Акустичний вісник. 2000. Том 3, N 3. С. 32 – 43

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ – ЛЭМБА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СОСТЫКОВАННЫХ УПРУГИХ ПОЛУПОЛОС РАЗНОЙ ШИРИНЫ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.06.2000 ◇ Пересмотрено 5.10.2000

На основе метода суперпозиции проведен расчет дифракции волн Рэлея – Лэмба на вертикальной границе волновода, образованного при жестком контакте двух полуполос разной ширины и с различными упругими свойствами. Показано, что уменьшение ширины полуполосы, в которой распространяется падающая волна, приводит к качественным изменениям в перераспределении энергии падающей волны между отраженными и прошедшими полями. Эти изменения обусловлены значительными отличиями в степени возбуждения неоднородных волн в обеих полуполосах при изменении отношения их ширин.

На базі методу суперпозиції проведений розрахунок дифракції хвиль Релея – Лемба на вертикальній границі хвилепровода, утвореного при жорсткому контакті двох півсмуг різної ширини і з різними пружними властивостями. Показано, що зменшення ширини півсмуги, в якій розповсюджується падаюча хвиля, приводить до якісних змін в перерозподілі енергії падаючої хвилі між відбитими хвилями та хвилями, що пройшли в другу напівсмугу. Ці зміни зумовлені значною різницею в ефективності збудження неоднорідних хвиль в обох півсмугах при зміні відношення їхніх ширин.

On basis of method of superposition a diffraction of the Rayleigh – Lamb wave on a vertical boundary of waveguide formed by a strong contact of two halfstrips is calculated for case of their different widths and different elastic properties. It is shown that decrease of width of a halfstrip, in which the incident wave propagates, results in a qualitative change in energy redistribution of the incident wave between the reflected and transmitted fields. These changes are caused by significant distinctions in a degree of excitation of evanescent waves in both halfstrips at change of their width ratio.

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих прикладных задач геофизики, сейсмологии, акустоэлектроники, неразрушающих методов контроля связано с анализом распространения и дифракции упругих волн в нерегулярных волноводах. Нерегулярностью может служить включение в волноводе, ступенька или смена сечения волновода, смена свойств материала и т. д. Неоднородности различных типов оказывают большое влияние на распространение волн в области относительно высоких частот, когда характерные размеры неоднородности соизмеримы с длиной волны.

При изучении распространения нормальных волн в нерегулярных упругих волноводах в области относительно высоких частот были обнаружены явления, которые невозможно даже качественно объяснить в рамках одномерных приближений. Одним из них является захват энергии. Впервые захват энергии наблюдался экспериментально при изучении колебаний пьезокерамической пластины, часть поверхности которой покрыта электродами [1].

Особенность динамического деформирования пьезокерамической пластины, определенная как захват энергии, проявлялась в том, что на определенных частотах возбуждения электродированного участка пластины область интенсивных колебаний практически совпадала с областью, покрытой электродами. При этом колебания соседних неэлектродированных участков имели существенно более низкую амплитуду. Поскольку в пьезокерамической пластине механические свойства в областях под электродами и без электродов отличаются, последующий анализ захвата энергии основывался на изучении процесса отражения – прохождения волн на границе раздела состыкованных полуполос с различными механическими свойствами в пренебрежении эффектом электромеханической связи.

Анализу частотных зависимостей трансформации энергии первой нормальной моды в отраженные и прошедшие волны при дифракции на вертикальной границе в составном волноводе, образованном жестким контактом полуполос одинаковой ширины, но с разными механическими характеристиками, посвящены работы [2 – 5]. В них установлено, что в области существования только одной распространяющейся волны в каждой части волновода наблюдается резкое увеличении эффективности прохождения в определенном частотном диапазоне. В этом частотном диапазоне перераспределение энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями можно объяснить только значительным возбуждением неоднородных волн. Неоднородные волны появляются парами и образуют стоячую волну, которая не переносит энергии, однако их значительное возбуждение перестраивает картину волнового поля.

При анализе дифракции первой нормальной волны на вертикальной границе в составном волноводе рассматривались среды с различными механическими характеристиками, что приводит к различиям в дисперсионных характеристиках распространяющихся волн. За счет этих различий появляется рассогласование формы смещений на границе раздела между распространяющимися волнами в отраженном и прошедшем полях. Это является одной из причин значительного возбуждения неоднородных волн [4].

В данной работе изучаются частотные зависимости величины потока энергии в отраженном и прошедшем полях при дифракции первой нормальной моды на вертикальной границе в составном волноводе, образованном жестким контактом полуполос с разными механическим свойствами и различной толщиной. Таким образом, кроме физического рассогласования волновых полей за счет различия механических характеристик, появляется геометрическое рассогласование за счет различия в ширине полуполос.

Для относительно низкочастотных процессов достоверные количественные оценки энергетических характеристик волнового поля можно получить в рамках упрощенных моделей стержней и пластин. Принято считать, что одномерное приближение справедливо, если поперечный размер волновода меньше трети длины волны. При этом локальные особенности не оказывают существенного влияния на процессы преломления – отражения волн.

С повышением частоты усложняется пространственная структура бегущих волн. В формировании прошедшего и отраженного полей существенную роль начинают играть локализованные у поверхности раздела неоднородные волны. Для достоверного описания дифракционного вблизи поверхности контакта волнового поля необходимо учитывать характер особенности в окрестностях угловых точек. В дальнем поле влияние неоднородных волн, локализованных у поверхности раздела, незначительно. Поэтому анализ энергетических характеристик процесса преломления – отражения может быть проведен без учета локальных особенностей по напряжениям в угловых точках.

Традиционно развиваются два подхода к решению задачи дифракции на вертикальной границе в составном волноводе – на основе метода однородных решений и метода суперпозиции. Известно [6], что в случае наличия особенности по напряжениям при использовании метода однородных решений ряды по напряжениям расходятся. Поэтому в этом случае при простой редукции рядов не удается получить устойчивое решение граничной задачи. В рамках метода однородных решений с использованием условия обобщенной ортогональности предложена методика, позволяющая учитывать локальную особенность поля напряжений в угловой точке [5]. При этом рассматривалась дифракция нормальной волны на вертикальной поверхности в волноводе, составленном из полуполос одинаковой и разной ширины. Однако в упоминаемой работе не был проведен анализ физических особенностей процесса преломления – отражения волн на границе раздела.

Метод суперпозиции для решения граничных задач для волновода, образованного из полуполос одинаковой ширины, описан в работе [4]. Этот метод позволяет учесть локальную особенность по напряжениям в угловой точке через асимптотику неизвестных коэффициентов в рядах и интегралах, представляющих векторы смещений в волноводе. При этом напряжения и смещения, найденные в рамках метода суперпозиции, могут быть представлены как разложение по нормальным волнам. Важно отметить, что при переходе от представления вектора смещений в рамках метода суперпозиции к представлению через нормальные волны амплитуды возбуждения распространяющихся волн определяются значениями первых неизвестных в соответствующих бесконечных системах, поэтому анализ энергетических характеристик может быть проведен при использовании метода простой редукции.

