

УДК 534.23

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ДИСКОМ В АКУСТИЧЕСКИ ЖЕСТКОМ ЭКРАНЕ

ПЕТР В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 5.05.1999 ◊ Пересмотрено 6.09.2000

Приведено решение задачи излучения звука диском в бесконечном плоском экране. С помощью рядов Фурье и интегрального подхода получено в замкнутом виде выражение для импеданса излучения при произвольном радиальном распределении скорости на поверхности диска. Рассмотрены случаи излучения звука диском при различных граничных условиях заделки в экране. Дан сравнительный анализ полученного решения с известными решениями Релея, Баукампа, Причарда и Портера.

Наведено розв'язок задачі випромінювання звуку диском у нескінченному плоскому екрані. За допомогою рядів Фур'є та інтегрального підходу отримано у замкнутому вигляді вираз для імпедансу випромінювання при довільному радіальному розподілі швидкості на поверхні диску. Розглянуті випадки випромінювання звуку диском за різних граничних умов. Дано порівняльний аналіз отриманого розв'язку з відомими розв'язками Релея, Баукампа, Причарда й Портера.

A solution of disk's sound radiation problem in an infinite plane is given. The radiation impedance for arbitrary radial velocity distribution is obtained with use of Fourier series and integral method. The problem on sound radiation by disk is studied for different edge conditions. The obtained radiation impedance is compared with well known solutions by Rayleigh, Bouwkamp, Pritchard and Porter.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача излучения звука диском остается актуальной и сегодня. Современные направления исследования в этой области условно можно классифицировать следующим образом. Наибольшее внимание уделяется исследованиям пластин, излучающих звук под воздействием полей различной физической природы в среды с разнообразными физическими свойствами [5–8]. Не снижается интерес и к задачам излучения пластинами несколько усложненной формы: переменная толщина, ребра жесткости и др. [9, 10]. Продолжаются исследования связи механических колебаний пластины и акустического излучения [11, 12]. И, наконец, остаются актуальными классические задачи излучения плоскими излучателями, гибкими дисками, пластинами различной геометрии с разными граничными условиями [1–4, 13, 14]. Рассматриваемая в данной работе задача относится именно к этому классу задач.

На сегодняшний день существует лишь небольшое количество работ, в которых приводится решение данной задачи для различных осесимметричных распределений колебательной скорости на поверхности поршня или диска. Это связано с тем, что для произвольного осесимметричного нормального распределения скорости $v_n(r)$ существенно затрудняется определение характеристик ближнего поля. Трудности математического характера приводят к тому, что в ряде случаев при

решении задачи пользуются выражениями $v_n(r)$ в достаточно простом виде. Так, в [4] предполагается распределение $v_n(r)$ в виде полинома по r/r_0 (r_0 – радиус диска):

$$v_n(r) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n. \quad (1)$$

В зависимости от граничных условий, в рассмотрении остаются лишь несколько первых коэффициентов α_i . Однако при фактическом вычислении коэффициентов полиномиального разложения (1) в общем случае возникают трудности вычислительного характера. Это и понятно, поскольку данный подход приводит к многократному интегрированию по частям и очень громоздким рекуррентным соотношениям, количество которых возрастает с ростом принимаемых к рассмотрению членов ряда (1). Описанный подход позволяет понять поведение диска лишь при достаточно малых волновых числах k : $kr_0 \leq 2.0$. В диапазоне $2.0 \leq kr_0 \leq 2.25$ точность полученных результатов импеданса излучения [16] существенно снижается. Для значений $kr_0 \geq 2.5$ данные вообще не приводятся.

Существует также методика определения собственного и взаимного импедансов излучения двух жестких поршней в бесконечном акустически жестком полупространстве, предложенная Причардом [3]. Она основана на методе Баукампа [2]. В работе [1] представлен анализ решения Причарда для взаимного импеданса излучения. Недоста-

ток данного подхода состоит в том, что он является наиболее трудоемким из известных для данного класса задач. Действительно, выражение для взаимных импедансов излучения R_{ij} и X_{ij} [3, 4] содержит в общем случае шестикратные суммы, что естественным образом усложняет получение окончательных числовых результатов. Поэтому числовые значения для взаимных импедансов излучения были получены лишь при $kr_0 = 1$. Для значений $kr_0 \geq 1$ расчеты были затруднены [3], поскольку с увеличением kr_0 сходимость рядов ухудшается. Это и понятно, так как методика доказательства сходимости решения данным методом сама по себе сложна [17], что приводит к трудностям вычислительного характера.

