

УДК 539.3:534.1

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Л. Б. ЛЕРМАН

СКТБ Института механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко, Киев

Получено 14.12.1999 ◊ Пересмотрено 18.02.2000

Рассмотрены задачи определения стационарных состояний при гармонических колебаниях оболочек с конструктивными элементами жесткости в виде дополнительных опорных элементов типа пластин или оболочек. Изложены особенности постановки задач при использовании двумерной теории оболочек с учетом сдвига. Разработанная общая схема решения таких задач основана на использовании метода сил при замене неизвестных контактных напряжений статически эквивалентными системами локальных нагрузок. Для описания стационарных состояний построены системы векторных функций, которые являются нетривиальными решениями неклассических задач на собственные значения, причем последние определяют спектр собственных частот колебаний системы в целом. Для построенных систем функций доказаны свойства ортогональности и указано функциональное пространство, в котором они обладают свойством полноты. Общая схема реализована с применением разложений по собственным формам колебаний отдельных элементов системы и численно-аналитических методов. Приведены примеры расчетов для конкретных механических систем. Установлено, что наиболее точные значения собственных частот могут быть получены только при удовлетворении всех условий совместного деформирования основной оболочки и опорных элементов. В случае пластин это приводит к необходимости привлечения полных систем дифференциальных уравнений, описывающих не только изгиб, но и растяжение–сжатие пластин. При жестком соединении основной оболочки и опорных элементов только при таком подходе удается правильно описать конфигурацию стационарных состояний системы.

Розглянуті задачі визначення стаціонарних станів при гармонічних коливаннях оболонок з конструктивними елементами жорсткості у вигляді додаткових опорних елементів типу пластинок чи оболонок. Викладені особливості постановки задач при використанні двовимірної теорії оболонок з урахуванням зсуву. Розроблена загальна схема розв'язання таких задач базується на використанні метода сил при заміні невідомих контактних напружень статично еквівалентними системами локальних навантажень. Для опису стаціонарних станів побудовані системи векторних функцій, котрі є нетривиальними розв'язками неklasичних задач на власні значення, причому останні визначають спектр власних частот коливань системи в цілому. Для побудованих систем функцій доведені властивості ортогональності і вказано функційний простір, в якому вони мають властивість повноти. Загальну схему реалізовано із застосуванням розкладів за власними формами коливань окремих елементів системи та чисельно-аналітичних методів. Наведені приклади розрахунків для конкретних механічних систем. Встановлено, що найбільш точні значення власних частот можуть бути одержані лише при задоволенні всіх умов спільного деформування основної оболонки та опорних елементів. У випадку пластинок це призводить до необхідності залучення повних систем диференціальних рівнянь, які описують не тільки згин, але й розтягання–стискання пластинок. При жорсткому з'єднанні основної оболонки та опорних елементів тільки при такому підході вдається правильно описати конфігурацію стаціонарних станів системи.

The problems on determination of stationary states at harmonic motions are considered for shells with stiffening elements such as the additional supports of a plate or shell type. There are outlined the features of statement of mentioned problems at using the two-dimensional shell theory with consideration of a shift. Developed general arrangement of the solution is grounded on usage of a method of forces at replacement of the unknown contact stresses by statically equivalent systems of local loadings. To describe the stationary states there were constructed the systems of vector functions, which are the nontrivial solutions of nonclassical problems on eigenvalues, and the last ones find a frequency eigenspectrum of vibration of system as a whole. For constructed systems of functions the properties of orthogonality are proved, and a functional space is underlined, in which they have the property of completeness. The general arrangement is implemented with application of both decompositions with respect to natural vibration modes of separate system components and the numerically-analytical methods. The examples of calculations for concrete mechanical systems are given. It is established that the most precise values of natural frequencies can be obtained only at satisfying all conditions of matched deforming for the basic shell and the support elements. In the case of plates it gives in necessity to involve the complete systems of differential equations featuring not only the bending, but also the extension–compression of plates. At a rigid joint of the basic shell and the support elements only mentioned approach allows to describe a configuration of stationary states of system in proper way.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются колебания оболочек с конструктивными элементами жесткости в виде дополнительных опорных элементов типа пластин или оболочек. Данный класс задач, с одной стороны, непосредственно связан с