В настоящей работе метод суперпозиции применяется для решения граничной задачи о жестком контакте двух полуполос разной ширины и с разными механическими характеристиками. При этом акцент сделан на изучение энергетических особенностей процесса отражения – прохождения волн на вертикальной границе при изменении ширины одной из полуполос. Показано, что уменьшение ширины полуполосы, в которой распространяется падающая волна, приводит к качественным

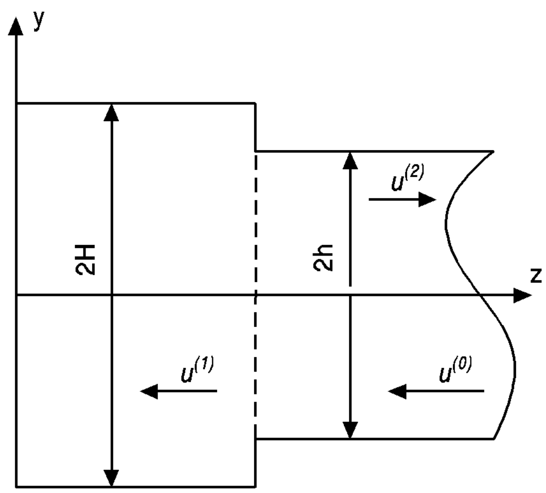


Рис. 1. Геометрия задачи

изменениям перераспределения энергии падающей волны между отраженным и прошедшим полями. Это явление обусловлено значительными различиями в степени возбуждения неоднородных волн в обеих полуполосах при изменении ширины одной из них.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное волновое поле в упругом волноводе, образованном жестким соединением двух упругих полуполос, имеющих ширины H и h и разные механические характеристики (рис. 1).

Свойства изотропных сред характеризуются модулями сдвига μ_1, μ_2, коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 и плотностями ρ_1, ρ_2 (индекс 1 – для левой полуполосы, а 2 – для правой). Поверхности $Y=\pm h$, $Y=\pm H$ свободны от напряжений. Для перехода к безразмерным величинам нормируем координаты к H: $y=Y/H$, $z=Z/H$.

Волновое поле возбуждается первой нормальной волной, приходящей из бесконечности во второй полуполосе $(+\infty)$. При записи выражений для волновых полей падающей волне соответствует индекс 0, а индексы 1 и 2 – прошедшим и отраженным волнам соответственно.

В зоне контакта условия сопряжения записываются в виде

$$\sigma_{zz}^{(1)}(y,0)=\begin{cases}\sigma_{zz}^{(2)}(y,0)+\sigma_{zz}^{(0)}(y,0), & |y|\le\alpha,\\ 0, & |y|\ge\alpha,\end{cases}$$

$$\tau_{zy}^{(1)}(y,0)=\begin{cases}\tau_{zy}^{(2)}(y,0)+\tau_{zy}^{(0)}(y,0), & |y|\le\alpha,\\ 0, & |y|\ge\alpha,\end{cases}\qquad(1)$$

$$u_y^{(1)}=u_y^{(2)}+u_y^{(0)},$$

$$u_z^{(1)}=u_z^{(2)}+u_z^{(0)},$$

$$|y|\le\alpha,\quad \alpha=h/H.$$

Здесь и далее временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускается (ω – круговая частота); $\alpha=h/H$.

Необходимо найти векторы смещений в отраженном и прошедшем полях, удовлетворяющие заданным граничным условиям и однородной системе уравнений Ламе. Дополнительно к условиям сопряжения (1) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна в прошедшем и отраженном поле уносит энергию от границы раздела на бесконечность.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной статье применялся метод суперпозиции [7], который позволяет учесть особенности по напряжениям в угловых точках. В рамках этого метода построим решение граничной задачи для симметричных колебаний составного волновода. Следуя общей схеме метода суперпозиции [7], компоненты вектора смещений в прошедшем поле $(z<0)$ представим в виде

$$u_y^{(1)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(1)}\beta_k e^{q_1 z}-D_k^{(1)}q_2 e^{q_2 z}\right)\sin\beta_k y+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^{(1)}(\tau)U_y^{(1)}(\tau,y)e^{-i\tau z}\,d\tau,$$

$$u_z^{(1)}=-iC_0^{(1)}\Omega_1^{(1)}e^{i\Omega_1^{(1)}z}-\qquad(2)$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(-C_k^{(1)}q_1 e^{q_1 z}+D_k^{(1)}\beta_k e^{q_2 z}\right)\cos\beta_k y-$$
$$-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^{(1)}(\tau)U_z^{(1)}(\tau,y)e^{-i\tau z}\,d\tau$$

с неизвестными постоянными $C_0^{(1)}$, $C_k^{(1)}$, $D_k^{(1)}$ $(k=1,2,\ldots)$ и функцией $x^{(1)}(\tau)$. В соотношениях (2) $\Omega_1^{(1)}=\omega H/c^{(l)}$; $c^{(l)}$ – скорость продольной волны в первой полуполосе. Кроме того, здесь положено

$$U_y^{(1)}(\tau,y)=$$
$$=p_1^2\left(\tau^2\frac{\operatorname{sh}p_2y}{\operatorname{sh}p_2}-\frac{(\tau^2+p_2^2)}{2}\frac{\operatorname{sh}p_1y}{\operatorname{sh}p_1}\right),$$
$$U_z^{(1)}(\tau,y)= \tag{3}$$
$$=\tau p_1\left(p_1p_2\frac{\operatorname{ch}p_2y}{\operatorname{ch}p_2}-\frac{(\tau^2+p_2^2)}{2}\frac{\operatorname{ch}p_1y}{\operatorname{ch}p_1}\right),$$

где

$$p_j=\begin{cases}\sqrt{\tau^2-\Omega_j^2}, & |\tau|\geq\Omega_j,\\ -i\sqrt{\Omega_j^2-\tau^2}, & |\tau|<\Omega_j;\end{cases}$$

$$q_j=\begin{cases}\sqrt{\beta_k^2-\Omega_j^2}, & |\beta_k|\geq\Omega_j,\\ -i\sqrt{\Omega_j^2-\beta_k^2}, & |\beta_k|<\Omega_j;\end{cases}$$

$$\Omega_2^{(1)}=\omega H/c^{(s)};\qquad \beta_k=k\pi;$$

$c^{(s)}$ – скорость поперечной волны в первой полуполосе. Решение для отраженного поля $(z>0)$ получаем из выражений (2) заменой индекса 1 на 2, сменой знака при (z,u_z,D_k) и заменами $y\to\alpha y$, $z\to\alpha z$. Для второй полуполосы нормированные частоты равны

$$\Omega_1^{(2)}=\frac{\omega h}{c^{(l2)}}=\Omega_1^{(1)}\alpha,$$

$$\Omega_2^{(2)}=\frac{\omega h}{c^{(s2)}}=\Omega_2^{(1)}\alpha,$$

а выражения для p_j, q_j по форме аналогичны выражениям (2). Обозначим их через $\widetilde{p}_j$, $\widetilde{q}_j$.