И, наконец, проанализируем еще один метод вычисления акустического импеданса мембраны, основанный на вычислении “комплексной мощности” [17]. Получаемые кратные интегралы в общем случае аналитически вычислить нельзя. Подынтегральные выражения в явном виде представляют собой квадраты обобщенных гипергеометрических функций класса ${}_3F_4$. Таблиц интегралов для таких функций нет. Есть лишь отдельные интегралы вырожденных гипергеометрических функций более низких порядков. Почленное же интегрирование спецфункций типа ${}_3F_4 \cdot {}_3F_4$, т.е. произведения бесконечных гипергеометрических ряда по полубесконечному промежутку, очень затруднено. Вообще говоря, расчет только лишь обобщенной гипергеометрической функции с определенной точностью в широком диапазоне вариации параметров сталкивается с различного рода особенностями самой функции.

В данной работе предлагается решение рассматриваемой задачи с помощью выражения амплитуды колебательной скорости в виде рядов Фурье. Этот подход позволяет любое сколь угодно сложное распределение скорости разложить в ряд Фурье и впоследствии использовать это для вычисления характеристик ближнего и дальнего полей. При таком подходе трудности сводятся к выбору определенного количества шагов численного интегрирования трехкратного интеграла, что, хотя и требует определенных вычислительных затрат, однако уже не составляет серьезных проблем для современных ЭВМ.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим круглый гибкий диск (поршень, как частный случай) радиуса r_0 . Импеданс излучения

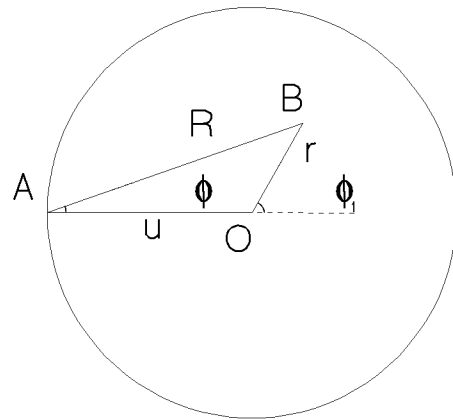


Рис. 1. Круглый диск (системы координат)

диска определяется по известной формуле [4, 18]

$$Z = \frac{2W}{v_{\text{пр}}^2}, \quad (2)$$

где $v_{\text{пр}}$ – приведенная скорость, а излучаемая мощность W определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} \int_S p v dS. \quad (3)$$

Здесь p и v – распределения скорости и давления на поверхности излучателя S .

Давление является функцией координат и может быть выражено с помощью интеграла Рэлея (Гюйгенса – Френеля) [1]:

$$p = i \frac{\rho c}{\lambda} \int_S \frac{e^{-ikR} v_n}{R} dS, \quad (4)$$

где R – расстояние между любыми точками, расположенными на излучаемой поверхности (рис. 1). Пусть в одной из точек диска A расположен центр системы координат (R, ϕ) , расстояние от которого до некоторой другой точки B равно R . Кроме того, введем u – расстояние от центра данной системы координат до центра диска.

Дальнейшие рассуждения в точности отображают подход Рэлея [1], в результате применения которого давление в точке наблюдения A запишется в виде

$$p = i \frac{A \rho c}{\lambda} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2u \cos \phi} v_n(R) e^{-ikR} dR. \quad (5)$$

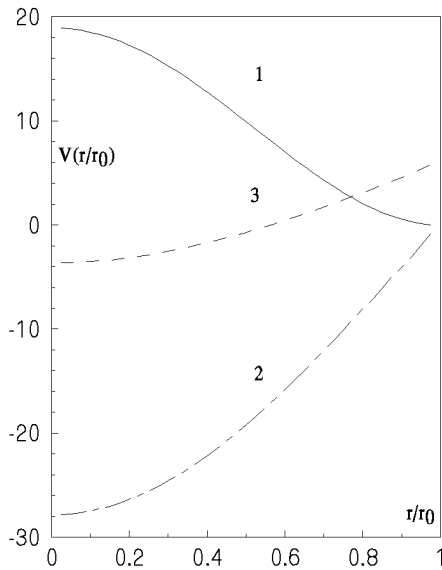


Рис. 2. Распределение амплитуды колебательной скорости в зависимости от граничных условий

