

УДК 532.5:534.222.2

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОФИЛЯ ВОЛНЫ, ГЕНЕРИРУЕМОЙ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТЬЮ В ЖИДКОСТИ

В. Г. КОВАЛЕВ, В. А. ПОЗДЕЕВ

*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев*

Получено 29.05.2000

Показано, что при решении начально-краевой задачи с подвижными границами для линейного волнового уравнения следует в общем случае пользоваться интегралом Коши–Лагранжа, учитывая две квадратичные составляющие. При малой скорости расширения цилиндрической полости нулевого начального радиуса основной составляющей является квадрат скорости. При увеличении скорости расширения возрастает вклад второй составляющей. Для плоских волн вначале расширения полости ненулевого начального радиуса и в дальней зоне можно пользоваться линейным интегралом, так как сумма квадратичных составляющих равна нулю.

Показано, що при розв'язанні початково-краєвої задачі з рухомими межами для лінійного хвильового рівняння потрібно в загальному випадку користуватись інтегралом Коші–Лагранжа, враховуючи дві квадратичні складові. При малій швидкості розширення циліндричної порожнини з нульовим початковим радіусом основною складовою є квадрат швидкості. При збільшенні швидкості розширення зростає внесок другої складової. Для плоских хвиль на початку розширення порожнини з ненульовим початковим радіусом і в дальній зоні можна користуватись лінійним інтегралом, оскільки сума квадратичних складових дорівнює нулю.

It is shown that when solving an initial–boundary problem with moving boundaries for linear wave equation in the common case one should use the Cauchy–Lagrange integral taking into account the two quadratic components. At low expansion speed for a cylindrical cavity with zero initial radius the main component is the square of a speed. At increase of the expansion speed for a cavity with non-zero initial radius and in far field it is possible to use a linear integral because the sum of quadratic components is equal to zero.

### ВВЕДЕНИЕ

При подводном взрыве ограниченной мощности (электровзрыв, оптический пробой) в жидкости образуется плазменная или парогазовая полость, при расширении которой генерируется волна давления. Большое практическое значение имеет нахождение аналитической зависимости между профилем волны и временным изменением радиуса полости. Такие зависимости могут быть определены в рамках решения линейного волнового уравнения. Результат, полученный из решения соответствующей начально-краевой задачи, может быть уточнен за счет учета нелинейных составляющих в интеграле Коши–Лагранжа, однако корректность такого подхода требует дополнительного исследования.

Как известно [1], в рамках модели несжимаемой идеальной жидкости потенциал скоростей  $\Phi$  находится из решения соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi=0,$$

а давление в жидкости определяется затем точным интегралом Коши–Лагранжа

$$P = -\rho_0 \left[ \dot{\Phi} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 \right], \quad (1)$$

где  $P$  – избыточное давление;  $\rho_0$  – плотность жидкости;  $\nabla$  – оператор градиента;  $t$  – время. Точка сверху обозначает частную производную по времени.

В задачах линейной акустики потенциал скоростей находится из начально-краевой задачи для линейного волнового уравнения

$$\Delta\Phi - C_0^2\ddot{\Phi} = 0,$$

где  $C_0^2$  – невозмущенная скорость звука. Граничное условие задается на фиксированном положении возмущающей границы. Избыточное давление находится из линейного волнового интеграла Коши–Лагранжа [2]

$$P = -\rho_0\dot{\Phi}. \quad (2)$$

В [3] показано, что, по крайней мере, в задаче о расширении в линейной акустической среде с цилиндра с нулевым значением начального радиуса в интеграле Коши–Лагранжа следует удерживать член с квадратом скорости, т.е. пользоваться интегралом вида (1). В [4–6] подход [2] для цилиндра распространяется на все виды симметрии волнового движения сжимаемой жидкости. Однако в [3] отмечается, что вблизи плоского поршня пренебрегать сжимаемостью в интеграле Коши–Лагранжа нельзя. В [7, 8] расширение пределов

применимости акустического приближения предлагается провести за счет учета двух нелинейных членов:

$$P = -\rho_0 \left[ \dot{\Phi} + \frac{1}{2}(\nabla\dot{\Phi})^2 - \frac{1}{2C_0^2}(\nabla\dot{\Phi})^2 \right]. \quad (3)$$

Важность вопроса учета нелинейностей в интеграле Коши–Лагранжа заключается в необходимости уточнить решение краевой задачи в рамках линейного волнового уравнения. Решение этого вопроса лежит в определении границ применимости разновидностей интеграла (1)–(3). Таким образом, целью данной работы является определение условий корректного использования того или иного вида интеграла Коши–Лагранжа.