Представление вектора смещений в прошедшем поле в форме (2) допускает переход к представлению в виде суммы нормальных волн в бесконечной полосе [8]. Аналогично, для отраженного поля вектор смещения, представленный в рамках метода суперпозиции, может быть разложен в ряд по нормальным волнам. Таким образом, выражения типа (2) в неявном виде содержат два типа движения. Один из них связан с распространяющимися нормальными волнами, уносящими энергию на бесконечность от поверхности контакта. Число этих волн определяется частотой. Другой тип движения характеризуется локализацией возмущения вблизи границы и связан с неоднородными волнами, число которых всегда неограниченно. Значительное возбуждение неоднородных волн в том диапазоне частот, где в и отраженном, и в прошедшем полях существует только одна распространяющаяся волна, приводят к перестройке волнового поля вблизи границы раздела, что является причиной существенных изменений в процессе трансформации энергии падающей волны в энергию отраженных и прошедших волн.

Волновое поле в составном волноводе возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся во второй полуполосе в отрицательном направлении оси z. В этом случае выражения для амплитуды смещения в падающей волне имеют вид [4]:

$$u_z^{(0)}=-i\xi\left(\widetilde{p}_1^2\widetilde{p}_2\frac{\operatorname{ch}(\widetilde{p}_2\alpha y)\widetilde{p}_2}{\operatorname{sh}\widetilde{p}_2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\widetilde{p}_2^2+\xi^2}{2}\widetilde{p}_1\frac{\operatorname{ch}(\widetilde{p}_1\alpha y)}{\operatorname{sh}\widetilde{p}_1}\right)e^{-i\xi},$$
$$u_y^{(0)}=\widetilde{p}_1^2\left(\xi^2\frac{\operatorname{sh}(\widetilde{p}_2\alpha y)}{\operatorname{sh}\widetilde{p}_2}-\right. \tag{4}$$
$$\left.-\frac{\widetilde{p}_2^2+\xi^2}{2}\frac{\operatorname{sh}(\widetilde{p}_1\alpha y)}{\operatorname{sh}\widetilde{p}_1}\right)e^{-i\xi}.$$

Здесь ξ – постоянная распространения первой нормальной волны во второй полуполосе. Постоянная распространения для заданной частоты определяется из дисперсионного уравнения Рэлея – Лэмба:

$$\Delta(\xi)=\xi^2\widetilde{p}_1^2\widetilde{p}_2\operatorname{cth}\widetilde{p}_2-$$
$$-\frac{(\xi^2+\widetilde{p}_2^2)^2}{4}\widetilde{p}_1\operatorname{cth}\widetilde{p}_1=0. \tag{5}$$

Представление (3) выбрано таким образом, чтобы условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях $y=\pm1$, $z\leq0$ и $y=\pm\alpha$, $z\geq0$ выполнялось автоматически. Выполнение условия отсутствия нормальных напряжений на поверхностях $y=\pm1$, $y=\pm\alpha$ и условий сопряжения приводит к системе интегро-алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_0^{(i)}$, $C_k^{(i)}$, $D_k^{(i)}$ $(k=1,2,\ldots)$ и $x^{(i)}(\tau)$, имеющей следующий вид:

$$x^{(1)}(\tau)\Delta(\tau)+C_0^{(1)}\frac{2i\Omega_0^{(1)2}\Omega_1^{(1)}}{\tau^2-\Omega_1^{(1)2}}-\sum_{k=1}^{\infty}\left((C_k^{(1)}(\beta_k^2+\Omega_0^{(1)2})\frac{2q_1}{\tau^2+q_1^2}-D_k^{(1)}\beta_k\frac{2q_2^2}{\tau^2+q_2^2}\right)(-1)^k=0,$$

$$x^{(2)}(\tau)\Delta^{(2)}(\tau)+C_0^{(2)}\frac{2i\Omega_0^{(2)2}\Omega_1^{(2)}}{\tau^2-\Omega_1^{(2)2}}-\sum_{k=1}^{\infty}\left((C_k^{(2)}(\beta_k^2+\Omega_0^{(2)2})\frac{2\widetilde{q}_1}{\tau^2+\widetilde{q}_1^2}+D_k^{(2)}\beta_k\frac{2\widetilde{q}_2^2}{\tau^2+\widetilde{q}_2^2}\right)(-1)^k=0,$$

$$G_1\left(C_n^{(1)}q_1\beta_n-D_n^{(1)}\frac{\beta_n^2+q_2^2}{2}\right)+G_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(2)}\widetilde{q}_1\beta_k+D_k^{(2)}\frac{\beta_k^2+\widetilde{q}_2^2}{2}\right)\frac{(-1)^k\ 2\beta_k}{\beta_n^2-(\beta_k/\alpha)^2}\ \frac{\sin\alpha\beta_n}{\alpha^2}=$$

$$=G_2\frac{\xi\widetilde{p}_1^2(\xi^2+\widetilde{p}_2^2)}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha\beta_n}{\alpha}\left(\frac{\widetilde{p}_2\operatorname{cth}\widetilde{p}_2}{(\widetilde{p}_2/\alpha)^2+\beta_n^2}-\frac{\widetilde{p}_1\operatorname{cth}\widetilde{p}_1}{(\widetilde{p}_2/\alpha)^2+\beta_n^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\beta_n\cos\alpha\beta_n\left(\frac{1}{(\widetilde{p}_2/\alpha)^2+\beta_n^2}-\frac{1}{(\widetilde{p}_1/\alpha)^2+\beta_n^2}\right)\right),$$

$$\alpha iC_0^{(1)}\Omega_1^{(1)}+\alpha iC_0^{(2)}\Omega_1^{(2)}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(1)}q_1-D_k\beta_k\right)\frac{\sin\beta_k\alpha}{\beta_k}=-\alpha\xi\Omega_0^{(2)2},$$

$$(-1)^n\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(1)}q_1-D_k\beta_k\right)\frac{\sin\beta_k\alpha}{\beta_k}+C_n^{(2)}\widetilde{q}_1+D_n^{(2)}\beta_k=(-1)^n\alpha\xi_0\widetilde{p}_1^2\left(\frac{2\widetilde{p}_2^2}{\widetilde{p}_2^2+\beta_n^2}-\frac{\xi^2+\widetilde{p}_2^2}{\widetilde{p}_2^2+\beta_n^2}\right),$$

(6)

$$-\frac{(-1)^n}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(1)}\beta_k-D_kq_2\right)\frac{2\sin\beta_k\alpha}{\beta_k-(\beta_n/\alpha)^2}-\frac{(-1)^n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{(1)}(\tau)a_n(\tau)d\tau\right)+$$

$$+\alpha\left(C_n^{(2)}+D_n^{(2)}\frac{\widetilde{q}_1}{\beta_n}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{(2)}(\tau)\widetilde{a}_n(\tau)d\tau\right)=-i(-1)^n\alpha(\widetilde{a}_n\xi),$$

$$-G_1\left(C_0^{(1)}\frac{\Omega_2^{(1)2}}{2}+\frac{\Omega_2^{(1)2}\Omega_0^{(1)2}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{(1)}(\tau)d\tau\right)+$$

$$+G_2\left(C_0^{(2)}\frac{\Omega_2^{(2)2}}{2}+\frac{\Omega_2^{(2)2}\Omega_0^{(2)2}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{(2)}(\tau)d\tau\right)=-G_2i\frac{\Omega_2^{(2)2}\Omega_0^{(2)2}}{2},$$

$$G_1\left(C_n^{(1)}\frac{\beta_n^2+q_2^2}{2}-D_k^{(1)}\beta_nq_2-\frac{(-1)^n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{(1)}(\tau)b_n(\tau)d\tau\right)-$$

$$-G_2\left(C_0^{(1)}\frac{\Omega_2^{(2)2}\sin\alpha\beta_n}{\alpha\beta_n}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(2)}\frac{\beta_k^2+\widetilde{q}_2^2}{2}+D_k^{(2)}\beta_k\widetilde{q}_2\right)\frac{(-1)^k}{\beta_n^2-(\beta_k/\alpha)^2}\frac{2\beta_n\sin\beta_n\alpha}{\alpha}-\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{(2)}(\tau)\widetilde{d}_n(\tau)d\tau\right)=-G_2i\frac{\widetilde{d}_n(\xi)}{\alpha}.$$