Выражение для давления p в значительной мере зависит от формы амплитуды колебательной скорости. В то же время, распределение амплитуд колебательной скорости v_n для диска описывается через известные спецфункции в полярной системе координат (r, ϕ_1) с началом в центре диска. Однако осесимметричное распределение скорости v_n , независимо от его представления в системе координат (r, ϕ_1) , в системе координат (R, ϕ) уже несимметрично, что усложняет дальнейшие вычисления.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Когда речь идет о произвольном распределении скорости $v_n(r)$, необходимо уточнить, что под этим подразумевается. Поскольку здесь предлагается интегральный подход решения задачи излучения с использованием рядов Фурье, то будем считать, что рассматриваемые функции $f(r) = v_n(r)$ принадлежат классу L_2 . Известно, что любую функцию $f \in L_2$ можно представить в виде ряда Фурье. Следовательно, если $v_n \in L_2$, то

$$v_n(r) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\pi nr/r_0}, \quad (6)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_n(r) e^{-ikr} dr. \quad (7)$$

Подставим выражение (6) в соотношение (4) и выполним интегрирование, аналогичное приведенному выше:

$$p = i \frac{4\rho c}{\lambda} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2u \cos \phi} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\pi nr/r_0} \right) e^{-ikR} dR. \quad (8)$$

Под интегралом находится функция, которая зависит от переменной R . Радиус-векторы R и r двух рассмотренных выше систем координат связаны соотношением

$$r = (R^2 + u^2 - 2Ru \cos \phi)^{1/2}. \quad (9)$$

Заменив r на R , получим

$$p = i \frac{4\rho c}{\lambda} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2u \cos \phi} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\pi nr(R)/r_0} \right) e^{-ikR} dR. \quad (10)$$

После интегрирования давление есть некоторая функция от u .

Подставив $p(u)$ в выражение (3), вычислим комплексную мощность. Поскольку при радиально-симметричном возбуждении диска давление не зависит от угловой координаты, то при расчете W интегрирование по ϕ фактически сводится к простому умножению на 2π , а выражение для мощности имеет вид

$$W = \pi \int_0^{r_0} p(u) v_n(u) u du. \quad (11)$$

Таким образом, с учетом того, что p выражается двойным интегралом, расчет импеданса излучения посредством комплексной мощности сводится к вычислению тройного интеграла.

3. РАСЧЕТ ИМПЕДАНСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть распределение скорости $v_n(r)$ соответствует известным и общепринятым условиям загрузки: жестко защемленный, шарнирно-опертый, свободный сплошной диск. Известно [20], что распределение амплитуды смещения диска $U(r)$, а значит и колебательной скорости, представляет собой линейную комбинацию счетного числа функций $J_n(\lambda_k r)$ и $I_n(\lambda_k r)$, коэффициенты в которой

