

УДК 539.3

## КИНЕМАТИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

В. И. ГУЛЯЕВ\*, Г. М. ИВАНЧЕНКО\*\*,  
П. З. ЛУГОВОЙ\*\*\*, Е. В. ЯКОВЕНКО\*

\* Украинский транспортный университет, Киев

\*\* Киевский национальный университет строительства и архитектуры

\*\*\* Институт механики НАН Украины им. С. П. Тимошенко, Киев

Получено 18.04.2000 ◊ Пересмотрено 10.06.2000

Изучение взаимодействия ударной волны с поверхностью раздела трансверсально-изотропных упругих сред с различными механическими свойствами связывается с постановкой двух задач: построением фронтов формирующихся отраженных и преломленных ударных волн и определением интенсивностей полевых функций в их окрестностях. Первая из этих задач – чисто кинематическая, вторая – динамическая. Для их решения используется нулевое приближение лучевого метода, связанное с введением лучевой системы координат, одна из координатных поверхностей которых совпадает с трансформирующимся фронтом ударной волны. Анализ перестройки системы лучей и фронтов в окрестности разделяющей поверхности осуществляется на основе локально-плоского подхода.

Вивчення взаємодії ударної хвилі з поверхнею розділу трансверсально-ізотропних пружних середовищ з різними механічними властивостями пов'язується з постановкою двох задач: побудовою фронтів вбитих та заломлених ударних хвиль і визначення інтенсивностей польових функцій в їх околі. Перша з цих задач – чисто кінематична, друга – динамічна. Для їх розв'язку використовується нульове наближення променевого методу, пов'язане з введенням променевої системи координат, одна з координатних поверхонь якої співпадає з фронтом ударної хвилі, який трансформується. Аналіз перебудови системи променів і фронтів в околі поверхні розділу середовищ здійснюється на основі локально-плоского підходу.

Investigation of a shock wave interaction with an interface between transversally isotropic elastic media possessing differing mechanical properties is fulfilled via set up of two problems: construction of fronts of formed reflected and refracted shock waves and determination of the field functions intensities in their vicinities. The former is purely kinematic, the latter is dynamic. Zero approximation of the ray method is used for their solution. It is associated with introduction of a ray coordinate system. One of its coordinate surfaces coincides with the transforming front of the shock wave. Analysis of transformation of the rays and fronts system in the interface neighbourhood is performed on the basis of the locally plane approach.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи математического моделирования процессов взаимодействия ударной волны с поверхностями раздела упругих анизотропных сред, обладающих различными механическими свойствами, оказываются актуальными в сейсмологии, сейсморазведке, а также при исследовании динамического поведения тектонических структур, подвергающихся воздействию взрывных возмущений. Важное место в исследовании возникающих при этом динамических явлений принадлежит лучевому методу, широко встречающемуся в математической физике. Его применение в теории распространения упругих ударных волн дает возможность построить лучевую систему координат, выделить поверхность фронта волны и проследить за поведением полевых функций в некоторой его окрестности. Точки поверхности фронта, в которых якобиан преобразования лучевой системы координат в декартову вырождается, являются бифуркационными. Располагая системой волновых лучей,

можно ставить задачу о выделении их семейства, имеющего общие огибающие (каустики), на которых лучи фокусируются и интенсивность поля неограниченно возрастает, а также вдоль которых движутся особенности волнового фронта. В геометрической оптике классификация каустик и особенностей фронтов осуществляется на основе теории особенностей дифференцируемых отображений – теории катастроф [1–5]. В задачах динамики анизотропных упругих сред, благодаря тому, что их поведение отличается наличием различным образом поляризованных волн, фазовые скорости которых зависят от направления движения, лучи перестают быть ортогональными поверхностям фазовых фронтов, и геометрия системы лучей в общем случае получает дополнительное усложнение. Это обстоятельство усложняет и картину взаимодействия ударных волн с поверхностями раздела упругих сред, имеющих отличающиеся механические свойства. В связи с тем, что знаменатели соответствующих уравнений Снеллиуса, описывающих кинематику этого взаимодей-

ствия, перестают быть константами и сами уравнения приобретают существенно нелинейную форму, становится более сложной также методика их решения. Углы падения, при которых эти уравнения имеют бифуркационные решения, являются критическими. Им могут соответствовать эффекты, аналогичные известному в оптике явлению полного внутреннего отражения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возмущенное состояние упругой анизотропной среды, характеризуемой тензором упругих постоянных  $C_{ik,pq}$  и плотностью  $\rho$ , в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  определяется вектором упругих смещений  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3; t)$ , где  $t$  – время. Располагая этой функцией, можно с помощью закона Гука определить компоненты тензора напряжений [6]

$$\sigma_{ik} = \sum_{p,q=1}^3 c_{ik,pq} \frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \quad (1)$$

$$i, k = 1, 2, 3.$$

Движение среды описывается уравнениями

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

где  $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq}/\rho$ ;  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора упругих смещений.

