для нормального напряжения справедлива оценка

$$\frac{\sigma_{yy}}{2\mu} \sim \Psi \cos \xi_y y e^{-ik_s z \sin \gamma_1},$$

и на частоте  $\Omega_2 \approx 2.2$  при  $y=\pm 1$  оно равно нулю. В этом случае на высоте волновода укладывается целое число полуволн и наблюдается резонанс на распространяющейся поперечной SV-волне. Однако волновое поле формируется за счет не только распространяющейся SV-волны, но и неоднородной продольной волны, возбуждение которой в значительной степени зависит от коэффициента Пуассона. Поэтому частота краевого резонанса смещается относительно частоты  $\Omega_2 = 2.2$ .

Для коэффициентов Пуассона  $\nu \leq 0.2$  краевой резонанс наблюдается на частотах, меньших чем 2.2, а для  $\nu \geq 0.2$  – больших, чем 2.2.

Для анализа поведения P-волны при разложении первой распространяющейся волны на продольные и поперечные волны проследим за изменением углов отражения распространяющейся поперечной волны в зависимости от частоты. Для  $\nu=0.32$  такие данные приведены в табл. 2. С ростом частоты угол  $\gamma$  уменьшается, а угол  $\gamma_1$  – увеличивается. Сравнивая данные табл. 1 и 2, видим,

что на частоте  $\Omega_2 \geq 2.63$  угол падения поперечной волны на поверхность  $z=0$ ,  $|y| \leq 1$   $\gamma_1$  достигает критического значения и на более высоких частотах появляется распространяющаяся продольная волна. На частоте  $\Omega^* = 2.81$  при  $\nu = 0.32$  появляются распространяющиеся волны высших порядков. Существование в определенной частотной области распространяющейся Р-волны на поверхности  $z=0$  характерно для коэффициентов Пуассона  $0.22 \leq \nu \leq 0.42$ . Для коэффициентов Пуассона, лежащих вне указанного диапазона, распространяющиеся волны высших порядков появляются раньше, чем угол  $\gamma_1$  становится больше критического.

Рассмотрим отражение распространяющейся SV-волны от свободного торца для случая, когда на поверхности  $z=0$  существует распространяющаяся Р-волна. С поверхности  $y=-1$ ,  $z \geq 0$  на свободную поверхность  $z=0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  падает SV-волна вида

$$\psi^{(-)} = \Psi e^{i\xi_y y} e^{-ik_s z \sin \gamma_1}. \quad (13)$$

Отраженные волны представляют собой сумму поперечной (SV) и продольной (P) волн (см. рис. 4), которые описываются потенциалами  $\psi_1^{(-)}$  и  $\phi_1^{(-)}$ :

$$\begin{aligned} \psi_1^{(-)} &= \Psi_1^{(-)} e^{i\xi_y y} e^{ik_s z \sin \gamma_1}, \\ \phi_1^{(-)} &= \Phi_1^{(-)} e^{i\xi_y y} e^{ik_l z \sin \theta_1} \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты отражения для поперечной и продольной волн  $\Psi_1$  и  $\Phi_1$  находим из условия отсутствия напряжений на торце:

$$\frac{\sigma_{zz}(y, 0)}{2\mu} = 0, \quad \frac{\tau_{zy}(y, 0)}{2\mu} = 0.$$

Величины  $\Psi_1^{(-)}$  и  $\Phi_1^{(-)}$  имеют значения:

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(-)} &= \Psi \frac{4s_1(s_1^2 - 1)}{4s_1 r_1 + (s_1^2 - 1)^2}, \\ \Phi_1^{(-)} &= \Psi \frac{4s_1 r_1 - (s_1^2 - 1)^2}{4s_1 r_1 + (s_1^2 - 1)^2}, \end{aligned}$$

где  $s_1 = \text{tg } \gamma_1$ ;  $r_1 = \text{tg } \theta_1$ .