Здесь введены обозначения

$$a_k(\tau)=p_1^2\left(\frac{2\tau^2}{\beta_k^2+p_2^2}-\frac{\tau^2+p_2^2}{\beta_k^2+p_1^2}\right);$$

$$b_k(\tau)=p_1^2\left(\frac{2\tau^2p_2^2}{\tau^2+q_2^2}-\frac{(\tau^2+\Omega_0^2)(\tau^2+p_2^2)}{\tau^2+q_1^2}\right);$$

$$d_k(\tau)=\frac{p_1^2\cos\alpha\beta_k}{\alpha}\left(\frac{2\tau^2p_2^2}{\beta_k^2+(p_2/\alpha)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\tau^2+\Omega_0^2)(\tau^2+p_2^2)}{\beta_k^2+(p_1/\alpha)^2}\right)+$$

$$+\beta_k\sin\alpha\beta_k\left(\frac{2\tau^2p_1^2p_2\mathrm{cth}\,p_2}{\beta_n^2+(p_2/\alpha)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\tau^2+\Omega_0^2)(\tau^2+p_2^2)p_1\mathrm{cth}\,p_1}{\beta_k^2+(p_1/\alpha)^2}\right);$$

$$2\Omega_0^2=\Omega_2^2-2\Omega_1^2.$$

Структура системы (6) аналогична структуре системы интегро-алгебраических уравнений, вытекающих из условий сопряжения на стыке полуполос одинаковой ширины. Отметим, что система (6) является системой второго рода.

В рамках метода суперпозиции характер сингулярности в поле напряжений может быть определен до решения граничной задачи в целом [9]. Поступая аналогично [4], представим нормальное и касательное напряжения в угловой точке $z=0$, $y=\pm\alpha$ в виде [9]

$$\sigma_z(\pm1,z)=\frac{\sigma_+}{(1-y^2)^{1-\epsilon}}+\psi(y),$$
$$\tau_{zy}(\pm1,z)=\frac{\tau_+}{y(1-y^2)^{1-\epsilon}}+\psi_1(y). \qquad (7)$$

Здесь $\psi(y)$, $\psi_1(y)$ – некоторые гладкие функции; $\sigma_{(+)}$, $\tau_{(+)}$ – неизвестные амплитуды напряжений. Показатель особенности $1-\epsilon$ в выражении (7) находим из уравнения

$$A\beta^2+2B\beta\lambda+C\lambda^2+2D\beta+2E\lambda+F=0, \qquad (8)$$

где

$$A=4\sin\epsilon\pi^2\left(\sin^2\epsilon\pi/2-\epsilon^2\right);$$

$$B=-D=2\epsilon^2\sin^2\epsilon\pi;$$

$$C=\left(\sin^2\epsilon\pi/2-\epsilon^2\right);$$

$$E=(2\epsilon^2-1)\sin^2\epsilon\pi+\sin^2\epsilon\pi/2-\epsilon^2;$$

$$F=\sin^2\epsilon3\pi/2-\epsilon^2.$$

Кроме того, в уравнении (8)

$$\lambda=\frac{G_2/G_1(1-\nu_1)-(1-\nu_2)}{G_2/G_1(1-\nu_1)+(1-\nu_2)};$$
$$\beta=\frac{1}{2}\,\frac{G_2/G_1(1-2\nu_1)-(1-2\nu_2)}{(G_2/G_1(1-\nu_1)+(1-\nu_2))}. \qquad (9)$$

Для $\alpha<1$ показатель особенности не зависит от величины α.

Существование в угловой точке особенности по напряжениям [9] приводит к тому, что в рамках метода суперпозиции интегралы и ряды для напряжений на линии контакта сходятся медленно. В данной работе рассматриваются интегральные (энергетические) характеристики отраженного и прошедшего полей. Учет особенности по напряжениям практически не влияет на величины этих характеристик. Это обусловлено тем, что амплитуды распространяющихся мод определяются, в основном, первыми неизвестными системы (6), как и для составного волновода одинаковой ширины [4]. Поэтому анализ трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие распространяющиеся волны может быть проведен при простой редукции системы (6). Анализ особенностей ближнего волнового поля должен быть проведен с учетом особенности по напряжениям в угловой точке $z=0$, $y=\pm\alpha$ и может быть выполнен аналогично [4].

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Количественный анализ выполнен с целью изучения трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие волны. Рассматривался частотный диапазон вплоть до частоты первого толщинно-сдвигового резонанса в отраженном или прошедшем полях, т.е. до частоты $\Omega_2^{(i)}\le\pi$, $(i=1,2)$. Механические характеристики состыкованных полуполос подбирались таким образом, чтобы при $h=H$ в отраженном поле бегущие волны более высоких порядков появлялись раньше, чем в прошедшем. При уменьшении h рассмотрены случаи, когда в отраженном и прошедшем полях распространяющиеся волны появляются одновременно, либо когда в прошедшем поле распространяющиеся волны появляются раньше, чем в отраженном. Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров сред: $\mu_2/\mu_1=6.5$, $\rho_2/\rho_1=8.5$, $\nu_2=0.29$, $\nu_1=0.3$. В этом случае для показателя особенности поля напряжений в угловой точке справедливо $1-\epsilon=0.34$. Следует отметить, что показатель особенности в угловой точке

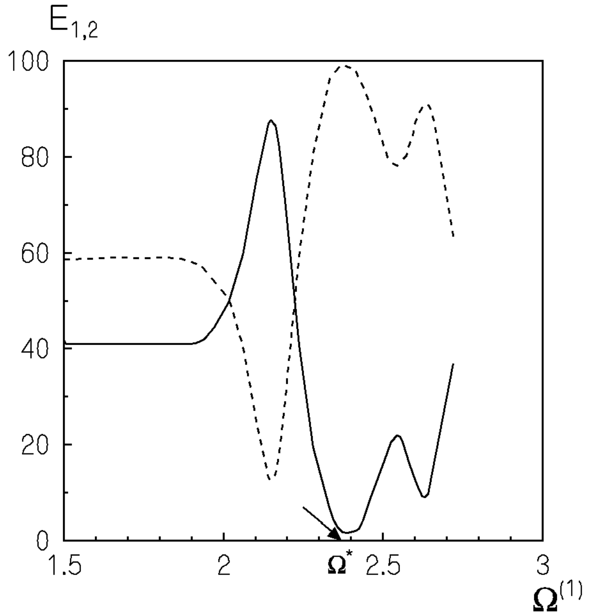


Рис. 2. Зависимость энергии от частоты при $h=H$:
сплошная – прошедшее поле,
штриховая – отраженное поле

для волновода, образованного из полуполос с теми же механическими характеристиками, но одинаковой ширины, равен $1-\epsilon=0.16$.