Упругие свойства трансверсально-изотропных сред характеризуются пятью неприводимыми параметрами. Представим компоненты  $C_{ik,pq}$  тензора упругих постоянных в виде квадратной матрицы [6]

$$(C_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu - p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (3)$$

соответствие элементов которой с компонентами тензора  $c_{ik,pq}$  устанавливается по схеме

$$\begin{aligned} (11) &\leftrightarrow 1; & (22) &\leftrightarrow 2; & (33) &\leftrightarrow 3; \\ (23) &= (32) \leftrightarrow 4; & (31) &= (13) \leftrightarrow 5; & (4) \\ (12) &= (21) \leftrightarrow 6. \end{aligned}$$

Таким образом, три параметра  $l, m$  и  $p$  в соотношениях (3), (4) характеризуют отличие рассматриваемых сред от изотропной среды с упругими константами Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . При этом главные диагональные миноры матрицы (3) удовлетворяют условиям

$$C_{1,1} > 0, \quad \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{vmatrix} > 0 \quad \dots, \quad |C_{\alpha,\beta}| > 0. \quad (5)$$

Неравенства (5) обеспечивают положительную определенность соответствующих квадратичных форм.

Рассмотрим решения системы (2) в виде плоской монохроматической волны с волновым числом  $k$  и фазовой скоростью  $v$ . Ее фронтами являются поверхности постоянных фаз

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}, \quad (6)$$

локально совпадающие с площадками, перпендикулярными орту  $\mathbf{n}$  и движущимися со скоростью  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{n}$ .

Вектор поляризации волны  $\mathbf{A}$  и ее фазовая скорость  $\mathbf{v}$  для выбранного направления  $\mathbf{n}$  определяются на основе однородной системы алгебраических уравнений [6, 7]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

матрица

$$\Lambda_{iq} \equiv \sum_{k,p=q}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p, \quad (8)$$

$$i, q = 1, 2, 3$$

которой обладает свойствами симметрии и положительной определенности.

Из условия существования нетривиальных решений этой системы следует уравнение третьей степени относительно  $v^2$ :

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (9)$$

с помощью которого для каждого  $\mathbf{n}$  получаем

$$[v^{(1)}(\mathbf{n})]^2 > [v^{(2)}(\mathbf{n})]^2 \geq [v^{(3)}(\mathbf{n})]^2 > 0. \quad (10)$$

Придавая величине  $v^2$  в системе (7) одно из найденных значений  $[v^{(r)}(\mathbf{n})]^2$ ,  $r = 1, 2, 3$ , находим систему для определения компонент вектора поляризации  $\mathbf{A}^{(r)}$  волны, движущейся в направлении  $\mathbf{n}$  с

фазовой скоростью  $v^{(r)}(\mathbf{n})$ :

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} - [v^{(r)}]^2 A_i^{(r)} = 0, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Для любого выбранного  $\mathbf{n}$  эти векторы удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}^{(k)}(\mathbf{n}) = \delta_{ik}, \quad (12)$$

$$i, k = 1, 2, 3.$$

Если рассматривать ударную волну, то из выражения (11) следует, что поверхность ее фронта можно представить соотношением

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (13)$$

в котором функция  $\tau$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка [6]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (14)$$

обобщающему уравнение эйконала в геометрической оптике на случай анизотропных упругих сред.

Входящие в уравнение (14) величины  $p_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  представляют собой компоненты вектора рефракции

$$p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v^{(r)}(\mathbf{n})$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Для построения волнового фронта (13) необходимо найти решения уравнения (14), которое с помощью метода характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_k / d\tau = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (15)$$

$$dp_k / d\tau = 0,$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Первая группа этих уравнений описывает пространство волны вдоль лучей с лучевой скоростью  $\xi = \xi^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$ , которые для однородных сред оказываются прямолинейными, однако в общем случае не ортогональными фазовому фронту. Точки поверхности фронта, в которых определитель

матрицы коэффициентов правой части этой системы

$$\left\| \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} A_q^{(r)} A_i^{(r)} \right\|, \quad k = 1, 2, 3$$

обращается в нуль, являются бифуркационными, поскольку в их малой окрестности одному направлению вектора нормали  $\mathbf{n}$  могут соответствовать два или более направлений лучей. Поэтому такие точки лежат либо на каустиках, либо в точках фокусировки лучей.