Поперечная SV-волна ( $\psi^+$ ), падающая на свободный торец, с поверхности  $y=1$ ,  $z \geq 0$ , описывается потенциалом (13) со знаком минус при  $i\xi_y y$  в показателе экспоненты. Аналогично, отраженные  $\psi_1^{(+)}$  и  $\phi_1^{(+)}$  волны описываются потенциалами (14) при замене знака в показателе экспоненты при  $i\xi_y y$  и с учетом того, что в этом случае

$s_1 = -\text{tg } \gamma_1$ ,  $r_1 = -\text{tg } \theta_1$ . Тогда, используя выражение (12), нормальное напряжение  $\sigma_{yy}(y, 0)$ , формируемое распространяющимися  $\phi^{(-)}$ ,  $\psi_1^{(-)}$ ,  $\phi_1^{(-)}$  и  $\phi^{(+)}$ ,  $\psi_1^{(+)}$ ,  $\phi_1^{(+)}$  волнами, запишем как

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}(y, 0)}{2\mu} &= -\cos(y\xi_y) \frac{2(s_1^2 - 1)}{4s_1 r_1 + (s_1^2 - 1)^2} \times \\ &\times \left( 2s_1(\xi_y^2 - \frac{\nu k_l^2}{1-\nu}) - \xi_y k_s (s_1^2 - 1) \sin \gamma_1 \right). \end{aligned}$$

Условие отсутствия напряжений на поверхностях  $y = \pm 1$ ,  $z \geq 0$  с учетом соотношений

$$\xi_y^2 = k_s^2 \cos^2 \gamma_1 = k_s^2 \sin^2 \gamma = \Omega_2^2 - \xi^2$$

приводит к уравнению

$$4\xi^2 = \left( 3 + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right) \Omega_2^2.$$

Для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.32$  с учетом распространяющихся SV- и Р-волн нормальное напряжение  $\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$  на частоте  $\Omega_2 = 2.67$ , т.е. резонансная частота в случае существования распространяющихся поперечной и продольной волн смещается в более высокочастотную область. Для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.4$   $\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = 0$  уже на частоте  $\Omega_2 = 2.82$ . При увеличении коэффициента Пуассона резонансная частота еще более повышается.

Таким образом, при отражении распространяющейся SV-волны от свободного торца на частоте  $\Omega_2 = 2.2$  существует резонанс на поперечной SV-волне для всех коэффициентов Пуассона. Для средних значений коэффициентов Пуассона ( $0.22 \leq \nu \leq 0.42$ ) угол падения поперечной волны на свободный торец в области существования только одной распространяющейся волны на частотах выше  $\Omega = 2.2$  достигает критического значения и, в определенной частотной зоне, превышает его. Здесь при отражении SV-волны от свободного торца появляется распространяющаяся Р-волна. В то же время на поверхностях  $y = \pm 1$ ,  $z \geq 0$  распространяющаяся Р-волна не может существовать. Это приводит к значительному возбуждению неоднородных волн. Частота, на которой нормальное напряжение  $\sigma_{yy}(\pm 1, 0)$ , обусловленное отраженными распространяющимися SV- и Р-волнами, равно нулю, зависит от коэффициента Пуассона и превышает частоту  $\Omega_2 = 2.2$ .

Следовательно, частота краевого резонанса лежит между частотой резонанса на поперечной волне  $\Omega_2 = 2.2$  и частотой резонанса на поперечной и продольной волнах.

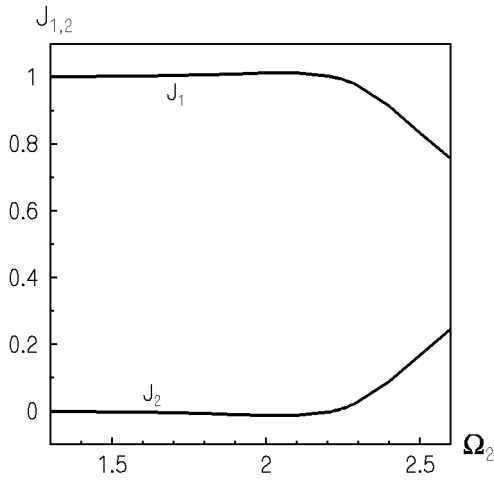


Рис. 5. Частотные зависимости  $J_1$  и  $J_2$  для  $\nu=0.32$

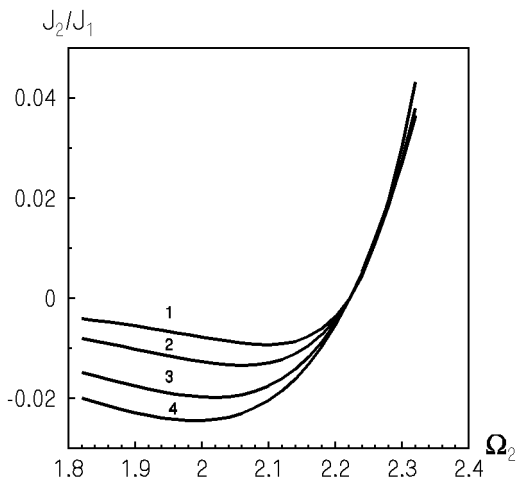


Рис. 6. Частотная зависимость отношения  $J_2/J_1$  для различных значений коэффициента Пуассона