При выполнении расчетов в суммах системы (6) учитывалось до 15 неизвестных. При этом наблюдалась устойчивость решения, которая выражалась в том, что при увеличении числа членов ряда в суммах системы (6) от 10 до 15 значения первых неизвестных $C_k^{(1,2)}$, $D_k^{(1,2)}$ $(k=1,5)$ изменялось незначительно. При этом погрешность выполнения закона сохранения энергии не превышала 3%. Энергия отраженного поля определялась соотношением

$$W=\sum_{j=1}^{J} W_j, \qquad (10)$$

$$W_j=|K_j|^2 G_2\omega\widetilde{p}_1^2(\xi_j)\Omega_2^{(2)2}\Delta^{(2)\prime}(\xi_j).$$

Здесь J – число распространяющихся волн; K_j коэффициент возбуждения j-ой нормальной волны. Коэффициенты K_j для j-ой нормальной волны в отраженном поле находились из соотношения

$$K_j^{(\text{пр})}=\operatorname*{Res}_{\tau=\xi_j} x^{(2)}(\tau), \qquad (11)$$

где Res обозначают вычеты функции $x^{(2)}(\tau)$ при $\tau=\xi_j$. Здесь ξ_j – корни дисперсионного уравнения Рэлея – Лэмба (5). Энергия прошедшего поля находится аналогично при соответствующих заменах.

На рис. 2 представлено распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях в зависимости от частоты $\Omega_2^{(1)}=\omega H/c_2^{(1)}$ при равенстве ширины правой и левой полуполос $h=H$. Сплошная кривая соответствует энергии прошедшего поля, а штриховая – отраженного. Точками на оси E обозначены (в процентном отношении) энергии отраженного и прошедшего полей, найденные по одномерному приближению. Через Ω^* обозначена частота, на которой в отраженном поле появляются распространяющиеся волны высших порядков. В рассматриваемом диапазоне частот в прошедшем поле распространяющиеся волны высших порядков еще не появились. Для частот вплоть до $\Omega_2^{(1)}<1.9$ распределение энергии падающей волны между отраженной и прошедшей волнами практически постоянно и достаточно хорошо описывается в рамках стержневой модели. В этом частотном диапазоне энергия отраженного и прошедшего полей определяется только соотношением приведенных импедансов контактирующих сред $\rho_i c_i S_i$. Хотя при $\Omega_2^{(1)}=1.9$ распределение по толщине напряжения в падающей волне уже далеко от равномерного. На частоте $\Omega_2^{(1)}=1.9$ неравномерность в распределении напряжений характеризуется отношением $\sigma_{zz}(\pm1,z)/\sigma_{zz}(0,z)\simeq 2$.

Для частот выше $\Omega_2^{(1)}>1.9$ ситуация резко меняется, хотя в отраженном и прошедшем полях по-прежнему существует только по одной распространяющейся волне. Энергия прошедшего поля начинает увеличиваться и на частоте $\Omega_2^{(1)}=2.15$ наблюдается максимум прохождения. При дальнейшем росте частоты энергия прошедшего поля уменьшается и на частоте Ω^*, когда в отраженном поле появляются распространяющиеся волны высших порядков, наблюдается максимум отражения. Именно эффект резкого падения прозрачности границы раздела в волноводе обуславливает возникновение так называемого захвата энергии в неоднородных колебательных системах. За счет этого эффекта обеспечивается локализация области интенсивных колебаний в упругом теле даже при сравнительно небольших различиях механических характеристик импедансов отдельных его частей. Тогда в частотном диапазоне, в котором энергия во вторую среду практически не проходит, наблюдается захват энергии. Это явление связано с перераспределением энергии падающей волны между одной прошедшей и несколькими отраженными распространяющимися волнами. При этом в отраженном поле наиболее энергоемкой оказывается "обратная" волна.

В [4] проанализированы эффекты, наблюдаемые в области увеличения прозрачности границы (увеличение амплитуд неоднородных волн, рост рассогласованности формы распространяющихся волн в отраженном и прошедшем полях). В данной работе рассматривается влияние изменения ширины одной из полуполос на энергетические характеристики отраженного и прошедшего полей.

При изменении h изменяются дисперсионные характеристики распространяющихся волн в отраженном поле. На рис. 3 представлено распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях при $\alpha=0.9$. В этом случае рассогласованность отраженного и прошедшего полей обусловлена не только различием в дисперсионных характеристиках, но и геометрией. На частоте Ω^* распространяющиеся волны высших порядков появляются в отраженном, а на частоте $\widetilde{\Omega}^*$ – в прошедшем поле.

Как и в предыдущем случае, в низкочастотном пределе энергия отраженного и прошедшего полей хорошо описывается в рамках одномерного приближения. В отличии от случая $h=H$ (см. рис. 2) при уменьшении h в области относительно низких частот ($\Omega_2^{(2)} \leq 1.9$) стержневая модель дает ощутимую погрешность. С ростом частоты энергия отраженного поля увеличивается, хотя и незначительно, даже в области очень низких частот. Это приводит к тому, что даже в низкочастотном диапазоне энергия отраженного поля отличается от величины, найденной в одномерном приближении. Так, на частоте $\Omega_2^{(2)}=1.9$ ($\Omega_2^{(1)}=1.85$) энергия отраженного поля отличается от величины, найденной в одномерном приближении, на 4 %, в то время как при $h=H$ это отличие составляет только 0.5 %.

С ростом частоты как для $\alpha=1$, так и для $\alpha=0.9$ наблюдается явление увеличения прозрачности границы. При этом эффективность его проявления и ширина частотного диапазона, в котором оно наблюдается, для обоих случаев практически не отличаются. Изменение ширины полуполосы, в которой распространяется падающая волна, на 10 % сказывается на трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие волны в более высокочастотном диапазоне, когда появляются распространяющиеся волны высших порядков. В обоих случаях распространяющиеся волны высших порядков в отраженном поле появляются раньше, чем в прошедшем. На рис. 2 и 3 максимумы отражения наблюдаются на тех частотах, когда в отраженном поле появились распространяющиеся волны высших порядков, однако эффективность отражения отличается на 8 %. При дальнейшем росте частоты характер частотной зависимости энергии отраженного поля существенно изменяется, что обусловлено значительными различиями в дисперсионных характеристиках отраженного и прошедшего поля в рассматриваемых случаях. Таким образом, если в отраженном поле распространяющиеся волны высших порядков появляются раньше, чем в прошедшем, то уменьшение ширины полуполосы, в которой распространяется падающая волна, приводит к уменьшению эффективности отражения в диапазоне частот, где появляются распространяющиеся волны высших порядков. Геометрическая рассогласованность приводит к уменьшению эффективности захвата энергии при сохранении механических характеристик контактирующих полуполос.