### 1. ИНТЕГРАЛ ОБЩЕГО ВИДА ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Полагаем, что движение идеальной сжимаемой жидкости описывается уравнением движения Эйлера в неподвижной системе координат, уравнением состояния Тета и уравнением неразрывности. Первые два уравнения запишем в виде

$$\dot{v} + v\dot{v} = \frac{\dot{P}}{\rho}, \quad (4)$$

$$P = A \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad (5)$$

где  $A$ ,  $n$  – постоянные величины (для воды  $A=300$  МПа,  $n=7$ );  $v$  – скорость жидкости; штрих сверху обозначает частную производную по пространственной координате  $r$ , введенной для описания одномерного движения среды.

Полагаем движение жидкости потенциальным ( $v = \partial\Phi/\partial r$ ). Введем общепринятое обозначение

$$h = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dP}{\rho} = - \left[ \dot{\Phi} + \frac{(\dot{\Phi})^2}{2} \right]. \quad (6)$$

Выполняя в (6) интегрирование с учетом выражения (5), получаем

$$\bar{P} = \frac{1}{n} \left[ (1 + (n-1)\bar{h})^{n/(n-1)} - 1 \right], \quad (7)$$

где  $\bar{P} = P/(\rho_0 C_0^2)$ ;  $\bar{h} = h/C_0^2$ .

Полагая, что  $\bar{h} \ll 1$ , выполняем разложение правой части соотношения (7) в ряд Тейлора:

$$\bar{P} = \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 - \frac{n-1}{6}\bar{h}^3 + \dots \quad (8)$$

Выражая в ряде (8) величину  $\bar{h}$  через потенциал скоростей, получаем с точностью до квадратичных членов

$$\bar{P} = -\frac{\dot{\Phi}}{C_0^2} - \frac{(\dot{\Phi})^2}{2C_0^2} + \frac{(\dot{\Phi})^2}{2C_0^4}. \quad (9)$$

Удобно записать уравнение (9) в безразмерном виде

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3, \quad (10)$$

где

$$\bar{P}_1 = -\frac{\dot{\Phi}}{C_0^2}; \quad (11)$$

$$\bar{P}_2 = -\frac{\dot{\Phi}}{2C_0^2} = -\frac{\bar{v}^2}{2}, \quad \bar{v} = \frac{v}{C_0}; \quad (12)$$

$$\bar{P}_3 = \frac{(\dot{\Phi})^2}{2C_0^4} = \frac{\bar{P}_1^2}{2}. \quad (13)$$

Таким образом, в самом общем случае при учете нелинейностей в интеграле Коши–Лагранжа необходимо учитывать две составляющие. Далее исследуем вклады каждой составляющей в выражениях (9)–(13) для различных случаев одномерного движения среды, вызванного расширением полости (движением поршня).

### 2. ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Как известно [2], в случае уходящих плоских волн в линейном приближении справедливо соотношение

$$\dot{\Phi} + C_0\dot{\Phi} = 0, \quad (14)$$

из которого следует  $\dot{\Phi} = -C_0\dot{\Phi}$ . Используя полученную связь в виде подстановки в выражения (10)–(13), получаем соотношения для составляющих давления в интеграле Коши–Лагранжа:

$$\bar{P}_1 = \bar{v}, \quad \bar{P}_2 = -\frac{\bar{v}^2}{2}, \quad \bar{P}_3 = \frac{\bar{v}^2}{2}. \quad (15)$$

Из соотношений (15) следует, что  $\bar{P} = \bar{P}_1$ . Таким образом, в случае плоских волн для определения давления можно пользоваться интегралом вида (2) или интегралом вида (3), который в данном случае тождественен (2). Применение интеграла вида (1), как рекомендуется в [4–6], только увеличивает погрешность.