Для  $\nu=0$  оба угла,  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , равны критическому значению. Более того, в области существования только одной распространяющейся волны они не зависят от частоты. Для коэффициента Пуассона  $\nu=0$  распространяющаяся поперечная волна отражается от поверхностей  $y=\pm 1, z \geq 0$  и  $z=0, |y| \leq 1$  под углом  $45^\circ$  для всех частот. При этом наблюдается явление полного сохранения типа движения. На частоте краевого резонанса при отражении SV-волны от обеих граничных поверхностей  $y=\pm 1, z \geq 0$  и  $z=0, -1 \leq y \leq 1$  продольная компонента движения отсутствует полностью только для коэффициента Пуассона  $\nu=0$ .

Величина нормальных и касательных напряжений, создаваемых распространяющейся нормаль-

ной волной в полуполосе, а так же их распределение по ее толщине существенно зависят от частоты. Поэтому соотношение между нормальными и касательными напряжениями удобно оценить через соответствующие составляющие среднего за период потока мощности, которые связаны с данными типами напряжений.

Оценивая распределения потока энергии в падающей волне между отраженными волнами при представлении распространяющейся нормальной волны суперпозицией SV- и P-волн, отражающихся от поверхностей  $y=\pm 1$ , заметим, что для компоненты вектора среднего за период потока мощности в направлении  $y$

$$P_y = -\frac{i\omega}{4} \left( \sigma_{yy} u_y^* - \sigma_{yy}^* u_y + \tau_{yz} u_z^* - \tau_{yz}^* u_z \right)$$

справедлив принцип суперпозиции средних потоков мощности, уносимых отдельными типами движения (SV- и P-волнами). Здесь знак \* означает комплексное сопряжение. Поскольку для неоднородной P-волны вектора среднего за период потока мощности компонента  $P_y$  равна нулю, то на частоте краевого резонанса поток мощности в направлении  $y$  связан только с поперечной SV-волной. Вдоль поверхностей  $y=\pm 1$  неоднородная P-волна энергию переносит. Поэтому компонента вектора потока мощности вдоль оси  $z$   $P_z$  содержит как поперечную (SV), так и продольную (P) волны.

Общее выражение среднего за период потока мощности  $E$  через поперечное сечение  $z=\text{const}$  определяется как [8]

$$E = -\frac{i\omega}{4} \int_{-1}^1 \left( \sigma_{zz} u_z^* - \sigma_{zz}^* u_z + \tau_{zy} u_y^* - \tau_{zy}^* u_y \right) dy. \quad (15)$$

Известно, что для нормальных волн в упругом волноводе справедлив принцип суперпозиции по энергии [8]. Средний за период поток мощности обусловлен только распространяющимися волнами и равен сумме мощностей, которые переносят распространяющиеся волны, существующие на данной частоте:

$$E = \sum_{n=1}^N E_n. \quad (16)$$

Составляющая потока мощности  $E_n$ , соответствующая  $n$ -ой распространяющейся нормальной волне, определяется соотношением

$$E_n = \frac{i\omega}{2} |C_n|^2 \int_{-1}^1 \left( \sigma_{zz} u_z + \tau_{zy} u_y \right) dy. \quad (17)$$



Для продольных колебаний справедливо выражение:

$$E_n = \mu\omega |C_n|^2 \Omega_2^2 (\xi_n^2 - \Omega_1^2) \frac{\Delta'(\xi_n)}{2}. \quad (18)$$

На частоте краевого резонанса существует только одна распространяющаяся волна. Нормальное напряжение определяется составляющей потока мощности  $J_1$ , а касательное напряжение –  $J_2$ :

$$J_1 = \int_{-1}^1 \mathcal{J}_1(y) dy,$$

$$J_2 = \int_{-1}^1 \mathcal{J}_2(y) dy.$$

Здесь

$$\mathcal{J}_1(y) = \frac{\sigma_{zz}(\xi_1, y) u_z(\xi_1, y)}{E_0};$$

$$\mathcal{J}_2(y) = \frac{\tau_{zy}(\xi_1, y) u_y(\xi_1, y)}{E_0};$$

$E_0$  – поток мощности, переносимой первой распространяющейся волной и определяемый выражением (18).

