

УДК 534.1

СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГО-ЖИДКОСТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

В. Т. ГРИНЧЕНКО*, Г. Л. КОМИССАРОВА**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко, Киев

Получено 12.07.2000

Рассмотрены свойства нормальных волн в тонкостенном упругом цилиндре, заполненном идеальной жидкостью. Анализ проведен в широком диапазоне частот. Для описания волнового поля в упругом цилиндре использована полная система уравнений динамической теории упругости. Это позволяет всесторонне изучить эффекты взаимодействия между волнами в упругом теле и жидкости. Основное внимание уделено случаю относительно тонких цилиндров. Систематизация результатов расчета выполнена на основе данных о свойствах парциальных подсистем. Проявление эффектов взаимодействия и физические свойства нормальных волн в составном волноводе становятся достаточно наглядными, если в качестве парциальных подсистем выбрать пустой упругий цилиндр и цилиндрический акустический волновод с мягкой или жесткой внешней границей. Использование модели мягкой границы оправдано в случае тонкостенной упругой оболочки и относительно низких частот. При увеличении жесткости оболочки или повышении частоты в качестве парциальной подсистемы более целесообразно использовать волновод с жесткой стенкой. Проведен подробный анализ кинематических и энергетических характеристик нормальных волн. Их изменение в зависимости от геометрических и физических параметров показывает роль эффектов упруго-жидкостного взаимодействия в составном волноводе. Особое внимание уделено низшим нормальным волнам, обладающим особыми свойствами и наиболее сильно подверженным влиянию взаимодействия упругих и жидкостных движений.

Розглянуті властивості нормальних хвиль у тонкостінному пружному циліндрі, заповненому ідеальною рідиною. Аналіз проведено в широкому діапазоні частот. Для опису хвильового поля в пружному циліндрі використана повна система рівнянь динамічної теорії пружності. Це дозволяє всебічно вивчити ефекти взаємодії між хвилями в пружному тілі й рідині. Основну увагу зосереджено на випадку відносно тонких циліндрів. Систематизацію результатів обчислень виконано на основі даних про властивості парціальних підсистем. Прояви ефектів взаємодії й фізичні властивості нормальних хвиль стають досить наочними, якщо в якості парціальних підсистем вибрати порожній пружний циліндр та циліндричний акустичний хвилепровід з м'якою або жорсткою зовнішньою поверхнею. Використання моделі м'якої границі виправдане у випадку тонкостінного пружного циліндра та відносно низьких частот. Зі збільшенням жорсткості оболонки або при зростанні частоти в якості парціальної підсистеми більш доцільно використовувати хвилевід із жорсткою стінкою. Проведено детальний аналіз кінематичних та енергетичних характеристик нормальних хвиль. Їх зміна в залежності від геометричних та фізичних параметрів показує роль ефектів пружно-рідинної взаємодії в композитному хвилеводі. Особливу увагу приділено нормальним хвилям нижчих номерів, які мають особливі властивості та є найбільш чутливими до впливу взаємодії рухів у рідині та пружному тілі.

The properties of normal waves in the thin-walled elastic cylinder filled by an ideal liquid are considered. The analysis is carried out in wide range of frequencies. To describe the wave field in elastic cylinder a complete set of equations of dynamic theory of elasticity is used. This allows to study comprehensively the effects of interaction between waves in an elastic body and liquid. Basic attention is given to cases concerning the thin cylinders. Arrangement of the numerical data is carried out on basis of known properties of partial subsystems. Manifestation of the interaction effects and the physical properties of normal waves in compound waveguide become sufficiently informative when the empty elastic cylinder and cylindrical acoustic waveguides with soft or rigid external boundaries are chosen as partial subsystems. Use of the soft boundary model is justified in case of thin-walled elastic cylinder and low enough frequencies. At increase of rigidity of the cylinder or increase of frequency the waveguide with rigid wall is more suitable as a partial subsystem. The detailed analysis of the kinematic and power characteristics of normal waves is given. Their change depending on geometrical and physical parameters shows a role of effects of elastic-liquid interaction in compound waveguides. The special attention is given to the lowest normal waves that have some specific properties and are most strongly subjected to influence of the interaction between the solid and fluid parts of the waveguides.

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности волновых движений в составных волноводах, состоящих из цилиндрических труб, заполненных жидкостью, представляют интерес для различных приложений в акустоэлектронике, приборостроении, геоакустике, сейсмологии, ультразвуковой дефектоскопии, а также в медицинской акустике. Знания об особенностях распространения волн в таких структурах использу-

ются при создании методов диагностики различных устройств и систем по измеренным характеристикам распространяющихся в них волн.

Исследования волновых процессов в цилиндрах с жидкостью, начатые в XIX веке, стимулировались стремлением понять закономерности распространения импульсов в кровеносных сосудах и трубопроводах. Начало интенсивному изучению вопросов течения крови в артериях человека, как указано в [1], положила работа Т. Юнга (1808). Это на-

правление исследований сохраняет актуальность и в настоящее время [2, 3]. В первых исследованиях по этой проблеме, обзор которых содержится в [4], предполагалось, что заполняющая трубу жидкость является несжимаемой. В рамках такой модели Резал определил скорость распространения ударной волны в волноводе. В его модели сложной волноводной системы принималась во внимание упругость оболочки, а массовые характеристики системы определялись только свойствами внутренней жидкости.

Более полное исследование проведено И. Громекой [5], который учел влияние потерь в несжимаемой жидкости и инерционные свойства материала оболочки. Используемые им уравнения движения оболочки предопределили возможность существования в системе с несжимаемой жидкостью двух нормальных волн без дисперсии. Большой объем исследований свойств волн в трубопроводах, в связи с проблемой гидравлического удара, выполнен Н. Е. Жуковским [4].

Первое исследование с учетом сжимаемости жидкости выполнено Кортвегом [6, с. 393]. Работа была предпринята в связи с замеченным ранее явлением уменьшения скорости распространения звука в заполненных водой трубах, по сравнению со скоростью звука в свободной воде. Этот эффект, как показал Гельмгольц, вызван радикальными колебаниями жидкости и стенок трубы, которые увеличивают эффективную сжимаемость жидкости и тем самым уменьшают скорость звука. Кортвег получил формулу для определения скорости звука в жидкости, заполняющей трубу, которая была проверена экспериментально Дерзингом [6, с. 393]. Эта формула описывает поведение низшей из двух распространяющихся волн в трубе. Более полный анализ волновых процессов в тонкостенной упругой оболочке, заполненной сжимаемой жидкостью, выполнен Лэмбом (1898). Важным качественным результатом его работы является обнаружение двух типов волн, распространяющихся в такой структуре при любой сколь угодно низкой частоте. Одна из этих волн при малой толщине стенки соответствует волне, рассмотренной Кортвегом. Вторая волна связана с продольной упругой волной в оболочке.