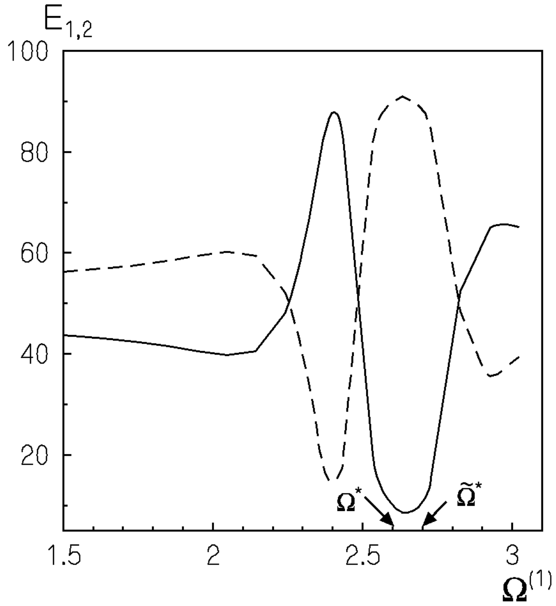


Рис. 3. Зависимость энергии от частоты при $h=0.9H$:
сплошная – прошедшее поле,
штриховая – отраженное поле

При $\alpha=0.87$ в отраженном и прошедшем полях распространяющиеся волны высших порядков появляются одновременно, так что в этом случае есть только геометрическая рассогласованность отраженного и прошедшего полей. Частотная зависимость энергии отраженного и прошедшего полей близка к представленной на рис. 3, т. е. эффект увеличения прозрачности границы в области частот, где существует только одна распространяющаяся волна, выражен достаточно сильно. В той области частот, где появляются распространяю-

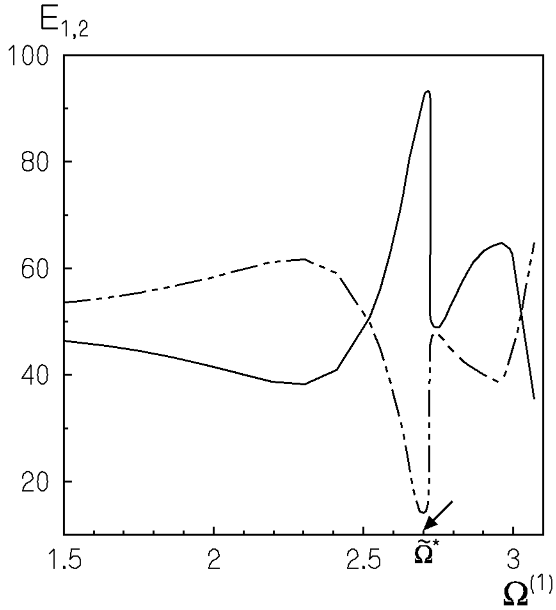


Рис. 4. Зависимость энергии от частоты при $h=0.8H$:
сплошная – прошедшее поле, *штриховая* – отраженное поле

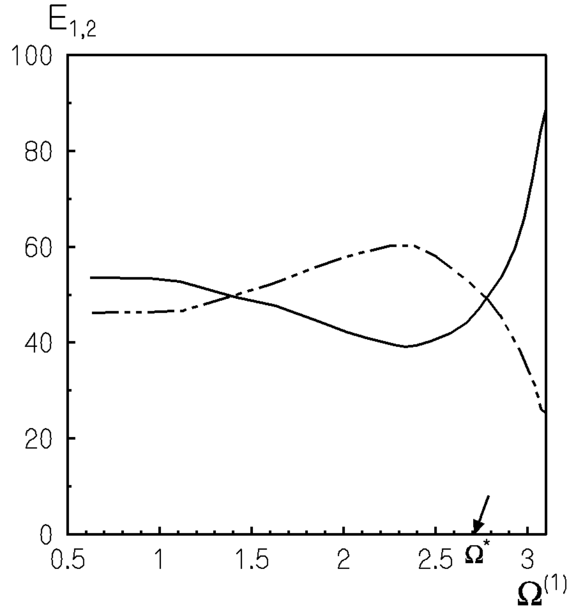


Рис. 5. Зависимость энергии от частоты при $h=0.7H$:
сплошная – прошедшее поле, *штриховая* – отраженное поле

щиеся волны высших порядков, наблюдается резкое увеличение эффективности отражения.

При дальнейшем уменьшении α распространяющиеся волны в прошедшем поле появляются раньше, чем в отраженном. На рис. 4 представлено распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях при $\alpha=0.8$. Через $\widetilde{\Omega}^*$ обозначена частота, на которой появляются распространяющиеся волны высших порядков в прошедшем поле. При $\alpha=0.8$ в низкочастотном пределе энергия отраженного поля остается больше, чем энергия прошедшего. Явление увеличения энергии отраженного поля с ростом частоты в области низких частот, которое не наблюдалось в волноводе, образованном полуполосами одинаковой ширины (см. рис. 2), выражено более ярко и смещено в более низкочастотную область. Явление увеличения прозрачности границы (увеличение эффективности прохождения) в области существования только одной распространяющейся волны в отраженном и прошедшем полях так же еще имеет место, однако частотный диапазон его проявления значительно сужается. Увеличения эффективности отражения в области существования распространяющихся прошедших волн высшего порядка не наблюдается. Таким образом, при значительной геометрической рассогласованности полуполос захват энергии не проявляется.

В низкочастотном пределе энергия падающей волны делится между отраженной и прошедшей волнами поровну при $\alpha=0.785$. При дальнейшем уменьшении α в низкочастотном пределе энергия отраженного поля меньше, чем энергия прошедшего. На рис. 5 представлено распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях при $\alpha=0.7$. С ростом частоты энергия отраженного поля незначительно растет и это приводит к тому, что уже на частоте $\Omega_2^{(2)}=1.15$ ($\Omega_2^{(1)}=1.44$) наблюдаются качественные изменения в распределении энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами. Энергия в отраженном и прошедшем полях приблизительно одинакова. В области существования только одной распространяющейся волны в отраженном и прошедшем полях увеличения эффективности прохождения не наблюдалось.

При дальнейшем уменьшении α характер частотной зависимости энергии отраженного и прошедшего полей в диапазоне частот, где существует только одна распространяющаяся волна, сохраняется, т. е. с ростом частоты увеличивается энергия отраженного поля, а резкого увеличения эффективности прохождения не наблюдается.