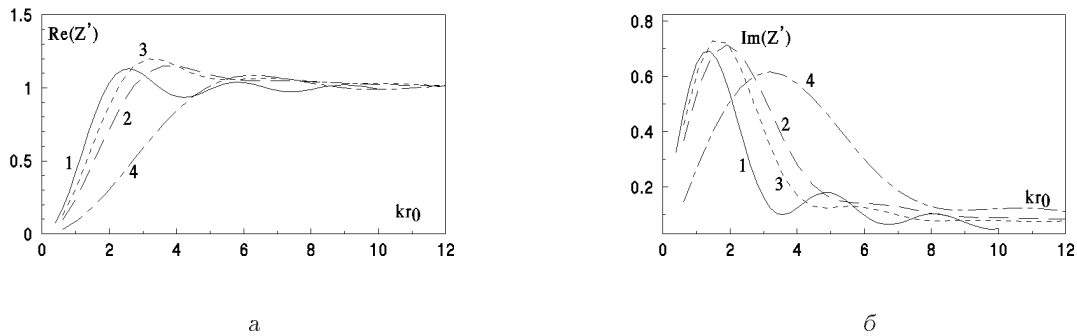


Рис. 3. Импеданс излучения диска Z' :
а - $\text{Re } Z'$, б - $\text{Im } Z'$,

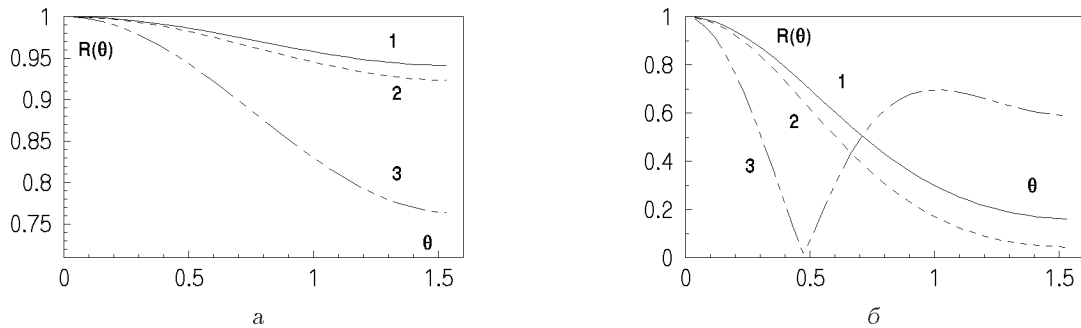


Рис. 4. Диаграмма направленности диска $R(\theta)$:
а - при $kr_0 = 1.0$, б - при $kr_0 = 5.0$

однозначно определены условиями заделки и собственными числами λ_k .

Особый интерес представляют колебания диска на нулевой моде, то есть когда

$$v_n(r) = I_0(\lambda_0 r) - \frac{I_0(\lambda_0 r_0)}{J_0(\lambda_0 r_0)} J_0(\lambda_0 r), \quad (12)$$

для случаев жесткого защемления ($\lambda_0 = 3.196$) и шарнирного опирания ($\lambda_0 = 2.231$), или

$$v_n(r) = \frac{I_0'(\lambda_0 r_0) - r_0 \lambda_0 I_0''(\lambda_0 r_0)}{r_0 \lambda_0 J_0''(\lambda_0 r_0) - J_0'(\lambda_0 r_0)} \times \\ \times J_0(\lambda_0 r) + I_0(\lambda_0 r), \quad (13)$$

в случае свободного опирания ($\lambda_0 = 3.014$).

На рис. 2 изображены данные распределения скорости $v_n(r)$. Кривые 1–3 соответствуют жестко защемленному, шарнирно-опертому и свободному диску. Для жесткого защемления и шарнирного опирания амплитуды скорости знакопостоянны. В качестве точки приведения для $v_n(r)$ во всех случаях выбиралось значение скорости при

$r/r_0 = 0$. Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать только импеданс излучения и диаграмма направленности системы, не зависящие от амплитуды возбуждения, для упрощения записи выражений (12) и (13) скорости приведения не были отнормированы к единой величине для всех рассмотренных случаев.

На рис. 3 приведены частотные зависимости импеданса излучения для диска с распределением колебательной скорости $v_n(r)$. При этом для сравнения на графике дана кривая 1 (классический результат для поршня в жестком экране). Видно, что для жесткого защемления (кривая 2) и шарнирного опирания (кривая 3) обе составляющие Z' близки друг к другу. В случае свободного диска $v_n(r)$ имеет нейтральную окружность и меняет знак на противоположный при $r/r_0 = 0.58$. Это различие количественно влияет на формирование $\text{Re } Z'$ и $\text{Im } Z'$ (кривая 4). В низкочастотном диапазоне $\text{Re } Z'$, а значит и излучаемая мощность, достаточно мало по сравнению с жестко защемленным и шарнирно-опертым дисками. При этом в диапазоне $4 \leq kr_0 \leq 7$ наблюдается относительное

возрастание реактивной составляющей $\text{Im } Z'$. В области высоких значений $kr_0 > 7$ излучательные свойства диска при различных условиях заделки в экран стабилизируются и становятся подобными между собой, приближаясь к известному случаю поршневого излучения (кривая 1).

4. РАСЧЕТ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

В задачах данного рода определенный интерес представляет дальнейшее поле, то есть диаграмма направленности излучения

$$R(\theta) = \frac{\sum_{-N}^N C_n \int_0^{r_0} J_0(kr \sin \theta) \cos(\pi nr/r_0) r dr}{\sum_{-N}^N C_n \int_0^{r_0} \cos(\pi nr/r_0) r dr}. \quad (14)$$

Здесь θ – угол между выбранным направлением и нормалью к поверхности плоского экрана. Диаграммы направленности, приведенные на рис. 4, показали, что направленные свойства жестко заземленного диска (кривая 1) близки к известной поршневой диаграмме. Следовательно, распределение энергии излучения в дальней зоне также похоже. Для шарнирно опертого диска (кривая 2) диаграмма направленности несколько круче, что говорит о более направленном излучении. Излучение свободным диском (кривая 3) при малых значениях kr_0 наиболее направлено из всех случаев.