Последующие исследования волновых движений в составных цилиндрических волноводах базировались на более глубоком качественном понимании ситуации. В задачах такого типа речь не может идти о скорости звука в жидкости или в упругой стенке. Изучаться должны дисперсионные свойства нормальных волн в сложной волноводной системе с учетом связи движения в жид-

костной и твердотельной частях волновода. Цилиндрические волноводы с жидкостным заполнением изучались как на основе различных приближенных теорий [7–10], в которых труба моделировалась как тонкая оболочка, так и в точной пространственной постановке [11–20] для труб произвольной толщины. В [8] исследование распространения осесимметричных волн в цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, выполнено с использованием уточненной теории оболочек, полученной методом степенных рядов при учете членов порядка ξ^3 ($\xi = h/R_{\text{ср}}$, где h – толщина; $R_{\text{ср}}$ – срединный радиус цилиндра). Найдены значения фазовой скорости для первых четырех распространяющихся волн. Влияние вязкости жидкости на характеристики волн изучено в [21].

Зависимости фазовой скорости нормальных волн от различных физических параметров системы с использованием уравнений цилиндрической оболочки типа Тимошенко проанализированы в [9]. Исходя из решения задачи на основе теории оболочек Доннедла – Муштари, исследование дисперсионных свойств нормальных волн и распространения энергии в цилиндрических оболочках с жидкостью проведено в [10]. Здесь получены действительные, мнимые и комплексные корни дисперсионного уравнения для двух значений толщины оболочки ($h/R_{\text{ср}} = 0.05$ и 0.005) и двух вариантов материалов оболочки (сталь и жесткая резина). В качестве основы для анализа свойств дисперсионных кривых использованы данные о свойствах нормальных волн в акустических волноводах с мягкими и жесткими стенками. Рассмотрено распространение осесимметричных ($n=0$) и несесимметричных ($n=1$) нормальных мод в составном волноводе. Показано, что дисперсионные свойства нормальных волн в волноводах сталь – вода и жесткая резина – вода существенно отличаются. Отличия наблюдаются, в основном, в свойствах низшей нормальной волны.

В работах [11, 12] распространение нормальных осесимметричных волн в цилиндре с жидкостью изучено на основе использования полных уравнений теории упругости. Получены действительные, мнимые и комплексные значения волновых чисел для относительно толстых цилиндров. Однако анализ дисперсионных соотношений был выполнен в узком диапазоне частот, что не позволило установить общие закономерности формирования нормальных волн в составном волноводе.

Исследование двух низших осесимметричных волн для составных волноводов алюминий – вода и полихлорвинил – вода проведено в [13]. В случае волновода с комбинацией алюминий – вода

($h/R_{\text{ср}}=0.4$) фазовая скорость низшей моды близка к скорости звука в жидкости практически для всех частот. Для комбинации полихлорвинил–вода ($h/R_{\text{ср}}=0.135$) таким свойством обладает вторая нормальная волна в области низких частот. С ростом частоты фазовая скорость этой волны становится существенно ниже скорости звука в жидкости. Фазовая скорость первой моды более сильно подвержена дисперсии и для длинных волн существенно меньше скорости звука в жидкости. В работе [13] приведены данные экспериментальных исследований распространения волн в цилиндрах с жидкостью, подтверждающие основные выводы теоретических исследований.

Теоретические и обширные экспериментальные исследования осесимметричных нормальных мод в тонкостенных цилиндрических оболочках, пустых и заполненных вязкоупругой жидкостью, приведены в [14, 15]. Посредством уникального измерительного комплекса экспериментально получены дисперсионные спектры указанных волноводных систем. Здесь приведен интересный результат, относящийся к экспериментальному обнаружению так называемой обратной волны в алюминиевом волноводе. Получено хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

Распространение неосесимметричных волн в трансверсально-изотропном цилиндре, заполненном и окруженном жидкостью, рассмотрено в [16, 17]. Численные результаты представлены для трех случаев: пустой полый цилиндр; цилиндр, заполненный жидкостью; цилиндр, контактирующий с внутренней и внешней жидкостью. С целью облегчения интерпретации результатов, полученных для цилиндра, усиленного нитями, проведено сравнение со случаем изотропного цилиндра из резины, с близкими к армированному цилиндру дисперсионными свойствами. Приведены данные для первых трех распространяющихся изгибных мод ($n=1$) составного волновода резина–вода. В отличие от осесимметричного случая, в области низких частот существует только одна волна. Физически это отражает тот факт, что в этой области частот при таком типе деформации даже сжимаемая жидкость выступает только в роли присоединенной массы. Жидкостные волны возникают в области частот, расположенной значительно выше частот запирания первых трех распространяющихся волн в пустом цилиндре.

Результаты предшествующих работ показывают, что свойства нормальных волн цилиндра с жидкостью зависят от всех параметров, характеризующих физические свойства и геометрические

размеры составляющих волновода, в то время как для пустого цилиндра они зависят только от коэффициента Пуассона ν и относительного внутреннего радиуса r_1 . Здесь $r_1 = R_1/R$ – относительный внутренний радиус полого цилиндра; R_1 , R – внутренний и внешний радиусы цилиндра.

При исследовании влияния физических параметров на свойства нормальных волн в составном волноводе следует различать два типа взаимодействия в зависимости от соотношения значений скорости сдвиговых волн в материале цилиндра и скорости звука в жидкости. Если скорость волн сдвига в материале цилиндра больше скорости звука в жидкости, то в составном волноводе фазовая скорость всех мод, за исключением первой, больше скорости звука в жидкости. Однако когда скорость волн сдвига меньше скорости звука в жидкости, то в составном волноводе уже существует несколько волн, фазовая скорость которых меньше скорости звука. Для этих мод влияние внутренней жидкости проявляется в качестве присоединенной массы [17].