Явление резкого увеличения эффективности прохождения в области частот, когда в отраженном и прошедшем полях существует только одна распространяющаяся волна, связано с интенсивным возбуждением неоднородных волн в отраженном и прошедшем полях. На рис. 6 представлены частотные зависимости амплитуд первой неоднородной волны, нормированных на амплитуду падающей волны, для прошедшего и отраженного полей – сплошная и штриховая кривые соответственно. Рис. 6, а соответствует $\alpha = 0.9$, рис. 6, *б* – $\alpha = 0.8$ и рис. 6, *в* – $\alpha = 0.7$. Из этих рисунков видно, что с уменьшением α амплитуда первой неоднородной волны в прошедшем поле падает. При $\alpha = 0.7$ амплитуды неоднородных волн как в прошедшем, так и в отраженном полях не превышают амплитуды падающей волны. Для этого значения α резкого увеличения эффективности прохождения не наблюдается (см. рис. 5). При $\alpha = 0.8$ амплитуды неоднородных волн как в прошедшем, так и в отраженном полях превышают амплитуду падающей волны и частотный диапазон эффективного возбуждения неоднородных волн в отраженном и прошедшем полях уже, чем для $\alpha = 0.9$. Как уже отмечалось, частотный диапазон эффективного прохождения энергии для $\alpha = 0.8$ также уже, чем для $\alpha = 0.9$ (сравни рис. 6, а и рис. 6, *б*). Следует отметить, что область значительного возбуждения неоднородных волн в отраженном и прошедшем полях незначительно смещена относительно диапазона эффективного прохождения энергии во вторую среду. Однако увеличение эффективности прохождения связано именно с возбуждением неоднородных волн как в прошедшем, так и в отраженном полях.

Как и при анализе волновых полей в волноводе, образованном жестким контактом полуполос одинаковой ширины [4], значительное возбуждение неоднородных волн связано с рассогласованием типов движений в отраженном и прошедшем полях. В рассматриваемом случае, кроме физической, существует также геометрическая рассогласованность полей. При этом увеличение геометрической рассогласованности (уменьшение α) “подавляет” увеличение эффективности прохождения и эффект увеличения эффективности отражения в более высокочастотной области.

Распределения по толщине полуполосы нормальных и касательных напряжений, создаваемых распространяющейся нормальной волной как в правой, так и в левой полуполосе, существенно зависят от частоты. Поэтому соотношение между нормальными и касательными напряжениями удобно оценить через соответствующие составляющие среднего за период потока мощности, которые связаны с данными типами напряжений. На рис. 7 приведены частотные зависимости со-

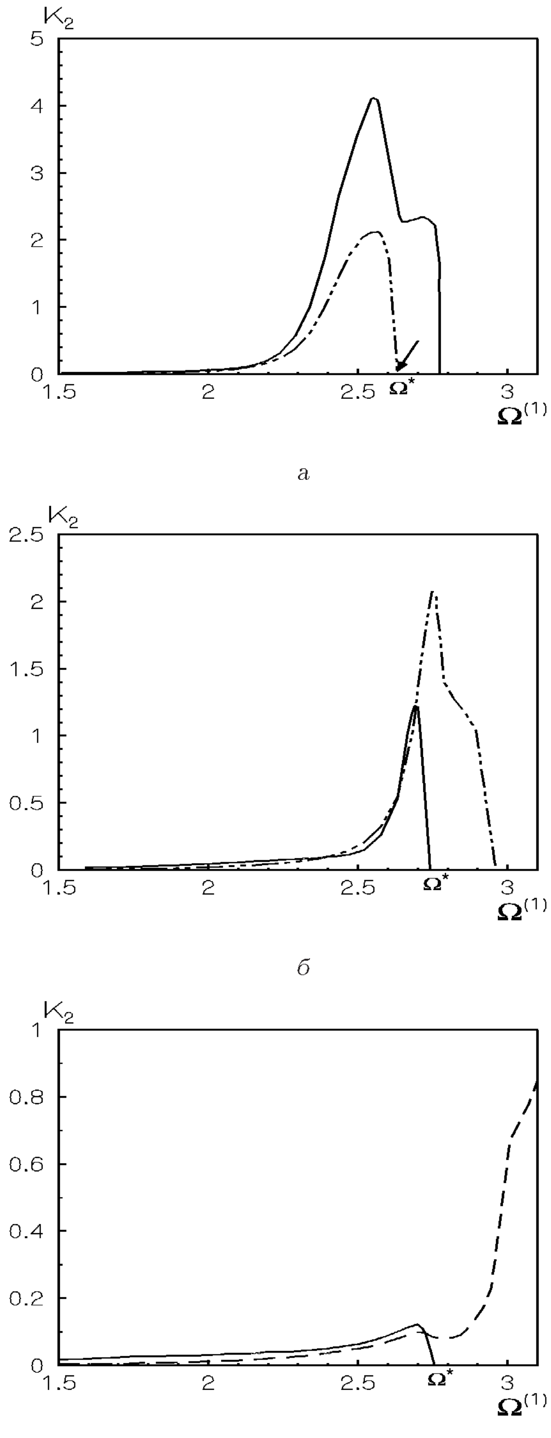


Рис. 6. Частотная зависимость модуля амплитуды первой неоднородной волны, нормированной на амплитуду падающей:

K_p – прошедшие волны, K_o – отраженные волны;

сплошная – распространяющиеся волны, *штриховая* – неоднородные волны;

а – $h = 0.9H$, б – $h = 0.8H$, в – $h = 0.7H$

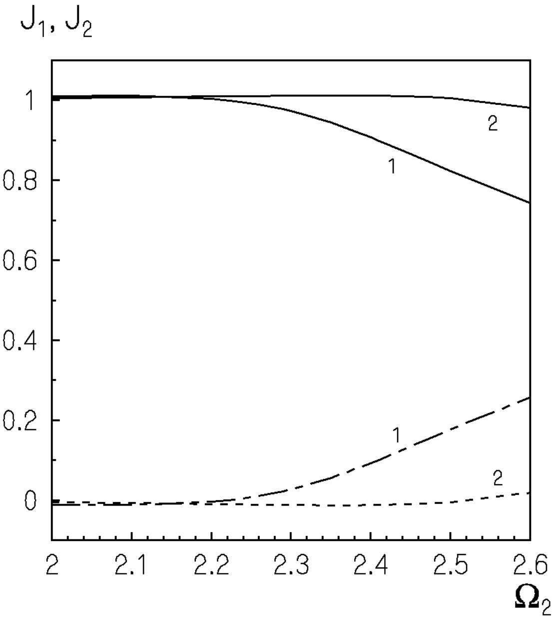


Рис. 7. Частотные зависимости составляющих энергии, характеризующие нормальные и сдвиговые компоненты движения:
сплошная – нормальная компонента, *штриховая* – сдвиговая компонента

ставляющих энергии, связанных с нормальными и сдвиговыми компонентами напряжений

$$J_1^{(i)} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \sigma_z^{(i)}(\xi_1, y) u_z^{(i)}(\xi_1, y) dy}{W_0},$$

$$J_2^{(i)} = \frac{\int\limits_{-1}^{1} \tau_y z^{(i)}(\xi_1, y) u_y^{(i)}(\xi_1, y) dy}{W_0},$$

нормированные на энергию падающей волны при $H=h$. Сплошная кривая соответствует $J_1^{(i)}$, штриховая – $J_2^{(i)}$, кривые *1* – отраженному полю, кривые *2* – прошедшему. Из рисунка следует, что с ростом частоты продольный тип движения трансформируется в сдвиговый.