Построенная с помощью уравнений (15) система лучей и фронтов позволяет приступить к определению интенсивности волны в окрестности фронта. Для этого используется нулевой член разложения решения системы (2) вдоль луча в ряд [6, 8–11]

$$u_q = \sum_{m=0}^{\infty} u_q^{(m)}(x_1, x_2, x_3) \times$$

$$\times f_m[t - \tau(x_1, x_2, x_3)], \quad (16)$$

$$q = 1, 2, 3.$$

Здесь функции  $f_m$ , удовлетворяющие соотношениям  $f_m(y) = f_{m-1}(y)$ , предполагаются имеющими разрывы непрерывности в производных, например, порядка  $n+2$ .

В этом случае вектор  $\mathbf{u}^{(0)}$  находим из однородной системы уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p u_q^{(0)} - u_i^{(0)} = 0, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

решение которой представляется в виде [6]

$$u_q^{(0)} = \frac{c_0(\alpha, \beta) \cdot A_q^{(r)}(\tau, \alpha, \beta)}{\sqrt{J(\tau, \alpha, \beta)}} \times$$

$$\times f_0[t - \tau(x_1, x_2, x_3)], \quad (18)$$

$$q = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\tau, \alpha, \beta$  – система лучевых координат; функциональный определитель  $J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(\tau, \alpha, \beta)$  преобразования лучевых координат в декартовы является мерой расхождения лучей в лучевой трубке. Точки поверхности фронта, в которых  $J=0$ , соответствуют точкам ее бифуркации [3].

## 2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Приведенные выше соотношения позволяют проследивать эволюцию фронта ударной волны и

вычислять значения разрывов полевых функций на его поверхности вне границы раздела анизотропных упругих сред с различными свойствами. Рассмотрим случай взаимодействия осесимметричной ударной волны, испущенной из источника  $C$ , с эллипсоидальной поверхностью вращения  $G$  раздела двух трансверсально-изотропных упругих сред (рис. 1). Пусть оси симметрии бесконечно высокого порядка для упругих свойств их материалов и ось вращения эллипсоида параллельны между собой и задача является осесимметричной. Примем “локально-плоское приближение” [6, 7], в соответствии с которым в месте падения волны на разделяющую поверхность  $G$  лучи падающей, отраженных и преломленных волн, а также векторы их поляризации лежат в одной плоскости, содержащей луч падающей волны и нормаль к поверхности. Это позволяет вводить в рассмотрение углы  $\Theta_{(1+)}^{(\nu)}$  и  $\Theta_{(2+)}^{(\mu)}$ ,  $\mu=1, 2$ ,  $\nu=1, 2$ , с которыми отраженные и преломленные волны отходят от границы  $G$ , и применять обобщенный закон Снеллиуса. Здесь и далее будут использоваться следующие индексные обозначения: верхний индекс в скобках определяет тип волны (1 соответствует квазипродольной  $qP$ -волне, 2 – квазипоперечной  $qS$ -волне), к которой относится данная величина. Нижний индекс в скобках указывает на среду, в которой распространяется волна (1 – среда падающей и отраженной волн, 2 – преломленных волн). Знак “–” в нижнем индексе имеют величины до ударного взаимодействия, “+” – после удара. В принятых обозначениях уравнения Снеллиуса имеют следующий вид:

$$\frac{\sin(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma)}{v_{(1-)}^{(r)}[\Theta_{(1-)}^{(r)}]} = \frac{\sin(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma)}{v_{(1+)}^{(\nu)}[\Theta_{(1+)}^{(\nu)}]} = \frac{\sin(\Theta_{(2+)}^{(\mu)} - \gamma)}{v_{(2+)}^{(\mu)}[\Theta_{(2+)}^{(\mu)}]}, \quad r, \mu, \nu = 1, 2. \quad (19)$$

Здесь  $\Theta_{(1-)}^{(r)}$  – угол между направлением волновой нормали падающей в среде 1 волны и осью  $Ox_2$ ;  $\Theta_{(1+)}^{(\nu)}$ ,  $\Theta_{(2+)}^{(\mu)}$ ,  $\mu=1, 2$ ,  $\nu=1, 2$  – углы между направлением волновой нормали и осью  $Ox_2$  отраженных и преломленных волн соответственно (см. рис. 1);  $\gamma$  – угол наклона касательной к эллиптической поверхности раздела.