В работах [18–20] изучено влияние величины относительного внутреннего радиуса цилиндра r_1 на свойства нормальных волн в толстостенном упруго-жидкостном волноводе с $r_1 \leq 0.8$ для случая, когда скорость волн сдвига больше скорости звука в жидкости. Систематизация результатов расчета проводилась на основе данных о закономерностях волновых движений в парциальных подсистемах. Для толстых цилиндров с жидкостью в качестве парциальных подсистем выбраны упругий полый цилиндр и жидкостной волновод с жесткими стенками. Определены действительные, мнимые и комплексные корни дисперсионного уравнения для осесимметричного ($n=0$) и неосесимметричного ($n=1, 2$) случаев деформирования и проведен анализ энергетических характеристик нормальных волн. Полученные в [18–20] представления о взаимодействии упругих и жидкостных движений не охватывают особенностей волновых движений в тонкостенных составных волноводах. Цель данной работы состоит не только в том, чтобы определить роль геометрического параметра, но и в том, чтобы найти те области частот, в которых динамическое взаимодействие парциальных подсистем характеризуется особыми свойствами.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Исследуются свойства осесимметричных гармонических волн в упругом цилиндре, заполненном идеальной сжимаемой жидкостью. Рассма-

триваються тонкостенні епруго-жидкостні циліндричні хвонводи ($r_1 > 0.8$). Поскільки рассмотрение не ограничивается низкочастотной областью, то для описания волнового поля в цилиндре необходимо использовать полные уравнения динамической теории упругости. Решения этих уравнений относительно компонент вектора смещений в рассматриваемом осесимметричном случае имеют вид [18]

$$u_j = U_j(r) \exp[i(\zeta z - \omega t)], \quad j = r, z,$$

$$U_r(r) = -\alpha[A_1 J_1(\alpha r) + A_2 Y_1(\alpha r)] + \beta[B_1 J_1(\beta r) + B_2 Y_1(\beta r)], \quad (1)$$

$$U_z(r) = i\zeta[A_1 J_0(\alpha r) + A_2 Y_0(\alpha r)] + i\frac{\beta^2}{\zeta}[B_1 J_0(\beta r) + B_2 Y_0(\beta r)],$$

где

$$\alpha^2 = \gamma_1^2 - \zeta^2; \quad \beta^2 = \gamma_2^2 - \zeta^2;$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega R}{V_D}; \quad \gamma_2 = \frac{\omega R}{V_S}.$$

Потенциал скорости в жидкости, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца, имеет вид

$$\varphi = DJ_0(\chi r) \exp[i(\zeta z - \omega t)],$$

$$\chi^2 = \gamma_2^2 \left(\frac{V_S}{C}\right)^2 - \zeta^2. \quad (2)$$

Здесь ζ – постоянная распространения; ω – круговая частота; V_D, V_S – скорости волн расширения и сдвига соответственно; C – скорость звука в жидкости; J_n, Y_n – функции Бесселя; A_1, A_2, B_1, B_2, D – произвольные постоянные. Все линейные величины здесь и далее отнесены к внешнему радиусу цилиндра R . Потенциал скорости нормирован к произведению RC .

Граничные условия на внешней свободной поверхности и условия контакта с жидкостью на внутренней выражаются соотношениями

$$\sigma_{rr}(1, z, t) = \sigma_{rz}(1, z, t) = \sigma_{rz}(r_1, z, t) = 0,$$

$$\frac{\sigma_{rr}(r_1, z, t)}{2\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{RC}{V_S^2} \frac{\partial \varphi(r_1, z, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r(r_1, z, t)}{\partial t} = \frac{C}{R} \frac{\partial \varphi(r_1, z, t)}{\partial r}.$$

Здесь μ – модуль сдвига материала цилиндра; ρ_0, ρ_1 – плотности жидкости и материала цилиндра соответственно.

Граничные условия (3) при использовании решений (1) и (2) порождают дисперсионное уравнение в форме равенства нулю определителя пятого порядка

$$\Delta_5 = |a_{ij}| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 5. \quad (4)$$

Выражения для элементов определителя довольно громоздки. Их явный вид приведен в [18]. Дисперсионное уравнение (4) связывает безразмерные частоту γ_2 и постоянную распространения ζ при заданных величинах безразмерных физических и геометрических параметров $\nu, V_S/C, \rho_0/\rho_1$ и r_1 . Такое количество параметров предопределяет сложность исследования дисперсионных свойств цилиндра с жидкостью. Важной задачей анализа является выделение тех диапазонов изменения параметров, при которых эффекты эпруго-жидкостного взаимодействия являются существенными. Сама постановка задачи о взаимодействии волновых процессов в жидкости и эпругой оболочке приводит к естественному выделению некоторых парциальных подсистем. В том случае, когда импеданс внутренней поверхности эпругого цилиндра превышает импеданс поверхности жидкости, в качестве таких подсистем можно выбрать пустой полый цилиндр и акустический волновод с жесткими стенками. Для случая относительно гибкой оболочки второй парциальной системой может быть волновод с мягкими стенками. Поскольку динамические свойства указанных подсистем существенно зависят от частоты, такое разбиение, конечно, имеет условный характер.

Дисперсионное уравнение для полого цилиндра со свободными боковыми поверхностями получаем непосредственно из уравнения (4), отбрасывая в определителе пятые строку и столбец. Дисперсионное уравнение для акустического волновода с жесткими стенками имеет вид [18]

$$\chi J_1(\chi r_1) = 0. \quad (5)$$

Для волновода с мягкими стенками это уравнение преобразуется к виду

$$J_0(\chi r_1) = 0. \quad (6)$$

Оба эти уравнения определяют в плоскости $\mathbf{Re} \zeta, \gamma_2$ семейство гипербол

$$\gamma_2 = \frac{C}{V_S} \sqrt{\left(\frac{\lambda_{jn}}{r_1}\right)^2 + \zeta^2} \quad (7)$$

$$j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

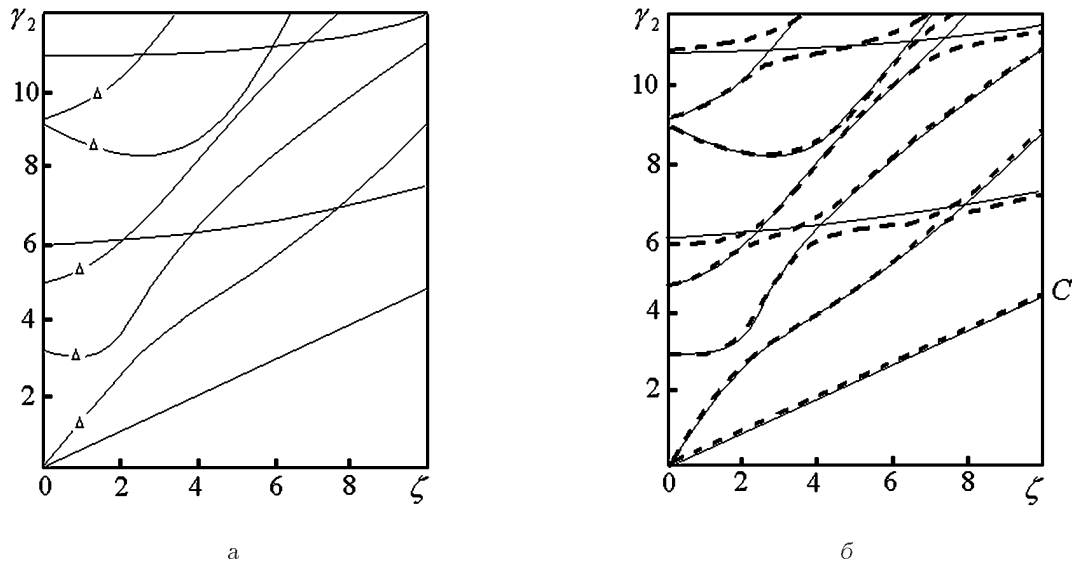


Рис. 1. Влияние упруго-жидкостного взаимодействия на дисперсионные характеристики распространяющихся волн в толстостенном стальном цилиндре ($r_1=0.3$), заполненном водой:
 а - дисперсионные свойства волн в парциальных подсистемах (взаимодействие не учитывается),
 б - дисперсионные свойства волн с учетом взаимодействия