Определим, как влияет на соотношение между составляющими интеграла учет нелинейности самого волнового уравнения. Как известно [9], нелинейное волновое уравнение, описывающее распространение простой волны Римана, имеет вид

$$\dot{v} + u(v)\dot{v} = 0, \quad (16)$$

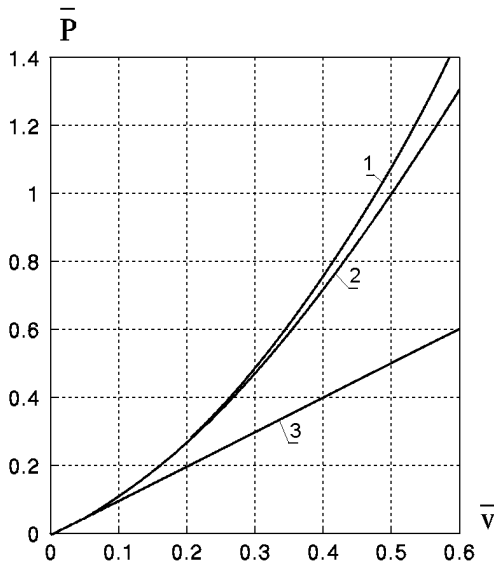


Рис. 1. Зависимость давления на плоский поршень от скорости его движения:

1 - нелинейный интеграл общего вида,  
 2 - разложение с учетом двух членов ряда (21),  
 3 - разложение с учетом одного члена ряда (21)

где

$$u(v) = C_0 \left( 1 + \frac{n-1}{2} \bar{v} + \bar{v} \right) = C_0 \left( 1 + \frac{n+1}{2} \bar{v} \right). \quad (17)$$

Следуя [10], отметим, что вторая составляющая в выражении (17) отражает нелинейность уравнения состояния (2), а третья – гидродинамическую нелинейность в интеграле (1). Для жидкости больший вклад дает вторая составляющая, а для газа – наоборот.

Из уравнения (16) найдем волновое уравнение, которое удобно для сравнения с линейным уравнением (14). Переходя в (16) к потенциалу скоростей, после интегрирования всех членов по координате  $r$ , получаем нелинейное волновое уравнение для потенциального течения, эквивалентное уравнению (16):

$$\dot{\Phi} + u_1(v)\dot{\Phi} = 0, \quad (18)$$

где

$$u_1(v) = C_0 \left( 1 + \frac{n+1}{4} \bar{v} \right).$$

Учитывая, что  $\dot{\Phi}/C_0^2 = \bar{P}$ , из выражения (18) полу-

чаем

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \bar{v} + \frac{n+1}{4} \bar{v}^2, \\ \bar{P}_2 &= -\frac{\bar{v}^2}{2}, \\ \bar{P}_3 &= \frac{\bar{v}^2}{2} + O(\bar{v}^3). \end{aligned} \quad (19)$$

В этом случае  $\bar{P} = \bar{P}_1 + O(\bar{v}^3)$ .

Подводя итоги полученным результатам для плоских волн, отметим следующие соотношения для составляющих давления в интеграле Коши–Лагранжа: в случае линейного волнового уравнения

$$\begin{aligned} \bar{P}_2 + \bar{P}_3 &= 0, \\ \bar{P} &= \bar{P}_1 = \bar{v}, \end{aligned}$$

а в случае нелинейного –

$$\bar{P}_2 + \bar{P}_3 = O(\bar{v}^3),$$

$$\bar{P}_1 = \bar{v} + \frac{n+1}{4} \bar{v}^2.$$

Отсюда, в частности, вытекает условие применимости линейного волнового уравнения для плоских волн:

$$|\bar{v}| \ll \frac{4}{n+1}.$$

Таким образом, в случае плоских волн и линейного волнового уравнения можно пользоваться линейным интегралом (2). Рассмотрим подробнее случаи нелинейного волнового уравнения для плоских волн Римана. С учетом (18) найдем следующее представление для величины  $\bar{h}$  по [6]:

$$\bar{h} = \bar{v} + \frac{n-1}{4} \bar{v}^2.$$

Подставив полученную зависимость  $\bar{h}(\bar{v})$  в соотношение (7), получим известное выражение для давления [9]:

$$\bar{P} = \frac{1}{n} \left[ \left( 1 + \frac{n-1}{2} \bar{v} \right)^{2n/(n-1)} \right]. \quad (20)$$

При  $\bar{v} < 1$  воспользуемся разложением в ряд Тейлора правой части соотношения (20) и получим следующее выражение для давления:

$$\bar{P} = \bar{v} + \frac{n+1}{4} \bar{v}^2 + \frac{n+1}{12} \bar{v}^3 - \frac{(n-1)(n-3)}{16} \bar{v}^4 + \dots,$$

которое для воды ( $n=7$ ) принимает вид

$$\bar{P} = \bar{v} + 2\bar{v}^2 + \frac{3}{2}\bar{v}^3 - \frac{3}{2}\bar{v}^4 + \dots \quad (21)$$

На рис. 1 приведены результаты расчета давления на поршень. Кривая 1 соответствует формуле (20), кривая 2 – формуле (21) при двух членах ряда, кривая 3 – по формуле  $\bar{P} = \bar{v}$ . График наглядно иллюстрирует пределы применимости линейного волнового уравнения и тот факт, что использование интеграла вида (1) здесь увеличивает погрешность по сравнению с применением интеграла (2).