На рис. 5 представлена частотная зависимость  $J_1$  и  $J_2$  для  $\nu=0.32$ . В области низких частот  $J_2$  меньше нуля и увеличивается по модулю с ростом частоты. На частоте  $\Omega_2 = 2.1$   $|J_2|$  достигает своего максимального значения. При дальнейшем росте частоты  $|J_2|$  уменьшается, а при  $\Omega_2 = 2.22$   $J_2$  меняет знак. После этого с повышением частоты величина  $J_2$  монотонно возрастает.

На рис. 6 представлена частотная зависимость отношения  $J_2/J_1$  для различных значений коэффициента Пуассона. Кривая 1 соответствует коэффициенту Пуассона  $\nu=0.24$ , кривая 2 –  $\nu=0.32$ , кривая 3 –  $\nu=0.4$ , кривая 4 –  $\nu=0.48$ .

Независимо от коэффициента Пуассона, на частоте  $\Omega_2 \approx 2.2$   $J_2 = 0$ . При этой частоте наблюдается резонанс на SV-волне. Для  $\Omega_2 \leq 2.2$  величина  $J_2/J_1$  имеет экстремум, который смещается в более низкочастотную область с увеличением коэффициента Пуассона. Кроме того, с увеличением  $\nu$  увеличивается максимум  $|J_2/J_1|$ . Таким образом, с увеличением коэффициента Пуассона возрастает роль касательных напряжений и их максимальное отрицательное значение смещается в более низкочастотную область.

С другой стороны, с увеличением коэффициента Пуассона растет частота краевого резонанса. Для коэффициентов Пуассона  $\nu \leq 0.22$  на частоте краевого резонанса величина  $J_2$  отрицательна. При

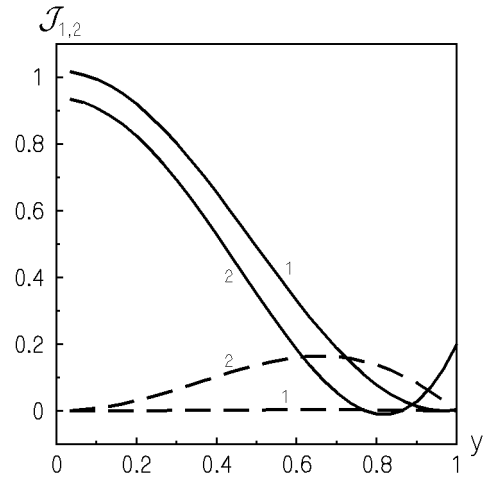


Рис. 7. Профили величин  $\mathcal{J}_1(y)$  и  $\mathcal{J}_2(y)$  на частоте краевого резонанса для различных значений коэффициента Пуассона

этом частота, на которой  $|J_2/J_1|$  достигает максимального значения, не совпадает с  $\Omega_e$ . Для  $\nu \geq 0.22$  на частоте краевого резонанса с ростом коэффициента Пуассона увеличивается процентное содержание сдвиговой компоненты в потоке мощности, который соответствует первой распространяющейся волне. В табл. 1 приведены значения  $J_1$  и  $J_2$  на частоте краевого резонанса для различных значений  $\nu$ . Таким образом, на частоте краевого резонанса процентное содержание сдвиговой компоненты в потоке мощности, который переносится первой распространяющейся волной, значительно изменяется в зависимости от  $\nu$ .