где λ_{1n} – корни уравнения $J_1(\lambda)=0$, а λ_{2n} – уравнения $J_0(\lambda)=0$. Первые несколько корней λ_{1n} имеют значения 0, 3.8317, 7.0156, 10.1735, 13.3237, а λ_{2n} – 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7915. Нулевому корню уравнения (5) соответствует бездисперсионная волна, характеризующаяся плоским волновым движением ($u_r=0, u_z=\text{const}$) и скоростью распространения, равной скорости звука в жидкости.

2. ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ УПРУГО-ЖИДКОСТНЫХ ВОЛНОВОДАХ

В [18–20] детально изучены свойства нормальных осесимметричных волн в толстых упруго-жидкостных волноводах в зависимости от величины относительного внутреннего радиуса r_1 при $r_1 \leq 0.8$. Для конкретных случаев составных волноводов построены дисперсионные спектры, представляющие собой графическое изображение зависимостей между частотой γ_2 и действительными, мнимыми и комплексными значениями постоянной распространения ζ .

На рис. 1 представлены действительные ветви дисперсионных кривых для парциальных подсистем (рис. 1, а) и упруго-жидкостной системы (рис. 1, б). Рассматривается случай стального цилиндра с $r_1=0.3$, заполненного водой. При этом имеем следующие значения параметров: $\nu=0.29$, $V_S/C=2.14$, $\rho_0/\rho_1=0.13$. Дисперсионные кри-

вые, соответствующие парциальным подсистемам (упругий полой цилиндр и акустический волновод с жесткими стенками), изображены на рис. 1, а тонкими сплошными линиями. Треугольниками отмечены дисперсионные кривые нормальных волн в пустом упругом цилиндре. Дисперсионные кривые для подсистем пересекаются. При выбранной геометрии волновода в данном частотном диапазоне в упругом цилиндре существует больше распространяющихся волн, чем в акустическом волноводе. Вторая распространяющаяся волна полого цилиндра на частоте запертия является радиальной, а третья и четвертая – сдвиговыми. Следует отметить, что частоты запертия для сдвиговых волн в цилиндре не зависят от наличия жидкости внутри цилиндра [22], а для принятой безразмерной частоты – и от свойств материала цилиндра.

Исходя из общих свойств волновых движений в связанных системах, следует предположить, что эффекты связанности будут существенными только в окрестности точек пересечения дисперсионных кривых для парциальных систем. Это полностью подтверждается данными рис. 1, б. Характер поведения дисперсионных кривых составного волновода указывает на обоснованность выбранного способа выделения парциальных подсистем. На этом рисунке штриховыми линиями даны дисперсионные ветви составного волновода. Сплошные линии, как и ранее, изображают дисперсион-

ные ветви парциальных подсистем. Можно заметить, что связанность движений в системе оказывает более существенное влияние на волны, дисперсионные кривые которых начинаются вблизи частот запираания акустического волновода. Исключение представляет только низшая волна, для которой столь толстый цилиндр является практически жесткой стенкой. На проявление эффекта взаимодействия влияет чисто геометрический фактор. При выбранных безразмерных координатах малым значениям величины r_1 соответствует такой случай, когда жидкое ядро волновода составляет очень малую часть общего его поперечного сечения.

Из приведенных на рис. 1, б данных следует, что в случае осесимметричных нормальных волн в составном волноводе существуют две волны, распространяющихся при любой частоте. Одна из них соответствует практически бездисперсионной волне в жидкостном волноводе с плоским волновым движением. Следует отметить, что степень влияния упругих стенок на дисперсионные свойства этой волны существенно зависит от толщины цилиндра. Наименьший действительный корень дисперсионного уравнения упруго-жидкостного волновода (4) находится несколько ниже прямой OC ($\chi=0$), т. е. в области, где χ является мнимым. С увеличением r_1 этот корень незначительно удаляется от прямой OC . Так, для $\zeta=5$ корень уравнения (4) при $r_1=0.3$ равен $\gamma_2=2.313$, при $r_1=0.6$ – $\gamma_2=2.308$, при $r_1=0.8$ – $\gamma_2=2.177$, а прямой $\chi=0$ соответствует $\gamma_2=2.336$. Естественно, что по мере удаления этого корня от прямой OC движение жидкости в цилиндре перестает быть плоским.

Проведенные исследования влияния величины относительного внутреннего радиуса полого цилиндра r_1 на значения корней дисперсионного уравнения пустого цилиндра [22] показали, что при $\nu > 0.2833$ частота запираания второй распространяющейся моды γ_{s1} , являющейся частотой сдвиговой моды, с увеличением r_1 увеличивается. Частота запираания третьей моды γ_{r1} , являющейся частотой радиальной моды, с увеличением r_1 уменьшается. Частоты запираания γ_{s1} и γ_{r1} совпадают при r_1^* , величина которого зависит от значения ν . При $\nu=0.33$ значение $r_1^* \approx 0.125$. Следовательно, частота запираания второй распространяющейся волны упругого полого цилиндра вначале увеличивается, а затем уменьшается, принимая максимальное значение при r_1^* . Для данных рис. 1 вторая распространяющаяся волна полого цилиндра на частоте запираания является радиальной, а третья – сдвиговой.

Сравнение дисперсионных спектров для упруго-

жидкостных волноводов в диапазоне изменения внутреннего радиуса от $r_1=0.3$ до $r_1=0.8$ [18, 20] показало, что увеличение жидкостного ядра волновода не сказывается существенно на дисперсионных свойствах двух низших нормальных волн. В целом этот вывод остается справедливым и для цилиндра из значительно более мягкого материала, чем сталь. Анализ дисперсионных спектров показал, что с увеличением плотности жидкости расширяется частотный диапазон существенного взаимодействия между парциальными подсистемами [18].

3. АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГО-ЖИДКОСТНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Качественное понимание механизма формирования нормальной волны в составном волноводе позволяет относительно просто предсказать дисперсионные свойства волн в области относительно низких частот. Что касается преимущественно твердотельной волны, то движения в ней являются по существу чисто продольными (стержневыми) движениями, фазовая скорость которых не зависит от толщины цилиндра. Преимущественно жидкостная волна должна быть чувствительной к радиальной податливости упругой оболочки. Эта податливость зависит от степени близости частоты волны к собственной частоте чисто радиальной моды. При увеличении внутреннего радиуса цилиндра соответствующая частота не может опуститься ниже $\gamma_2 = \sqrt{2/(1-\nu)}$. Казалось бы именно этот предел определяет область частот, в которой фазовая скорость жидкостной волны должна быть близка к скорости плоской волны. Данные конкретных расчетов подтверждают первое предположение и не согласуются со вторым. Физические причины этого будут рассмотрены ниже.

Очень важно найти возможность объяснить отступление от предсказаний такого качественного анализа. Суть дела состоит в том, что вместе с увеличением внутреннего радиуса цилиндра увеличивается радиус жидкого ядра и существенную роль начинает играть податливость жидкости, обусловленная отличиями движения от поршневого.

Полагаем, что полый цилиндр является тонкостенным, если отношение толщины стенки цилиндра к внешнему радиусу $h/R = 1 - r_1 \leq 0.1$ ($r_1 \geq 0.9$). Для таких значений толщины для описания волновых движений в цилиндре в низкочастотной области применимы теории цилиндрических оболочек.

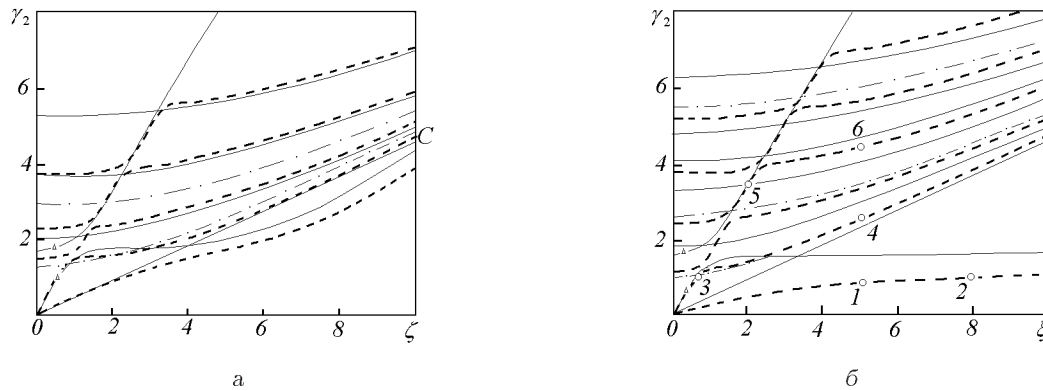


Рис. 2. Дисперсионные ветви распространяющихся волн в тонкостенных стальных цилиндрах, заполненных водой:
 а - $r_1 = 0.9$, б - $r_1 = 0.99$

Область частот, в которой длина волны больше толщины цилиндра, считаем низкочастотной.

Рассмотрим особенности волновых движений в упруго-жидкостных волноводах, возникающие при увеличении относительного внутреннего радиуса цилиндра r_1 от 0.9 до 0.99. На рис. 2 изображены действительные ветви дисперсионных кривых для стального цилиндра, заполненного водой, с $r_1 = 0.9$ и $r_1 = 0.99$ соответственно. Дисперсионные кривые составного волновода изображены утолщенными штриховыми линиями. Для того, чтобы определиться с соответствующими парциальными подсистемами, на рисунках представлены дисперсионные кривые пустого упругого цилиндра (отмеченные треугольниками тонкие сплошные линии), акустического волновода с жесткими стенками (тонкие сплошные линии) и акустического волновода с мягкими стенками (штрих-пунктирные тонкие линии).

Общее поведение дисперсионных кривых на этих рисунках указывает на целесообразность введения парциальных подсистем при систематизации данных. Однако в случае тонких цилиндров взаимодействие между жидкостью и упругой оболочкой существенным образом проявляется не только в окрестности области пересечения соответствующих дисперсионных кривых для парциальных подсистем. Это прежде всего относится к нижней нормальной волне, свойства которой будут рассмотрены отдельно. Что касается волн более высокого порядка, то для обоих геометрических размеров цилиндра сохраняется общая тенденция. Каждая дисперсионная кривая имеет участок, где кривая очень близка (графически совпадает) к дисперсионным кривым полого пустого цилиндра (отмеченные треугольниками тонкие сплошные ли-

нии). На этих участках нормальная волна переносит энергию в упругом цилиндре. На тех участках кривых, где энергия переносится преимущественно в жидкости, ветви дисперсионных кривых отличаются от соответствующих ветвей акустического волновода как с жесткими (сплошные тонкие линии), так и с мягкими стенками (тонкие штрих-пунктирные линии). С повышением номера волны четко прослеживается тенденция приближения жидкостной части дисперсионной ветви к соответствующей кривой для волновода с жесткими стенками. Для цилиндра с $r_1 = 0.9$ (рис. 2, а) эта тенденция выражена более четко.

Выше отмечалось, что поведение преимущественно упругой волны качественно хорошо согласуется с представлениями о взаимодействии стержневой моды упругой оболочки и волновых движений в жидкости. Поведение преимущественно жидкостной волны, которая является нижней в системе при выбранных значениях параметров, оказывается более сложным. Оценить влияние величины r_1 на поведение первой действительной дисперсионной кривой можно по данным рис. 3, на котором показаны первые действительные дисперсионные кривые пустого полого цилиндра (сплошные кривые) и составного волновода (штриховые кривые). Для пустого цилиндра с $r_1 = 0.8$ первая дисперсионная кривая лежит выше прямой OC . С увеличением r_1 (с уменьшением толщины цилиндра) при малых значениях волнового числа ζ дисперсионные кривые практически не различаются. Фазовые скорости нормальных волн равны скорости продольной волны в стержне

$$c = \sqrt{E/\rho_1} = \sqrt{2(1+\nu)} V_S. \quad (8)$$

При увеличении волнового числа ($\zeta > 2$) свой-

ства соответствующей волны существенно зависят от толщины цилиндра. Уже при $r_1=0.9$ фазовые скорости коротких волн в стальном цилиндре становятся меньше скорости плоской волны в жидкости. Для цилиндра с $r_1=0.99$ в рассматриваемом диапазоне длин волн дисперсионная кривая 4 становится практически горизонтальной. Такое поведение дисперсионной кривой предсказывается теорией тонкостенных оболочек. Эта зависимость между частотой и волновым числом обуславливает появление особых (непрерывных) составляющих в спектрах собственных частот оболочек [23]. Однако в рамках полных соотношений теории упругости с увеличением волнового числа фазовая скорость снова начнет возрастать.