### 3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН

В случае генерирования волн давления расширяющейся цилиндрической (или сферической) полостью следует рассмотреть некоторые важные случаи. В первую очередь, это расширение полости нулевого начального радиуса и расширение полости при ненулевом значении начального радиуса.

Аналитическое решение начально-краевой задачи для линейного волнового уравнения и задания граничного условия на текущем положении подвижной границы контакта удобно получить методом нелинейного преобразования времени [11, 12]. Воспользовавшись этим методом и предположив, что при расширении цилиндра по закону  $R(t) = R_0 + v_0 t$  справедливо  $\Phi(r, t) = f(t^0) r^{1/2}$ , найдем представления для поля скорости и давления [12]:

$$\bar{v}(r, t) = \frac{3M_0^2}{1+2M_0} \left(\frac{\Psi}{\bar{r}}\right)^{1/2} \times \left\{ 1 + \frac{1-M_0}{3M_0} \Psi^{-(1+1/2M_0)} \times \left[ 1 - \frac{\Psi}{\bar{r}} \left( 1 - \frac{\Psi}{\bar{r}} (1 - \Psi^{1+1/2M_0}) \right) \right] \right\}, \quad (22)$$

$$\bar{P}(r, t) = \frac{3M_0^2}{1+2M_0} \left(\frac{\Psi}{\bar{r}}\right)^{1/2} \times \left( 1 + \frac{1-M_0}{3M_0} \Psi^{-(1+1/2M_0)} \right),$$

где

$$t^0 = t - \frac{r - R_0}{C_0}; \quad \Psi = 1 + \frac{M_0 \bar{t}^0}{1 - M_0};$$

$$\bar{r} = \frac{r}{R_0}; \quad \bar{t}^0 = \frac{C_0 t^0}{R_0}; \quad M_0 = \frac{v_0}{C_0}.$$

В дальней зоне  $r \gg 1$  выражения (22) принимают

вид

$$\bar{v}(r, t) = \bar{P}(r, t) = \frac{3M_0^2}{1+2M_0} \left(\frac{\Psi}{\bar{r}}\right)^{1/2} \times \left( 1 + \frac{1-M_0}{3M_0} \Psi^{-(1+1/2M_0)} \right). \quad (23)$$

Принимая в соотношениях (22)  $r = R_0 + v_0 t$ , получаем выражения для параметров на контактной границе:

$$\bar{v}_R(t) = M_0,$$

$$\bar{P}_R(t) = \frac{3M_0^2}{1+2M_0} \times \left( 1 + \frac{1-M_0}{3M_0} (1 + M_0 \bar{t})^{-(1+1/2M_0)} \right). \quad (24)$$

Из выражений (24) следует, что  $\bar{P}_R(0) = M_0$  и  $\bar{P}_R = 3M_0^2 / (1 + 2M_0)$  при  $\bar{t} \gg 1$ . Принимая в соотношениях (22)  $r = R_0 + C_0 t$ , получаем выражения для параметров на фронте волны:

$$\bar{v}_C(t) = \bar{P}_C(t) = \frac{M_0}{(1 + \bar{t})^{1/2}}. \quad (25)$$

В случае нулевого начального радиуса  $R_0 = 0$  из соотношений (22) получаем

$$\bar{v}(r, t) = \frac{M_0^2}{1+2M_0} \left[ \frac{M_0}{1+M_0} \right]^{1/2} (\bar{t} - 1)^{1/2} (\bar{t} + 2),$$

$$\bar{P}(r, t) = \frac{3M_0^2}{1+2M_0} \left[ \frac{M_0}{1+M_0} \right]^{1/2} (\bar{t} - 1)^{1/2}. \quad (26)$$

Принимая в соотношениях (26)  $r = R(t) = v_0 t$ , получаем выражения для параметров на контактной границе

$$\bar{v}_R(t) = M_0,$$

$$\bar{P}_R(t) = \frac{3M_0^2}{1+2M_0}. \quad (27)$$

Принимая в соотношениях (26)  $r = R_C(t) = C_0 t$ , получаем параметры на фронте волны:  $\bar{v}_C = \bar{P}_C = 0$  при любых значениях  $t$ .