С ростом частоты наблюдаются существенные изменения в распределении сдвиговой и нормальной компонент по толщине волновода. На рис. 7 представлены зависимости  $\mathcal{J}_1$  и  $\mathcal{J}_2$  от координаты  $y$  на частоте краевого резонанса для различных коэффициентов Пуассона. Для коэффициентов Пуассона  $\nu \leq 2.4$   $\mathcal{J}_1$  монотонно падает при изменении  $y$  от средней плоскости до поверхностей  $y = \pm 1$ . При этом величина  $\mathcal{J}_2$  отрицательна и имеет относительный экстремум. Для больших коэффициентов Пуассона частота краевого резонанса такова, что  $\mathcal{J}_2$  становится положительным и также имеет относительный экстремум. Нормальная компонента изменяется по толщине волновода более сложным образом и также имеет относительный минимум, в точке которого  $\mathcal{J}_1 < 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены особенности краевого резонанса в зависимости от коэффициента Пуассона. Установлено, что эффективность проявления краевого резонанса и частота его существования ( $\Omega_e$ ) существенно зависят от коэффициента Пуассона. При изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0.5 частота краевого резонанса увеличивается от 1.99 до 2.61, а степень возбуждения первой неоднородной волны падает. Добротность резонанса с ростом  $\nu$  падает. Рассматривая первую распространяющуюся волну как суперпозицию SV- и P-волн, отметим, что на частоте краевого резонанса на поверхностях  $y = \pm 1$ ,  $z \geq 0$  SV-волна является распространяющейся, в то время как P-волна – неоднородной. На частоте  $\Omega_2 = 2.2$  (практически для всех коэффициентов Пуассона) на ширине полуполосы укладывается целое число SV-полуволн ( $\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0$ ). Для средних значений коэффициента Пуассона  $0.22 \leq \nu \leq 0.42$  существует диапазон частот, на котором поперечная SV-волна падает на свободную поверхность  $|y| \leq 1$ ,  $z = 0$  под углом больше критического и существует распространяющаяся продольная P-волна. В этом случае также существует частота  $\Omega_e^1$ , на которой  $\sigma_{yy}(\pm 1, 0) = z$  с учетом SV- и P-волн. Частота краевого резонанса лежит между  $\Omega_2 = 2.2$  и  $\Omega_e^1$  для средних значений коэффициента Пуассона.

Соотношение между нормальным и касательным напряжениями на частоте краевого резонанса существенно зависит от коэффициента Пуассона.

1. Shaw E. A. G. On the resonant vibration of thin barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **20**, N 1.– P. 38–50.
2. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Amer.– 1957.– **29**, N 2.– P. 189–194.
3. Onoe M., Pao Y. H. Edge mode of thin rectangular plate of barium titanate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1961.– **33**, N 11.– P. 1628.
4. Gazis D. C., Mindlin R. D. Extensional vibration and waves in a circular disk and semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– **27**, N 3.– P. 541–547.
5. McNiven H. D., Perry D. C. Axially symmetric waves in finite, elastic rods // J. Acoust. Soc. Amer.– 1962.– **34**, N 4.– P. 433–437.
6. Onoe M. Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod // J. Acoust. Soc. Amer.– 1961.– **33**, N 11.– P. 1627.
7. Ikegami S., Ueda I., Kobayashi S. Frequency spectra of resonant vibration in disks plates of  $PbTiO_3$  piezoelectric ceramics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1974.– **55**, N 2.– P. 339–344.
8. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
9. Torvik P. J. Reflection of wave trains in semi-infinite plate // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– **41**, N 2.– P. 346–353.
10. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Об эффективности возбуждения краевой моды в упругой полуполосе // Прикл. мех.– 1998.– **34**, N 2.– С. 17–25.
11. Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В. Краевой резонанс при вынужденных изгибных колебаниях полуполосы // Акуст. ж.– 1991.– **37**, N 5.– С. 908–914.
12. EerNisse E. P. Coupled-mode approach to elastic vibration analysis // J. Acoust. Soc. Amer.– 1966.– **40**, N 5.– P. 1045–1050.
13. Auld B. A., Tsao E. J. A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate // IEEE Trans. Son. Ultrason.– 1977.– **24**, N 5.– P. 317–326.
14. Kagawa Y., Yamabuship J. Finite-element approach for a piezoelectric circular rod // IEEE Trans. Son. Ultrason.– 1976.– **23**, N 6.– P. 379–385.
15. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibration of semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Amer.– 2000.– **107**, N 3.– P. 1383–1393.
16. Roitberg J., Vassiliev D., Wilde M. V. Edge resonance in an elastic semi-strip // Q. J. Mech. Appl. Math.– 1998.– **51**.– P. 1–13.