В поведении низшей преимущественно жидкостной волны составного волновода наблюдаются интересные особенности. С уменьшением толщины цилиндра фазовая скорость этой волны уменьшается. Соответствующая дисперсионная кривая всегда расположена ниже первой дисперсионной кривой для пустого цилиндра. Эта кривая не приближается ни к одной дисперсионной кривой парциальных подсистем. Для данного типа волнового движения существенное упруго-жидкостное взаимодействие проявляется в широком диапазоне изменения волновых чисел. Для области относительно малых частот фазовая скорость соответствующей волны может быть оценена путем упрощения общего дисперсионного уравнения (4). Путем упрощения исходной постановки задачи простую формулу для оценки фазовой скорости низшей волны получил Кортвег [6]:

$$C_1 = \frac{C}{\sqrt{1 + \frac{2R_1}{h} \frac{\rho_0 C^2}{E} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{h}{2R_1}\right)}}. \quad (9)$$

Здесь h – толщина стенки цилиндра; E – модуль упругости материала оболочки. Значения фазовой скорости, предсказываемые этой формулой для относительно тонких цилиндров, хорошо согласуются с точными значениями в области частот, в которой штриховые кривые на рис. 3 аппроксимируются прямой. Из формулы ясно видно, что для низких частот эффект упруго-жидкостного взаимодействия определяется только упругостью цилиндра. Значение плотности материала цилиндра несущественно. Отметим, что аналогичная формула была получена Н. Е. Жуковским [4]. В ней отсутствовало выражение в круглых скобках из знаменателя формулы (9), которое для тонкостенных цилиндров очень близко к единице.

Как следует из формулы (9), отношение C_1/C

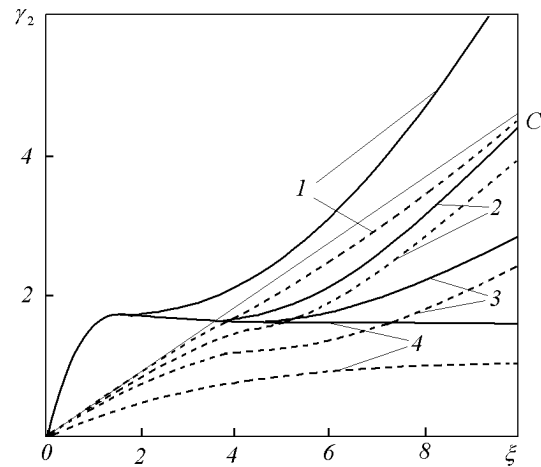


Рис. 3. Влияние жесткости оболочки на дисперсионные свойства низшей нормальной волны в составном волноводе (штриховые линии). Сплошные линии показывают дисперсионные свойства низшей нормальной волны в пустом цилиндре:

1 - $r_1=0.8$, 2 - $r_1=0.9$, 3 - $r_1=0.95$, 4 - $r_1=0.99$

уменьшается с уменьшением жесткости оболочки на растяжение Eh . Для комбинации вода – сталь различия между фазовой скоростью первой нормальной волны и скоростью звука в жидкости незначительны вплоть до $r_1=0.9$, $C_1/C=0.95$. При дальнейшем уменьшении толщины оболочки наблюдается существенное уменьшение фазовой скорости нормальной волны ($r_1=0.99$, $C_1/C=0.56$). Для оболочек из низко модульных материалов и жидкостей типа воды эта фазовая скорость может составлять всего несколько метров в секунду.

Полученные результаты, относящиеся к тонким цилиндрам ($r_1=0.95$ и 0.99), не согласуются с результатами работы [10] для случая осесимметричных волн в стальном цилиндре с $h/R_{cp}=0.05$ ($r_1=0.9512$), заполненном водой. Согласно [10], первая дисперсионная кривая этого составного волновода практически совпадает с первой дисперсионной кривой акустического волновода с жесткими стенками. Это не согласуется с результатами расчетов. При качественном объяснении результатов авторы [10] упускают из вида, что при деформации, соответствующей низшей распространяющейся волне, жесткость оболочки должна определяться как Eh . На это явно указывает хорошо согласующаяся с результатами расчетов формула (9).

Ранее отмечалось, что для толстых цилиндров ($r_1 < 0.8$), заполненных жидкостью, вторая действительная дисперсионная кривая вначале близ-

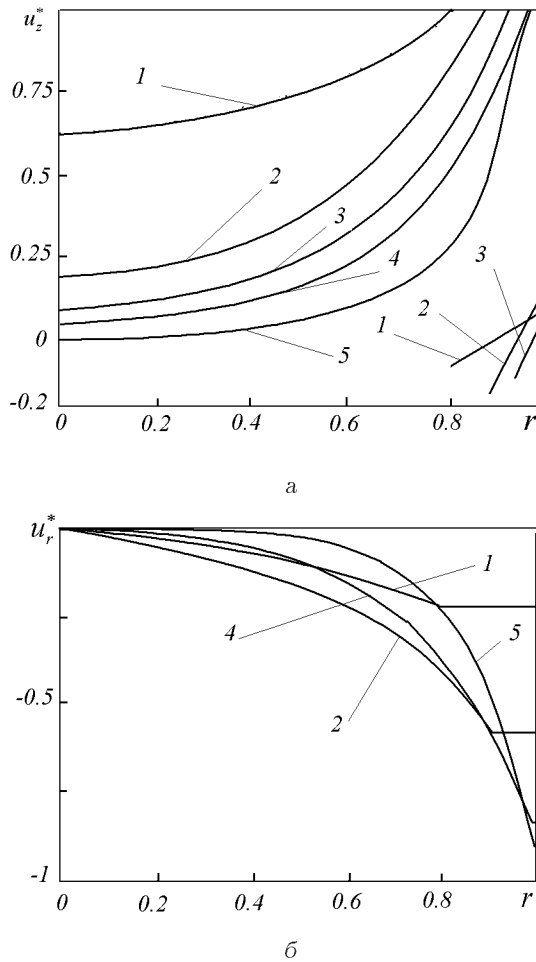


Рис. 4. Распределение по радиусу нормированных амплитуд смещений в нижней нормальной волне для оболочек с различной жесткостью. Вычисления выполнены для точек штриховых кривых на рис. 3, имеющих следующие координаты:
 1 - $r_1 = 0.8$, $\zeta = 5$, $\gamma_2 = 2.177$, 2 - $r_1 = 0.9$, $\zeta = 5$, $\gamma_2 = 1.691$,
 3 - $r_1 = 0.95$, $\zeta = 5$, $\gamma_2 = 1.330$, 4 - $r_1 = 0.99$, $\zeta = 5$, $\gamma_2 = 0.797$,
 5 - $r_1 = 0.99$, $\zeta = 8$, $\gamma_2 = 0.981$

ка к нижней дисперсионной кривой пустого цилиндра. С повышением частоты эта кривая резко изменяет направление и приближается к дисперсионной кривой акустического волновода с жесткими стенками [22]. Изменение направления хода кривой происходит вблизи частоты, при которой совпадают фазовые скорости нормальной волны в пустом цилиндре и второй нормальной волны в акустическом волноводе. Для тонких цилиндров ($r_1 \geq 0.9$) вторая дисперсионная кривая в области высоких частот близка к дисперсионной кривой нижней волны акустического волновода с мягкими стенками. Для относительно низких частот, при которых фазовые скорости упругой волны и

первой нормальной волны указанного акустического волновода близки между собой, существенного взаимодействия между оболочкой и жидкостью не наблюдается.

4. АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН

Анализ кинематических и энергетических характеристик распространяющихся волн в составном волноводе позволяет более полно раскрыть особенности формирования нормальных волн в составном волноводе и характер взаимодействия между волновыми движениями в упругой и жидкостной его частях. Изменение по радиусу волновода амплитуд осевых и радиальных смещений в первой распространяющейся волне показано на рис. 4, а и б соответственно. Все данные приведены для одной и той же безразмерной длины волны $\zeta = 5.0$, т.е. для случая, когда длина волны несколько больше радиуса оболочки. Значения амплитуд нормированы к максимальному значению осевого смещения для каждой волны $u_z^*(r) = u_z(r)/|u_{z \max}|$, $u_r^*(r) = u_r(r)/|u_{z \max}|$. Как видно, эти максимальные смещения имеют место в жидкости на поверхности оболочки.

Как следует из данных рис. 3, фазовая скорость первой нормальной волны для относительно толстого цилиндра с $r_1 = 0.8$ незначительно отличается от скорости звука в свободной жидкости. Однако распределение смещений по радиусу уже существенно неравномерно. С уменьшением толщины оболочки неравномерность в распределении осевых смещений возрастает и зона интенсивного движения локализуется возле внутренней поверхности оболочки. Это свойство является общим для осевых и радиальных смещений. Противофазный характер радиальных и осевых смещений представляется естественным. С уменьшением длины волны (кривая 5 на рис. 4, а) движения жидкости в волне сходны с движением в волне Стоунли. Осевые смещения в оболочке при этом пренебрежимо малы по сравнению со смещениями частиц жидкости.

Определенный интерес для характеристики нижней нормальной волны представляет описание движения оболочки. Осевые смещения точек оболочки малы по сравнению с максимальными смещениями в жидкости. В рамках принятой модели на границе жидкости и оболочки по этим смещениям наблюдается разрыв. Для оболочки с радиусом $r_1 = 0.8$ наблюдается почти идеальное моментное распределение смещений. С уменьшени-

ем толщины оболочки характер деформирования приближается к безмоментному. С уменьшением толщины оболочки возрастает величина радиального смещения, которое, естественно, постоянно по толщине.

Общие представления о свойствах нормальных волн более высоких порядков и связь этих свойств со свойствами парциальных волновых движений можно получить, анализируя данные о распределении осевых смещений в волне по радиусу волновода. На рис. 5 эти данные приведены для случая тонкостенного цилиндра с $r_1 = 0.99$ в характерных точках дисперсионных кривых для второй и четвертой нормальных волн. На рис. 2, б эти точки отмечены кружочками. Значения смещений нормированы к максимальному значению в поперечном сечении. Номер кривой соответствует номеру точки. Для большей наглядности при представлении смещений в оболочке использован другой масштаб.

Характер распределения перемещений по радиусу для точек, принадлежащих одной дисперсионной кривой, может существенно различаться. Так, для точки 3 смещения в жидком ядре очень малы по сравнению со смещениями точек оболочки. В точке 4 имеет место обратная картина. Основное движение сосредоточено в жидкости. Такая ситуация легко объясняется в рамках представлений о парциальных подсистемах. Точка 3 лежит на том участке второй дисперсионной кривой составного волновода, который близок к дисперсионной кривой пустого упругого цилиндра. Точка же 4 принадлежит участку, близкому к первой дисперсионной кривой акустического волновода с мягкими стенками. Аналогично, точке 5 четвертой дисперсионной кривой соответствует упругая волна с преимущественно продольными перемещениями. Точке 6 этой кривой соответствует жидкостная волна, для которой осевые и радиальные перемещения почти равноправны ($|u_{r \max}|/|u_{z \max}| = 0.94$).

Этот вывод о природе волновых движений в составном волноводе подтверждается анализом энергетических характеристик волн. Среднее за период значение плотности потока мощности через поперечное сечение волновода определяется равенством [24]

$$W_z = -\frac{i\omega\pi}{2} \int_0^1 (\sigma_{zz}u_z^* + \sigma_{rz}u_r^* - \sigma_{zz}^*u_z - \sigma_{rz}^*u_r) r dr. \quad (10)$$

Здесь * – знак комплексного сопряжения. Общий поток энергии естественным образом представля-

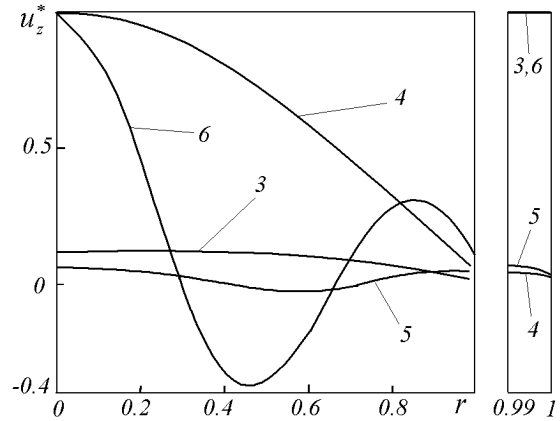


Рис. 5. Распределение по радиусу нормированных амплитуд осевых смещений для нормальных волн составного волновода с $r_1 = 0.99$. Вычисления выполнены для точек 3–6 на рис. 2, б

ется в виде суммы потоков энергии в жидком ядре W_0 и упругой оболочке W_1 . Для определения этих величин имеем соотношения

$$W_0 = \frac{\omega\pi}{2} D^2 \zeta \frac{\rho_0}{\rho_1} \left(\frac{C_0}{V_S}\right)^2 \int_0^{r_1} J_0^2(\chi r) r dr, \quad (11)$$

$$W_1 = \omega h D^2 \int_{r_1}^1 (-\sigma_{zz}U_z + \sigma_{rz}U_r) r dr.$$

При этом для заданных значений γ_2 и ζ постоянные A_i, B_i ($i = 1, 2$) в формулах (1) вычислялись с точностью до постоянной D в выражении (2) для потенциала звукового поля в жидкости.