Отличие соотношений (19) от формы закона Снеллиуса для изотропных сред обусловлено зависимостью фазовых скоростей отраженных и преломленных волн  $v_{(1+)}^{(\nu)}[\Theta_{(1+)}^{(\nu)}]$ ,  $v_{(2+)}^{(\mu)}[\Theta_{(2+)}^{(\mu)}]$ , стоящих в знаменателе, от соответствующих углов  $\Theta_{(1+)}^{(\nu)}$ ,

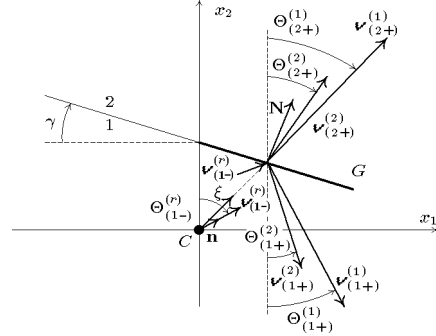


Рис. 1. Схема формирования лучей отраженных и преломленных волн на наклонной плоскости раздела

$\Theta_{(2+)}^{(\mu)}$  и неявно от угла падения  $\Theta_{(1-)}^{(r)}$ . Поэтому, чтобы найти значения углов  $\Theta_{(1+)}^{(\nu)}$ ,  $\Theta_{(2+)}^{(\mu)}$ ,  $\mu=1, 2$ ,  $\nu=1, 2$ , соответствующих данному  $\Theta_{(1-)}^{(r)}$ , необходимо решить нелинейную систему уравнений (19). Для этого воспользуемся методом Ньютона совместно с методом продолжения решения по параметру [12–14]. Вследствие того, что в системе (19) угол  $\gamma$  является переменным, при построении ее решений будем варьировать также и его. В качестве ведущего параметра выберем переменную  $\Theta_{(1-)}^{(r)}$ . Рассмотрим первое равенство системы (19). Пусть при некотором значении  $\Theta_{(1-)}^{(r)} = [\Theta_{(1-)}^{(r)}]_n$  углы  $[\Theta_{(1+)}^{(\nu)}]_n$  и  $[\gamma]_n$  определены. Дадим малое приращение  $[\Delta\Theta_{(1-)}^{(r)}]_n$  величине  $[\Theta_{(1-)}^{(r)}]_n$ . Соответствующее ему приращение  $[\Delta\gamma]_n$  найдем как разность углов  $[\gamma]_{n+1} - [\gamma]_n$ , соответствующих значениям  $[\Theta_{(1-)}^{(r)}]_{n+1}$ ,  $[\Theta_{(1-)}^{(r)}]_n$  для выбранного очертания поверхности раздела. Чтобы найти приращения  $[\Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}]_n$ , выпишем вытекающее из системы (19) равенство

$$\begin{aligned} & \sin(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma + \Delta\Theta_{(1-)}^{(r)})_n \times \\ & \quad \times v_{(\mu+)}^{(\nu)}(\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)} + \Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)})_n - \\ & - \sin(\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)} + \gamma + \Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)})_n \times \\ & \quad \times v_{(1-)}^{(r)}(\Theta_{(1-)}^{(r)} + \Delta\Theta_{(1-)}^{(r)})_n = 0. \end{aligned}$$

Выделяя его линейную часть, получаем

$$\begin{aligned}
 [\Delta\Theta_{(1+)}^{(\nu)}]_n &\approx \\
 &\approx \left\{ \left\{ [\sin(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) \partial v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)}) / \partial \Theta_{(1-)}^{(r)} - \right. \right. \\
 &\quad - \cos(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)})] \Delta\Theta_{(1-)}^{(r)} + \\
 &\quad + [\cos(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) \times v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)}) + \\
 &\quad + \cos(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)})] \Delta\gamma \} \times \\
 &\quad \times [\sin(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) \partial v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)}) / \partial \Theta_{(1+)}^{(\nu)} - \\
 &\quad - \cos(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)})]^{-1} \left. \right\}_n, \\
 [\Delta\gamma]_n &= f[\Delta\Theta_{(1-)}^{(r)}].
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подсчитав  $[\Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}]_n$ , найдем кинематические параметры элемента поверхности фронта:

$$\begin{aligned}
 [\Theta_{(1-)}^{(r)}]_{n+1} &= [\Theta_{(1-)}^{(r)} + \Delta\Theta_{(1-)}^{(r)}]_n, \\
 [\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}]_{n+1} &= [\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)} + \Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}]_n, \\
 [v_{(\mu+)}^{(\nu)} (\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)})]_{n+1} &.
 \end{aligned}$$

Выполнив линеаризацию уравнений (19) в окрестности этого состояния, определим  $[\Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}]_{n+1}$ , соответствующее  $[\Delta\Theta_{(1-)}^{(r)}]_{n+1}$ , и т.д. При этом необходимо иметь в виду, что поскольку зависимость (20) является приближенной, погрешность вычисления  $[\Delta\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}]_m$  с увеличением  $m$  возрастает. Поэтому для компенсации неточности необходимо, как это делается в методе Ньютона, добавить в правую часть соотношений (20) невязку уравнений (19), взятую с обратным знаком. В