Изменение характера движения по ширине волновода с ростом частоты носит еще более сложный характер. На рис. 8 показаны распределения $\sigma_z^{(i)}(\xi_1, y) u_z^{(i)}(\xi_1, y)/W_0$ и $\tau_{yz}^{(i)}(\xi_1, y) u_y^{(i)}(\xi_1, y)/W_0$ в зависимости от ширины для различных частот. С ростом частоты распределение продольной компоненты движения (см. рис. 8, а) существенно изменяется. При этом на частоте $\Omega_2^{(2)}=2.3$ на определенном интервале толщин y появляются отрицательные значения $\sigma_z^{(i)}(\xi_1, y) u_z^{(i)}(\xi_1, y)/W_0$ (кривая *4*). При дальнейшем росте частоты интервал толщин с отрицательными значениями $\sigma_z^{(i)}(\xi_1, y) u_z^{(i)}(\xi_1, y)/W_0$ перемещается к срединной плоскости пластины.

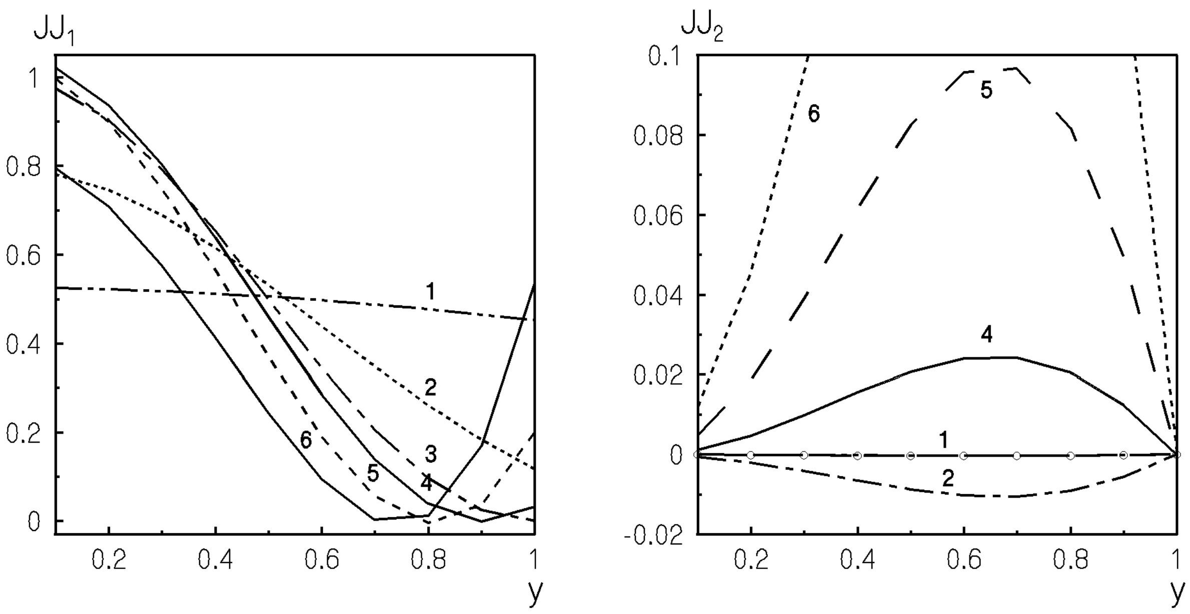
Для сдвиговой компоненты движения частота $\Omega_2^{(2)}=2.3$ также является особой. По всей ширине пластины $\tau_y z^{(i)}(\xi_1, y) u_y^{(i)}(\xi_1, y)/W_0$ меняет знак и резко увеличивается с ростом частоты.

Таким образом, особенности процесса отражения – прохождения волн на вертикальной границе раздела ступенчатого волновода в области существования только по одной распространяющейся волне в отраженном и прошедшем полях обусловлены значительным возбуждением неоднородных волн как в отраженном, так и в прошедшем полях. В свою очередь, возбуждение неоднородных волн обусловлено изменением характера движения на границе раздела, т. е. переходом от чисто продольных движений к продольно-сдвиговым. Для $\alpha<0.8$ в отраженном поле движения практически продольные, сдвиговая компонента очень мала, неоднородные волны возбуждаются слабо (см. рис. 8, а) и явления резкого увеличения эффективности прохождения не наблюдается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены частотные зависимости энергии отраженного и прошедшего полей в волноводе, образованном жестким контактом двух полуполос с различными механическими характеристиками и различной ширины. Установлено, что в области частот, когда в отраженном и прошедшем полях существует только по одной распространяющейся волне, наблюдается увеличение прозрачности границы раздела. Этот эффект обусловлен значительным возбуждением неоднородных волн как в отраженном, так и в прошедшем полях. В более высокочастотной области, где появляются распространяющиеся волны высших порядков частот, наблюдается эффект увеличения отражающих свойств границы.

Оба эффекта сохраняются только до определенных соотношений между шириной контактирующих полуполос ($\alpha \leq 0.7$). При дальнейшем уменьшении ширины полуполосы, в которой распространяется падающая волна, ни увеличения эффективности прохождения, ни увеличения эффективности отражения не наблюдалось. Это обусловлено тем, что при уменьшении ширины второй полуполосы в отраженном поле движения являются практически продольными и эффективно возбудить неоднородные волны не удается. Таким образом, значительная геометрическая рассогласован-



а *б*

Рис. 8. Распределение по толщине волновода составляющих потока мощности, связанных с нормальными и сдвиговыми компонентами движения:
а – для нормальной компоненты движения, *б* – для сдвиговой компоненты движения

ность полуполос приводит к качественным изменениям в процессе передачи энергии в той области частот, где существует только одна распространяющаяся волна.

В более высокочастотной области, когда появляются распространяющиеся волны высших порядков, значительная геометрическая рассогласованность полуполос приводит к исчезновению явления захвата энергии.

При уменьшении ширины первой (левой) полуполосы (прошедшее поле), очевидно, возможно значительно возбудить неоднородные волны при значительной геометрической рассогласованности. Таким образом, процесс трансформации энергии падающей волны в отраженные и прошедшие волны будет более сложным. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

1. *Shockley W., Curran D. R., Koneval D. J.* Trapped energy modes in quartz filter crystals // J. Acoust. Soc. Amer.– 1967.– **41**, N 4.– C. 981–993.
2. *Гетман И. П., Лисицкий О. Н.* Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ.– 1988.– **52**, N 6.– С. 1044–1048.
3. *Гринченко В. Т., Городецкая Н. С.* Отражение волн Лэмба о границы раздела в составном волноводе // Прик.мех.– 1985.– **21**, N 5.– С. 121–125.
4. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея-Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акуст. вiсн.– 2000.– **3**, N 1.– С. 1–13.
5. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н.* Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах // ПММ.– 1998.– **62**, N 2.– С. 297–303.
6. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* О возможности метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуполосы // Теор. и прикл. мех.– 1987.– Вып. 18.– С. 3–8.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
8. *Гомилко А. М., Мелешко В. В.* Гармонические волны в полубесконечном упругом слое // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1985.– N 2.– С. 28–32.
9. *Боджи Д.* Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // Прикладная механика. Тр. Амер. общ. инженеров-механиков.– 1971.– **38**, N 2.– С. 87–96.
10. *Glushkov E. V., Glushkova N. V.* Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Amer.– 1997.– **102**, N 3.– C. 1356–1360.