задачами о колебаниях ребристых оболочек и тонкостенных элементов с присоединенными массами [1, 2], а с другой стороны, с задачами о колебаниях составных оболочек [3–6]. Основное отличие рассматриваемых механических систем состоит в том, что ребра и присоединенные массы, как правило, не имеют дополнительных связей, ограничи-

вающих их перемещения, в то время как опорные элементы обязательно имеют какие-то закрепления. В этом смысле рассматриваемые объекты аналогичны многоопорным балкам и рамным системам, колебания которых достаточно полно исследованы [6, 7]. Значительно более сложные краевые задачи возникают при рассмотрении оболочек и пластин, связанных с системой деформируемых опорных элементов. Например, как следует из библиографии, приведенной в [8, 9], основные результаты по исследованию относительно простой задачи о пластине с внутренними точечными опорами были получены только в 80–90-ых гг., несмотря на то, что эта задача, по-видимому, впервые была рассмотрена В. Новацким еще в 1953 году [10].

Некоторые новые данные в данном направлении получены в работах автора, в которых исследовались слоистые пологие ортотропные оболочки на прямоугольном плане, связанные с системой стержневых опор [11, 12] и соосные оболочки вращения [13]. В этих работах построены алгоритмы, позволяющие определить системы векторных функций, которые описывают стационарные состояния систем при моногармонических колебаниях с общей частотой. Использование упомянутой системы функций в качестве базиса разложений при построении решений нестационарных задач [14, 15] окажется обоснованным и эффективным, если указанные системы будут обладать свойствами ортогональности и полноты (в рассматриваемых функциональных пространствах). Поэтому в цели настоящей работы входит исследование свойств функций, описывающих стационарные состояния рассматриваемых механических систем, что представляет несомненный теоретический и практический интерес. В соответствии с этим приводится более полная и точная по сравнению с работами [11–13] постановка задачи, выводится условие ортогональности и осуществляется проверка его выполнения, описывается функциональное пространство, в котором рассматриваемые системы функций обладают свойством полноты. Также указываются основные особенности практической реализацией общей схемы решения данного класса задач и приводятся конкретные примеры расчетов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуются гармонические колебания механической системы, состоящей из $N+1$ соединенных между собой тонкостенных элементов. Удобно рассматривать связанные с каждым элементом

локальные системы триортогональных криволинейных координат $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$, считая, что линии $\alpha_j = \text{const}, \beta_j = \text{const}$ являются линиями главных кривизн в срединных поверхностях элементов системы, а координаты γ_j отсчитываются в направлении нормалей от срединных поверхностей элементов G_j ($j=0, 1, \dots, N$). Решение задачи для составного трехмерного тела сложной формы связано с серьезными математическими трудностями [16–18]. Существенного упрощения задачи удастся достичь в тех случаях, когда тело можно рассматривать как систему связанных между собой тонкостенных элементов, деформирование которых в локальных системах координат описывается более простыми по сравнению с уравнениями трехмерной теории упругости, но, в общем случае, различными системами дифференциальных уравнений теорий оболочек, пластин или стержней. При таком подходе стационарные состояния для составных систем определяются функциями, которые являются решениями, так называемых, неклассических задач на собственные значения [3, 18]. Эти задачи включают в себя наряду с обычными однородными краевыми условиями некоторые дополнительные соотношения, отражающие физический характер взаимодействия элементов системы.