Корректность полученных результатов (22)–(27) подтверждается совпадением результатов численного счета по формуле (27) для давления и счета по формулам точного решения задачи [13]

$$\bar{v}_R(t) = M_0,$$

$$\bar{P}_R = \frac{M_0^2}{(1 - M_0^2)^{1/2}} \ln \frac{1 + (1 - M_0^2)^{1/2}}{M_0}. \quad (28)$$

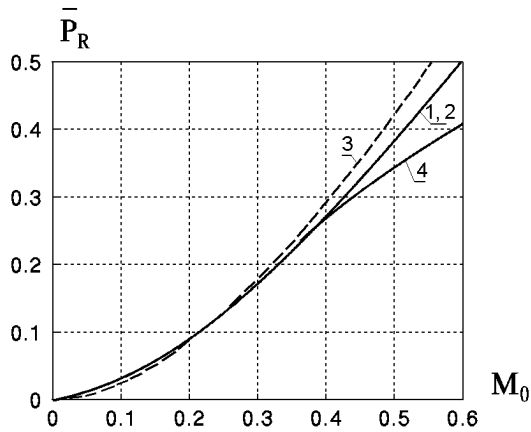


Рис. 2. Зависимость давления на цилиндр нулевого начального радиуса от скорости его расширения:  
 1 - точное решение линейного волнового уравнения (28),  
 2 - автомодельное решение (29),  
 3 - приближенное решение (27),  
 4 - модель точечного источника (30)

Результаты такого сравнения приведены на рис. 2, где, кроме того, показаны результаты расчета по точному решению нелинейной автомодельной задачи [14]

$$\bar{P}_R = 1.36 M_0^{1.71} \quad (29)$$

и модели точечного источника [3]

$$\bar{P}_R = M_0^2 \ln \frac{2}{M_0}. \quad (30)$$

Кривые 1, 3 соответствуют формулам (28), (27). Кривая 2 – формуле (29), а кривая 4 – формуле (30). Относительная скорость  $M_0$  изменяется в пределах  $0 \div 0.6$ . Следует напомнить, что верхним пределом применимости линейной акустики является величина  $M_0^{\text{lim}} = 1/n$  (для воды  $M_0^{\text{lim}} \approx 0.14$ ). Однако, как видно из рис. 2, хорошее совпадение результатов решений для линейного волнового уравнения с учетом подвижности границы наблюдается до  $M_0 \approx 0.55$ , а для модели точечного источника – до  $M_0 \approx 0.4$ . Это говорит о малом влиянии нелинейности уравнений в ближайшей зоне расширяющегося цилиндра в случае нулевого начального радиуса.

На рис. 3 приведены результаты расчета для малых чисел  $M_0$ . В этой области изменения  $M_0$  приближенное решение (27) дает лучшее совпадение с точным нелинейным решением (29).

Результат точного решения начально-краевой задачи с подвижной границей для линейного волнового уравнения можно улучшить, используя ин-

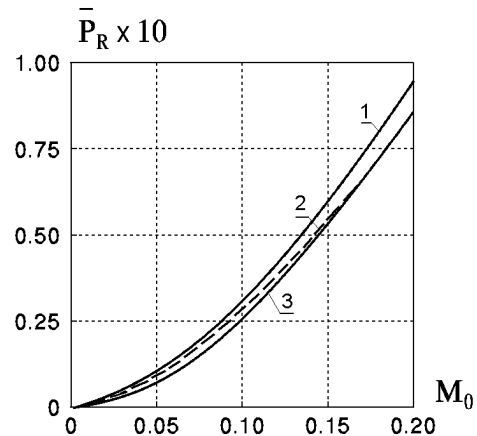


Рис. 3. Зависимость давления на цилиндр нулевого начального радиуса от скорости его расширения при малых числах  $M_0$ :  
 1 - точное решение линейного волнового уравнения (28),  
 2 - автомодельное решение (29),  
 3 - приближенное решение (27)