В таблице приведены данные об отношении величин потока энергии в жидком ядре и упругом цилиндре для выделенных на рис. 2, б точек. Видно, что в том случае, когда фазовая скорость связанной нормальной волны близка к фазовой скорости волн пустого цилиндра (точки 3 и 5), практически вся энергия переносится в упругой части волновода. В точках 4 и 6, где фазовая скорость нормальной волны составного волновода близка к фазовой скорости жидкостной парциальной волны, энергия переносится в заполняющей жидкости. Особо следует отметить, что фазовая скорость первой связанной волны не совпадает с фазовой скоростью ни одной из парциальных волн. Анализ кинематических характеристик показал, что в случае тонкостенных цилиндров ей соответствует жидкостная поверхностная волна Стоунли, для которой эффекты связанности существенны во всем диапазоне частот. Для этой волны также

Таблица. Относительное распределение энергии по поперечному сечению жидкого ядра и упругого цилиндра

Номер точки	W_0/W_1	Номер точки	W_0/W_1
1	41.10	4	$3.59 \cdot 10^3$
2	5.22	5	$4.52 \cdot 10^{-3}$
3	$3.07 \cdot 10^{-2}$	6	$3.62 \cdot 10^2$

характерна существенная неравномерность в распределении потока энергии по радиусу с концентрацией энергии вблизи поверхности раздела. Характерно, что различие в величине потоков энергии для низшей нормальной волны (точки 1 и 2) менее существенно, чем для остальных нормальных волн с более четко выраженным доминированием переноса энергии либо в жидкости, либо в упругом цилиндре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе подробно исследованы свойства нормальных волн в составном упруго-жидкостном волноводе в зависимости от изменения геометрических параметров и физических свойств оболочки и жидкости. Анализ кинематических и энергетических свойств нормальных волн, а также их фазовых скоростей показывает качественное и количественное проявление эффектов взаимодействия волновых движений в жидкости и в упругом теле. Важной для интерпретации результатов расчета является возможность выделить некоторые парциальные подсистемы в составном волноводе, свойства которых позволяют определить области частот, где эффекты взаимодействия оказываются незначительными. Исключение составляет низшая нормальная волна, которая при увеличении частоты превращается в поверхностную волну типа волны Стоунли.

Важным параметром составного волновода является толщина (жесткость на растяжение) упругой оболочки. С уменьшением жесткости эффекты взаимодействия становятся существенными в широком диапазоне частот, обуславливая возникновение нормальных волн с экстремально низкими скоростями распространения по сравнению со скоростями волн в жидкости и упругом материале оболочки. Для случая тонкостенных оболочек более сложным является выбор парциальных подсистем. В области низких частот в качестве базисной системы более подходящим является акустический волновод с мягкими стенками.

С ростом частоты в качестве одной из парциальных подсистем целесообразно выбрать волновод с жесткими стенками.

Характерной особенностью взаимодействия волновых движений в составных волноводах является количественно сильно выраженное свойство нормальных волн, связанное с наличием частотных диапазонов с концентрацией волновых движений либо в жидком ядре либо в упругой оболочке. Этот эффект может обуславливать существенное изменение спектральных характеристик сигналов при регистрации их на поверхности оболочки или в жидком ядре.

1. *Rubinov S. I., Keller J. B.* Wave propagation in a fluid-filled tube // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1971.– **50**, N 1, Pt. 2.– P. 198–223.
2. *Borisyuk A. O.* Modeling of the acoustic properties of the larger human blood vessel // *Акуст. вісн.*– 1998.– 1, N 3.– С. 3–13.
3. *Skalak R.*, Wave propagation in blood flow // *Proc. Symp. Appl. Mech. Div. Biomechanics.*– Ed. by Y. C. Fung, – New York: ASME. – 1966.
4. *Жуковский Н. Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах // Полн. собр. соч., том 7.– М.-Л.: ОНТИ, 1937.– С. 58–151.
5. *Громеко И. С.* О скорости распространения волнообразного движения в упругих трубах // *Собр. соч.*– М.: Изд. АН СССР, 1952.– С. 172–183.
6. *Бергман Л.* Ультразвук.– М.: ИИЛ, 1957.– 726 с.
7. *Ильгамов М. А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ.– М.: Наука, 1969.– 184 с.
8. *Селезов И. Т.* О распространении малых возмущений в упругой цилиндрической оболочке, наполненной жидкостью // *Прикл. мех.*– 1965.– 1, N 3.– С. 10–16.
9. *Lin T. C., Morgan G. W.* Wave propagation through fluid contained in a cylindrical elastic shell // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1956.– **28**, N 6.– P. 1165–1176.
10. *Fuller C. R., Fahy F. J.* Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid // *J. Sound Vib.*– 1982.– **81**, N 4.– P. 501–518.
11. *Kumar R.* Flexural vibrations of fluid-filled circular cylindrical shells // *Acustica.*– 1971.– **24**, N 3.– P. 137–146.
12. *Kumar R.* Dispersion of axially symmetric waves in empty and fluid-filled circular cylindrical shells // *Acustica.*– 1972.– **25**, N 6.– P. 317–329.
13. *Lafleur L. D., Shields F. D.* Low-frequency propagation modes in a liquid-filled elastic tube waveguide // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1995.– **97**, N 3.– P. 1435–1445.
14. *Vollman J., Dual J.* High-resolution analysis of the complex wave spectrum in a cylindrical shell containing a viscoelastic medium. Part I. Theory and numerical results // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1997.– **102**, N 2, Pt. 1.– P. 896–908.

15. *Vollmann J., Breu R., Dual J.* High-resolution analysis of the complex wave spectrum in a cylindrical shell containing a viscoelastic medium. Part II. Experimental results versus theory // *J. Acoust. Soc. Amer.*–1997.– **102**, N 2, Pt. 1.– P. 909–920.
16. *Berliner M. J., Solecki R.* Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part I. Analytical formulation // *J. Acoust. Soc. Amer.*–1996.– **99**, N 4, Pt. 1.– P. 1841–1847.
17. *Berliner M. J., Solecki R.* Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part II. Numerical results // *J. Acoust. Soc. Amer.*–1996.– **99**, N 4, Pt. 1.– P. 1848–1853.
18. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // *Прикл. мех.*–1984.– **20**, N 1.– С. 21–26.
19. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Свойства нормальных неосесимметричных волн в толстостенном цилиндре, заполненном жидкостью // *Прикл. мех.*–1988.– **24**, N 10.– С. 15–20.
20. *Комиссарова Г. Л.* К решению задачи о распространении упругих волн в цилиндре с жидкостью // *Прикл. мех.*–1986.– **26**, N 8.– С. 25–29.
21. *Elvira-Segura L.* Acoustic wave dispersion in a cylindrical elastic tube filled with a viscous liquid // *Ultrasonics.*–2000.– **37**.– P. 537–547.
22. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Особенности динамического деформирования полого цилиндра // *Прикл. мех.*–1986.– **22**, N 5.– С. 3–8.
23. *Болотин В. В.* Плотность собственных значений в задачах о колебаниях упругих пластин и оболочек // *Труды VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966).*– М.: Наука, 1966.– С. 161–167.
24. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.