итоге получим вычислительную схему

$$\begin{aligned}
 [\Delta\Theta_{(1+)}^{(\nu)}]_n &\approx \\
 &\approx \left\{ \left\{ [\sin(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) \partial v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)}) / \partial \Theta_{(1-)}^{(r)} - \right. \right. \\
 &\quad - \cos(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)})] \Delta\Theta_{(1-)}^{(r)} + \\
 &\quad + [\cos(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)}) + \\
 &\quad + \cos(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)})] \Delta\gamma \} \times \\
 &\quad \times [\sin(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) \partial v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)}) / \partial \Theta_{(1+)}^{(\nu)} - \\
 &\quad - \cos(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)})]^{-1} + \\
 &\quad + \sin(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) v_{(1-)}^{(r)} (\Theta_{(1-)}^{(r)}) - \\
 &\quad - \sin(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) v_{(1+)}^{(\nu)} (\Theta_{(1+)}^{(\nu)}) \left. \right\}_n,
 \end{aligned} \tag{21}$$

совмещающую метод продолжения решения по параметру и метод Ньютона. Ее точность повышается с уменьшением  $[\Delta\Theta_{(1-)}^{(r)}]_n$ . Для вычисления производной  $\partial v / \partial \Theta$  необходимо продифференцировать левую часть уравнения (7) по  $\Theta$  и приравнять производную к нулю. Обозначим через  $B$  матрицу элементов

$$b_{iq} = \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq},$$

а алгебраические дополнения этих элементов – через  $B_{iq}$ ,  $i=1,2,3$ ,  $q=1,2,3$ . Тогда, поскольку при варьировании  $\Theta$  условие (7) сохраняется, имеем  $\partial |B| / \partial \Theta = 0$  или

$$\sum_{i,q=1}^3 \frac{\partial b_{iq}}{\partial \Theta} B_{iq} = 0. \tag{22}$$

Подставив в уравнение (22)

$$\begin{aligned}
 \partial b_{iq} / \partial \Theta &= \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} (n_k \partial n_p / \partial \Theta + \\
 &\quad + n_p \partial n_k / \partial \Theta - 2v \partial v / \partial \Theta \cdot \delta_{iq}),
 \end{aligned}$$

получим уравнение, из которого найдем  $\partial v / \partial \Theta$ . Выполнив эти вычисления в окрестности  $\Theta = \Theta_n$ ,

$v = v(\Theta_n)$ , определим  $\partial v / \partial \Theta_n$ . Аналогично определяется  $\partial v_{(\mu+)}^{(\nu)}(\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)})_n / \partial \Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}$ .

Реализация вычислений по схеме (21) возможна при наличии некоторого начального состояния  $\Theta_0$ ,  $v(\Theta_0)$ ,  $\Theta_0^{(\nu)}$ ,  $v^{(\nu)}(\Theta_0^{(\nu)})$ ,  $\gamma_0$ . Для данного случая в соответствии с соотношениями (19) удобно выбрать  $\Theta_0 = 0$ ,  $v(0)$ ,  $\Theta_0^{(\nu)} = 0$ ,  $v^{(\nu)}(0)$ ,  $\gamma_0 = 0$ . Формула (21) позволяет найти единственное приращение  $\Delta \Theta^{(\nu)}$  для значения угла падения  $\Theta$ , при котором знаменатель в правой части выражения (21) отличен от нуля. Поэтому равенство

$$\left\{ \sin(\Theta_{(1-)}^{(r)} - \gamma) \partial v_{(1+)}^{(\nu)}(\Theta_{(1+)}^{(\nu)}) / \partial \Theta_{(1+)}^{(\nu)} - \right. \\ \left. - \cos(\Theta_{(1+)}^{(\nu)} + \gamma) v_{(1-)}^{(r)}(\Theta_{(1-)}^{(r)}) \right\}_n = 0 \quad (23)$$

представляет собой условие бифуркации решения. Для продолжения решения через это состояние следует в выражение (21) добавить члены второго, а в случае необходимости третьего и т.д. порядков [12].

Условие (23) возможной неединственности решений системы (19) соответствует эффекту схождения (касания) и пересечения отраженных и преломленных лучей после взаимодействия падающих лучей с границей раздела  $G$ , а множество таких критических ситуаций связано с образованием огибающей семейства лучей – каустики. Геометрические свойства каустик световых лучей изучены методами геометрической оптики [1–4], базирующейся лишь на двух следствиях из принципа наименьшего времени Ферма. На разделяющей поверхности они сводятся к тому, что при отражении от нее света угол падения равен углу отражения, а при прохождении его через границу раздела углы падения и преломления подчиняются закону преломления. При этом, поскольку на огибающей семейства лучей происходит их фокусировка, интенсивность светового поля вдоль каустики неограниченно возрастает, а на поверхностях фазовых фронтов образуются особенности в виде ребер возврата. В оптике основная причина возникновения каустик связана, как правило, с криволинейностью поверхности раздела оптических сред.

В механике анизотропных сред, как это следует из уравнений (7) и (19), геометрические особенности на поверхностях отраженных и преломленных волновых фронтов и каустики могут формироваться в результате взаимодействия регулярно падающего волнового фронта даже с плоской границей  $G$ .