Интересным является то, что для свободного диска уровень бокового излучения (см. рис. 4, б) при $kr_0 = 5.0$ становится достаточно высоким в широком угловом секторе (и равен примерно 0.6 уровня основного излучения). Диаграмма направленности в этом случае является секторной. Для более высоких значений kr_0 тенденция секторности сохраняется, в то время как для других случаев заделки диска в экране диаграммы достаточно узко направлены.

ВЫВОДЫ

1. Получено в замкнутом виде решение задачи излучения диском в жестком экране с помощью рядов Фурье.
2. В качестве примеров применения данного подхода изучено излучение диска для различных граничных условий. Получены характеристики ближнего и дальнего полей. Проведен сравнительный анализ результатов.

3. Применяемый подход можно использовать для задач излучения, в которых излучающая поверхность имеет форму круга и размещена в бесконечном акустически жестком экране. При этом осесимметричное радиальное распределение скорости может быть произвольным (в зависимости от свойств излучающего объекта и способа размещения его в экране) настолько, чтобы его можно было разложить в ряд Фурье.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает благодарность профессору И. В. Вовку за помощь в физической постановке задачи и ряд полезных замечаний по осмыслению полученных результатов, а также структурной организации данной статьи.

1. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. 2.– М.: ГИИТЛ, 1955.– 475 с.
2. Bouwkamp C. J. A contribution to the theory of acoustic radiation // Phil. Res.– 1945/1946.– N 1.– P. 251.
3. Pritchard R. L. Mutual acoustics impedance between radiations in an infinite rigid plane // J. Acoust. Soc. Amer.– 1960.– 32.– P. 730.
4. Porter D. T. Self- and mutual-radiation impedance and beam patterns for flexural disks in a rigid plane // J. Acoust. Soc. Amer.– 1964.– 36.– P. 1154.
5. Nakogawa Noritoshi, Sekiguchi Yasuhisa, Higashi Akihiko Изучение механизма возбуждения звука с помощью колебательной и звуковой энергии. Первое сообщение. Влияние энергии диссипации на поток колебательной и звуковой энергии // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C.– 1995.– 61, N 590.– С. 3820–3826 (пер. с англ.).
6. Leniowska Lueyna Acoustic pressure of a circular plate vibrating in a finite baffle with fluid loading // Proc. Int. Symp. Hydroacoust. and Ultrason.– Gdansk-Jarata, 12–16 May 1997.– P. 311–316.
7. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с.
9. Berry A., Locqueten C. Vibration and sound radiation of fluid-loaded stiffened plates with consideration of in-plane deformation // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– 100 N 1.– P. 312–319.
10. Gray B. A. Acoustic radiation from periodic and sectionally aperiodic rib-stiffened plates // J. Acoust. Soc. Amer.– 1994.– 95 N 1.– P. 256–264.
11. Frendi A., Maestrello L., Bayliss A. Coupling between plate vibration and acoustic radiation // J. Sound Vib.– 1994.– 197, N 2.– P. 207–226.

12. Романов В. Н. Излучение звука при распространении изгибной волны по пластинке переменной толщины // Акуст. ж.– 1997.– **43**, N 2.– С. 264–267.
13. Atalla N., Nicolas J., Gauthier C. Acoustic radiation of an un baffled vibrating plate with general elastic boundary conditions // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– **99** N 3.– P. 1484–1494.
14. Мелешко В. В. Генерация акустических волн в полупространстве прямоугольным излучателем конечных размеров // Акуст. вісн.– 1999.– **2**, N 1.– С. 42–49.
15. Woollett R. S. Theory of the piezoelectric flexural disk transducer with applications to underwater sound // US Navy Underwater Sound Lab. Rept.– No. 490 (5 Dec. 1960).
16. Sherman C. H. Sound pressure distributions and radiation impedance for flexible disks. Part II // US Navy Underwater Sound Lab. Tex. Mem.– No. 912-59-62 (17 July 1962).
17. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2.– М.: Мир, 1976.– 542 с.
18. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики.– Л.: Судостроение, 1972.– 352 с.
19. Лепендин Л. Ф. Акустика.– М.: Высшая школа, 1978.– 448 с.
20. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем.– М.: Машиностроение, 1970.– 736 с.