Далее будем различать основную (несущую) оболочку, характеризуемую значением индекса $j=0$, и систему опорных элементов, для которых $j=1, 2, \dots, N$, а координаты основной оболочки α_0, β_0 для сокращения записи в некоторых случаях обозначать через α, β . В соответствии с общей схемой метода сил в рассмотрение необходимо ввести неизвестные контактные напряжения (реакции). При переходе к двумерным теориям оболочек они должны быть представлены в виде векторов поверхностных нагрузок (звездочка здесь и далее означает транспонирование):

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j(\alpha, \beta) = [q_\alpha^{(j)}, q_\beta^{(j)}, q_\gamma^{(j)}, m_\alpha^{(j)}, m_\beta^{(j)}]^*, \quad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Векторы составлены из тангенциальных $q_\alpha^{(j)*} = q_\alpha^{(j)*}(\alpha, \beta), q_\beta^{(j)} = q_\beta^{(j)}(\alpha, \beta)$ и нормальных $q_\gamma^{(j)} = q_\gamma^{(j)}(\alpha, \beta)$ компонент вектора сил, а также распределенных моментов $m_\alpha^{(j)} = m_\alpha^{(j)}(\alpha, \beta), m_\beta^{(j)} = m_\beta^{(j)}(\alpha, \beta)$. Вне областей контакта, т. е., если точка $(\alpha, \beta) \notin \Omega_j$, функции $\mathbf{q}_j = 0$.

Эти же реакции для опорных элементов являются краевыми нагрузками. Так как в соответствии с принципами двумерных теорий оболочек силовые краевые условия могут быть сформулиро-

ваны только в усилиях и моментах, для описания воздействий основной оболочки на опоры необходимо рассматривать соответствующие введенным распределенным реакциям интегральные характеристики. В этом случае на j -ый опорный элемент будет действовать вектор усилий и моментов $\mathbf{R}^{(j)}$, компоненты которого в координатах основной оболочки определяются интегралами

$$\begin{aligned} R_\alpha^{(j)} &= \int_{\Omega_j} q_\alpha^{(j)}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \\ R_\beta^{(j)} &= \int_{\Omega_j} q_\beta^{(j)}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \\ R_\gamma^{(j)} &= \int_{\Omega_j} q_\gamma^{(j)}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \\ R_\varphi^{(j)} &= \int_{\Omega_j} m_\alpha^{(j)}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \\ R_\psi^{(j)} &= \int_{\Omega_j} m_\alpha^{(j)}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

В конкретных случаях для записи краевых условий для j -го опорного элемента необходимо осуществить переход от системы координат α, β, γ , связанных с основной оболочкой, к локальным системам координат $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$.

Использование принципов теории оболочек приводит от одного уравнения пространственной теории упругости к необходимости рассмотрения систем дифференциальных уравнений вида

$$L_0 \mathbf{U} = A_0 B_0 (-\omega^2 C_\rho^{(0)} \mathbf{U} + \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_j), \quad (3)$$

$$L_j \mathbf{V}_j = -A_j B_j \omega^2 C_\rho^{(j)} \mathbf{V}_j, \quad (4)$$

$j=1, 2, \dots, N$, причем уравнения (3) описывают движение основной оболочки, а группа уравнений (4) – опорных элементов. В формулах (3), (4) L_0, L_j – дифференциальные операторы выбранных вариантов теории оболочек (пластин, стержней); $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\alpha_0, \beta_0)$, $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_j(\alpha_j, \beta_j)$ – обобщенные векторы перемещений срединных поверхностей основной оболочки и опорных элементов соответственно, которые для уточненных теорий оболочек типа Тимошенко включают функции сдвига; A_j, B_j – коэффициенты первой квадратичной формы координатных поверхностей; $C_\rho^{(j)}$ – матрицы инерции; ω – круговая частота при совместных колебаниях.

В случае свободных колебаний обычным образом [3] формулируются однородные краевые условия на внешних границах элементов системы.

При использовании метода сил решения уравнений (3), (4) дополнительно должны удовлетворять кинематическим условиям совместности, которые задаются в областях контакта Ω_i . Эти условия могут быть представлены в виде системы из N функциональных векторных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i(\mathbf{q}_j) = \mathbf{V}_i(\mathbf{q}_i), \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

где $\mathbf{U}_i(\mathbf{q}_j)$ – вектор перемещений, вызванный реакцией j -го опорного элемента \mathbf{q}_j ; $\mathbf{V}_i(\mathbf{q}_i)$ – вектор перемещений i -го опорного элемента, вызванный реакцией оболочки, причем векторы вычисляются в i -ой области контакта. Система уравнений (5) должна выполняться во всех точках областей контакта Ω_I , но при этом она имеет конечный порядок, определяемый числом таких областей.