Поскольку особенности волнового фронта поро-

ждаются на каустиках, то на каустиках происходит и его фокусировка, сопровождаемая обращением в нуль функционального определителя  $J$  в выражении (18) и неограниченным возрастанием интенсивности поля в местах геометрических особенностей. Поэтому в рамках идеальной теории упругости и лучевого метода напряжения на каустиках равны бесконечности. Подчеркнем, однако, что фактически в особых точках фазовых фронтов и на каустиках неограниченного роста напряжений не происходит, поскольку особые точки в силу принципа Гюйгенса сами становятся источниками ударных волн и перестают быть изолированными. Тем не менее, даже в достаточно малой их окрестности лучевой метод позволяет вычислять с хорошей точностью значения деформаций и напряжений. На каустиках, в связи с обращением в нуль и сменой знака определителя  $J$ , на противоположную изменяется также фаза волны [4].

Наиболее общие закономерности бифуркаций каустик и волновых фронтов методами теории особенностей дифференцируемых отображений изучены в [4]. Методика, предложенная в данной работе, позволяет реализовать их компьютерное моделирование для анизотропных упругих сред.

### 3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

С помощью описанного подхода решена задача о взаимодействии с эллипсоидальной границей раздела  $G$  двух трансверсально-изотропных упругих сред фронтов квазипродольной ( $qP$ ) и квазипоперечной ( $qS$ ) ударных волн, порожденных в среде 1 сферическим источником малого радиуса, находящимся в геометрическом центре разделяющей эллипсоидальной поверхности вращения, ось которой совпадает с осью  $Ox_2$  симметрии параметров упругости сред.

Пусть к сферической полости  $S$  среды 1 мгновенно приложено нормальное давление, инициирующее не только квазипродольную ( $qP$ ), как это бывает в изотропных средах, но и квазипоперечную ( $qS$ ) ударные волны, поверхности фронтов которых обладают осевой симметрией [6]. Благодаря ей, интенсивность квазипоперечной волны, поляризованной ортогонально двум первым, равна нулю. Поэтому и после взаимодействия с поверхностью раздела  $G$  будут формироваться только по два вида осесимметричных отраженных и преломленных волн, поляризованных в плоскости осевого сечения.

Значения механических констант, присущих соответствующим изотропным телам, выбирались на основе свойств доломита (для пер-

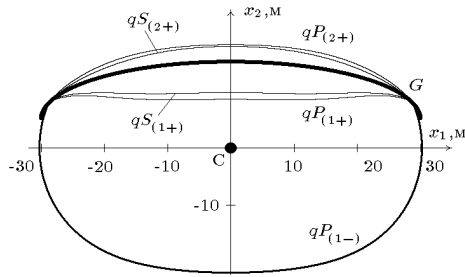


Рис. 2. Кинематика взаимодействия фронта  $qP_{(1-)}$ -волны с эллипсоидальной поверхностью раздела

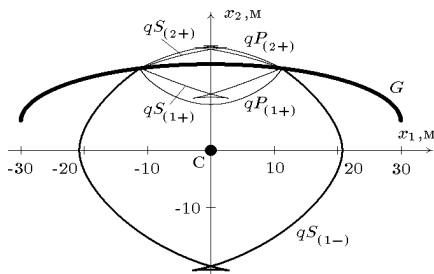


Рис. 3. Кинематика взаимодействия фронта  $qS_{(1-)}$ -волны с эллипсоидальной поверхностью раздела

вой среды) и песчаника (для второй среды):  $\lambda_1 = 2.778 \cdot 10^7$  кПа,  $\mu_1 = 4.167 \cdot 10^7$  кПа,  $\rho_1 = 3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_2 = 0.227 \cdot 10^7$  кПа,  $\mu_2 = 0.909 \cdot 10^7$  кПа,  $\rho_2 = 2.7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Величины  $l$ ,  $m$  и  $p$ , нарушающие свойства изотропии, варьировались и расчеты производились для различных комбинаций их значений. На рис. 2 и 3 приведены результаты для значений  $l_i = 0.1\lambda_i$ ,  $m_i = 0.3\mu_i$ ,  $p_i = 0.5(\lambda_i + 2\mu_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Рис. 2 иллюстрирует формы осевых сечений фронтов падающей  $qP_{(1-)}$ , отраженных  $qP_{(1+)}$ ,  $qS_{(1+)}$  и преломленных  $qP_{(2+)}$ ,  $qS_{(2+)}$  ударных волн, вызванных исходящей из точечного источника  $qP_{(1-)}$  ударной волной, когда угол между нормалью к падающему фронту и осью  $Ox_2$  составил  $\Theta_{(1-)}^{(1)} = 70^\circ$ . В местах сгущения точек пересечения фронтов с сеткой лучей, соответствующих падающим лучам с постоянной разностью углов  $\Delta\Theta_{(1-)}^{(1)}$ , расхождение лучей уменьшается. Поэтому в этих зонах поверхности фронта интенсивность напряжений оказывается повышенной. Для рассмотренного случая свойственно отсутствие особенностей на всех типах исходного и сформировавшихся фронтов.