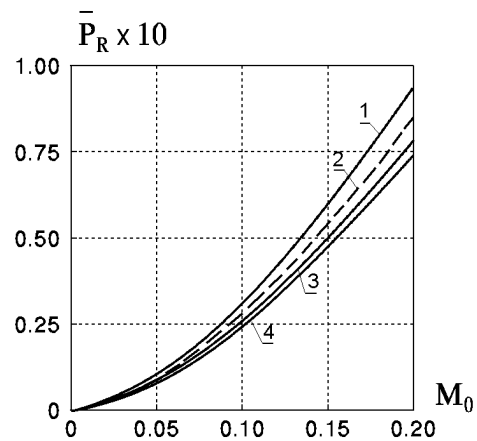


Рис. 4. Влияние учета нелинейных членов в интеграле Коши–Лагранжа на точность решения:  
 1 - точное решение линейного волнового уравнения (28),  
 2 - автомодельное решение (29),  
 3 - учет двух нелинейных членов в интеграле Коши–Лагранжа для (29),  
 4 - учет квадратичной составляющей для скорости в (29)

тегралы вида (1) или (3). На рис. 4 приведены результаты расчета по этим видам интеграла: кривая 3 соответствует интегралу (3), а кривая 4 – интегралу вида (1). Лучшие результаты дает применение интеграла вида (3).

В случае для решения цилиндра ненулевого начального радиуса вблизи границы при малых значениях времени имеет место плоское течение, и здесь следует пользоваться интегралами (2)

или (3). В дальней зоне вблизи фронта также течение можно считать плоским и пользоваться для определения давления интегралами (2), (3). На основе результатов [15] аналогичные выводы можно сделать при рассмотрении сферических волн, вызванных расширением сферической полости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы относительно применения различных видов интеграла Коши – Лагранжа в задачах о потенциальном течении сжимаемой жидкости, вызванного расширением полости.

1. В случае расширения полости нулевого начального радиуса при малых числах  $M_0$  следует пользоваться интегралом вида (1).
  2. При генерировании волн плоским поршнем или цилиндрической (сферической) полостью нулевого начального радиуса при малых значениях времени, а также вблизи фронта расходящихся волн можно использовать линейный интеграл вида (2).
  3. Во всех случаях, когда предварительный анализ невозможен или затруднителен, следует пользоваться интегралом вида (3) с учетом двух нелинейных составляющих.
  4. При скоростях расширения  $M_0 > 0.6$  следует применять интеграл общего вида (20) или (21).
1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1.– М.: Физматгиз, 1963.– 584 с.
  2. *Исакович М. А.* Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 496 с.
  3. *Слепян Л. И.* Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР.– 1985.– **282**, N 4.– С. 803–813.
  4. *Крутиков В. С.* Волновые явления с учетом конечности перемещения проницаемых границ // Докл. РАН.– 1993.– **333**, N 4.– С. 512–514.
  5. *Крутиков В. С.* О границах применимости решений волнового уравнения в области с подвижными границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики // Акуст. ж.– 1996.– **42**, N 4.– С. 534–540.
  6. *Крутиков В. С.* Волны окружающие расширяющийся проницаемый цилиндр в сжимаемой среде // Докл. РАН.– 1999.– **368**, N 1.– С. 1–4.
  7. *Галиев Ш. У.* Динамика гидроупругопластических систем.– К.: Наук. думка, 1981.– 276 с.
  8. *Поздеев В. А.* Прикладная гидродинамика электрического разряда в жидкости.– К.: Наук. думка, 1980.– 192 с.
  9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
  10. *Поздеев В. А.* Влияние подвижности возмущающей границы и нелинейности среды на волновое поле, вызванное нестационарным движением плоского поршня // Акуст. ж.– 1995.– **41**, N 1.– С. 164–165.
  11. *Поздеев В. А.* Метод нелинейного преобразования времени в краевых задачах теории потенциала с подвижными границами для линейного волнового уравнения // ПММ.– 1991.– **55**, вып. 6.– С. 1055–1058.
  12. *Поздеев В. А.* Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами.– К.: Наук. думка, 1992.– 244 с.
  13. *Бескаравайный Н. М., Поздеев В. А.* Волновые задачи о расширении полости в жидкости с учетом конечности перемещения границ // Физико-механические процессы при высоковольтном разряде в жидкости.– К., Наук. думка.– С. 1989.88–97
  14. *Окунь И. З.* Расчет давления на поршень при постоянной скорости его расширения // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1968.– N 1.– С. 126–130.
  15. *Поздеев В. А.* Излучение нестационарных сферических волн давления подвижной и частично проницаемой границей // ПММ.– 1998.– **62**, вып. 5.– С. 767–795.