Характер взаимодействия квазипоперечной

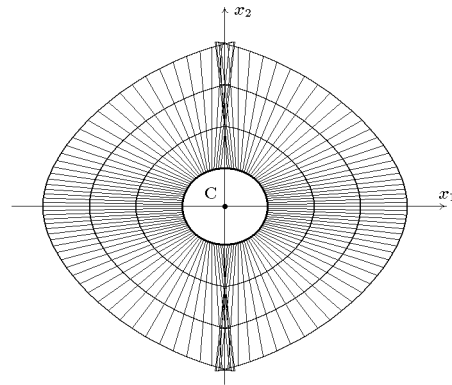


Рис. 4. Эволюция фронта  $qS_{(1-)}$ -волны в окрестности сферического источника

$qS_{(1-)}$  волны с поверхностью раздела  $G$  отражен на рис. 3. Следует отметить, что сечение ее фронта еще до падения на границу  $G$  имеет симметрично расположенные особенности типа ласточкина хвоста, которые сохраняются и на сформировавшихся фронтах  $qS_{(1+)}$ ,  $qP_{(2+)}$ ,  $qS_{(2+)}$  волн.

На рис. 4 показаны сетка лучей и последовательность фронтов  $qS_{(1-)}$  волны по мере ее отхода от сферической поверхности источника  $C$ . Вначале поверхность имеет гладкие очертания, затем на ней появляются точки возврата. Кривые, вычерчиваемые этими точками при трансформировании фронта, являются каустиками. На них (в рамках теории идеальной упругости) интенсивность поля неограниченно возрастает, а при переходе через них фаза  $qS_{(1-)}$  волны меняется на противоположную [4].

В результате взаимодействия исходных  $qP_{(1-)}$  и  $qS_{(1-)}$  ударных волн с поверхностью  $G$  сформировались отраженные  $qP_{(1+)}$ ,  $qS_{(1+)}$  и преломленные  $qP_{(2+)}$ ,  $qS_{(2+)}$  ударные волны (см. рис. 2 и 3). Направления их лучей были определены с помощью алгоритма (21). Решение уравнений (19) для случая падения  $qS_{(1-)}$  волны представлены на рис. 5 в виде зависимостей  $\Theta_{(\mu+)}^{(\nu)}$ ,  $\Theta_{(1-)}^{(2)}$ ,  $\mu = 1, 2$ ,  $\nu = 1, 2$  (кривые 1–4 соответственно). Анализ этих кривых позволяет заключить, что для квазипродольной отраженной волны  $qP_{(1+)}$  (кривая 1) значение угла падения  $\Theta_{(1-)}^{(2)} = 37.6^\circ$  является предельным, после которого волна перестает быть ударной, и лучевая теория оказывается неприменимой. В малой полукрестности  $\Theta_{(1-)}^{(2)} \leq 37.6^\circ$  происходит сгущение лучей фронта ударной волны  $qP_{(1+)}$ , и интенсивность полевых функций неограниченно воз-

растает.

Вид кривой 2 свидетельствует о том, что даже для одноименных волн  $qS_{(1-)}$  и  $qS_{(1+)}$  угол падения не равен углу отражения (как это бывает в случае изотропных упругих сред). В точке минимума этой кривой одному значению угла отражения  $qS_{(1+)}$  волны соответствуют два значения угла падения  $qS_{(1-)}$  волны. Поэтому эта точка является точкой возврата для фронта  $qS_{(1+)}$  волны. В ней удовлетворяется условие (23) и происходит бифуркационное формирование каустики.

Рис. 6 иллюстрирует зависимость геометрических расхождений пучков лучей [6]

$$L(\Theta) = \sqrt{|J(\Theta)|/\xi(\Theta)} \quad (24)$$

от углов  $\Theta_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\Theta_{(1+)}^{(2)}$ ,  $\Theta_{(2+)}^{(1)}$ ,  $\Theta_{(2+)}^{(2)}$  между нормалью к соответствующей поверхности фронта и осью  $Ox_2$  для волн  $qP_{(1+)}$ ,  $qS_{(1+)}$ ,  $qP_{(2+)}$ ,  $qS_{(2+)}$  (кривые 1–4 соответственно). Поскольку определяемая зависимостью (24) величина  $\sqrt{J}$  входит в знаменатель равенства (18), значения углов  $\Theta$ , при которых кривые 1–4 опираются на ось абсцисс и принимают нулевые значения, являются особыми. Они соответствуют образованию сингулярностей на поверхностях соответствующих фронтов. Поэтому формированию каустик и бифуркациям поверхности фронта сопутствует обращение в нуль величины  $J$  и бесконечное увеличение напряжений на фронте ударной волны и наоборот. Несмотря на то, что эти выводы верны только для идеально упругих сред, они представляют интерес и для практики, так как в реальных деформируемых средах эти явления связаны с резкой (хотя и конечной) концентрацией напряжений в установленных зонах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о распространении ударных волн в неоднородных трансверсально-изотропных упругих средах. Наиболее сложные преобразования этих волн происходит на поверхностях раздела сред с различными механическими свойствами, когда одна падающая волна распадается на две тройки (в осесимметричном случае – пары) различным образом поляризованных отраженных и преломленных волн. Разрывный характер функций, описывающих эти волны, и большой показатель их изменчивости по временной и пространственным координатам делают весьма сложной задачу их описания как аналитическими (в классе специальных функций), так и численными методами.

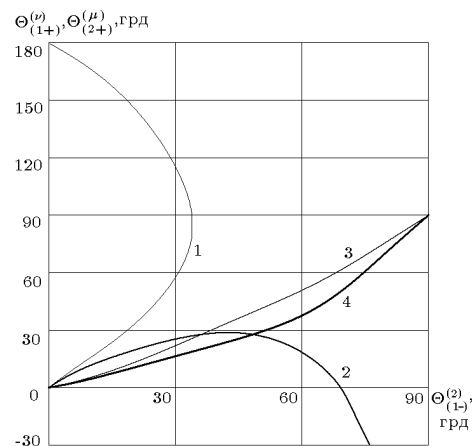


Рис. 5. Решения уравнения Снеллиуса

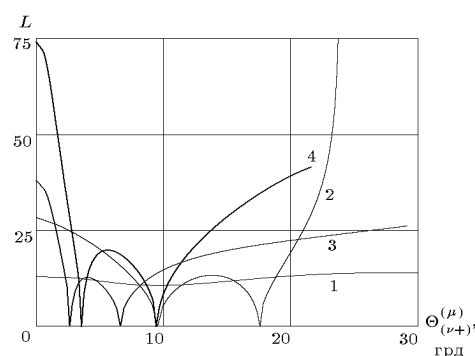


Рис. 6. Значения функции геометрического расхождения на фронтах волн

В настоящей статье, используя нулевое приближение лучевого метода и алгоритм, основанный на синтезе метода продолжения решения по параметру с алгоритмом Ньютона, решена частная задача: определена перестройка фронтов ударных волн, исходящих из сферического источника, на эллипсоидальной границе раздела двух отличающихся трансверсально-изотропных сред. Исследованы особенности образования каустик в таких средах и эффект квазиполного внутреннего отражения лучей на границах сред с различными физическими свойствами.

Анализ значения геометрического расхождения лучей позволяет утверждать, что при приближении к зонам бифуркаций фронтов интенсивности полевых функций неограниченно возрастают. В реальных деформируемых средах эти эффекты со-



проводятся существенной концентрацией напряжений в выделенных областях.

1. Арнольд В.И. Критические точки функций и классификация каустик // УМН.– 1974.– **29**, вып. 3.– С. 243–244.
2. Арнольд В. И. Контактные многообразия, лежандровы отображения и особенности волновых фронтов // УМН.– 1974.– **29**, вып. 4.– С. 153–154.
3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гуссейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений.– М.: Наука, 1982.– 302 с.
4. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.– М.: Наука, 1980.– 304 с.
5. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.– М.: Мир, 1980.– 607 с.
6. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах.– Л.: Наука, 1980.– 280 с.
7. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах.– М.: Наука, 1965.– 386 с.
8. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн.– К.: Наук. думка, 1988.– 220 с.
9. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) // Прикл. мех.– 1996.– **32**, N 12.– С. 3–27.
10. Hanyda A., Seredynska M. Asymptotic ray theory in poro- and viscoelastic media // Wave Motion.– 1999.– **30**– P. 175–195.
11. Shuvalov A. L., Gorkunova A. S. Cutting-off at reflection – transmission of acoustic waves in anisotropic media with sliding-contact interface // Wave Motion.– 1999.– **30**– P. 345–365.
12. Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А. Устойчивость нелинейных механических систем.– Львов: Выща школа, 1982.– 232 с.
13. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М. Дифракция сферической ударной волны на плоскости раздела упругих сред // Прикл. мех.– 1997.– **33**, N 10.– С. 51–58.
14. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М., Яковенко Е. В. Взаимодействие фронтов ударных волн с плоскостью раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. мех.– 1999.– **35**, N 4.– С. 30–37.