Для определения стационарных состояний необходимо найти нетривиальные решения уравнений (3), (4), удовлетворяющих условиям (5) с учетом соотношений (1), (2). Для абсолютно жестких опорных элементов уравнения (4) исключаются из рассмотрения, функции \mathbf{V}_i следует принять равными нулю, а задача состоит в отыскании нетривиальных решений уравнения (3), удовлетворяющих однородным граничным условиям и дополнительным условиям (5).

Фактически задача сводится к нахождению зависимостей, связывающих векторы перемещений с неизвестными реакциями. Такие зависимости, в принципе, могут быть получены любыми из известных методов, используемых при решении краевых задач теории оболочек [1–6, 20]. Автором в [11–13] с этой целью использованы аналитические и численно-аналитические методы, основанные на схеме разделения переменных. Основное допущение, принятое в этих работах, состоит в том, что закон распределения контактных напряжений задается *a priori*, например, полиномом с неопределенными коэффициентами. Это позволяет избежать необходимости рассмотрения бесконечных систем, характерных для контактных задач, однако тогда строгое удовлетворение условий (5) может быть обеспечено только в конечном числе точек из области контакта. Для малых по сравнению с площадью основной оболочки областей контакта в практических расчетах достаточно принять распределение контактных напряжений равномерным.

Уравнения (5) являются исходными для определения спектров собственных частот. В силу линейности уравнений движения и принципа супер-

позиции фактически они представляют собой матричные уравнения с коэффициентами, зависящими от частоты колебаний, и могут быть записаны в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно отдельных компонент неизвестных реакций:

$$\sum_{j=1}^N [U_{ij}(\omega) - \delta_{ij} k_i V_i(\omega)] q_j = 0, \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

где $U_{ij}(\omega)$ – матрицы-клетки, коэффициенты которых представляют собой решения уравнений (3) для отдельных компонент векторов реакций единичной интенсивности, вычисленные в соответствующих областях контакта [10]; δ_{ij} – символ Кронекера – Капелли; $V_i(\omega)$ – матрицы-клетки, элементы которых представляют собой решения уравнений (4) для соответствующих компонент тех же реакций, вычисленные на границах опорных элементов; коэффициенты отражают связь между распределенными реакциями (1) и интегральными усилиями и моментами (2).

Условие существования нетривиальных решений системы (6) приводит к уравнению для определения собственных частот, которое записывается в виде определителя

$$\det[U_{ij}(\omega) - \delta_{ij} k_i V_i(\omega)] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является трансцендентным и имеет бесконечное, но счетное число корней, которые определяют спектр собственных чисел ω_n . После его решения для каждого значения n с точностью до постоянной могут быть найдены векторные функции $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n(\alpha, \beta, \omega_n)$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_n(\alpha_j, \beta_j, \omega_n)$, описывающие конфигурацию системы при моногармонических колебаниях элементов с общей частотой ω_n , т.е. ее стационарные состояния.

2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Функции, описывающие стационарные состояния системы, нельзя определить одним выражением, но их можно задать следующим образом:

$$\mathbf{W}_n(\alpha, \beta) = \begin{cases} \mathbf{U}_n(\alpha, \beta) & \text{для основ. эл-та} \\ & (\alpha, \beta) \in \Gamma, \\ \mathbf{V}_{jn}(\alpha, \beta) & \text{для опорн. эл-тов} \\ & (\alpha, \beta) \in \Gamma_j, \end{cases} \quad (8)$$

где “глобальные” криволинейные координаты α , β совпадают с локальными координатами α_0 , β_0

основной оболочки и координатами α_j , β_j опорных элементов. Система функций (8) обладает свойством ортогональности, которое для идеальных механических систем, в общем случае, является следствием закона сохранения энергии и принципа суперпозиции [19]. Вместе с тем, для составных механических систем это условие может принимать различную форму [6, 7], и в данном случае при $n \neq m$ оно записывается в виде

$$\int_{\Gamma_0} A_0 B_0 \mathbf{U}_n^* C_\rho \mathbf{U}_m d\alpha_0 d\beta_0 + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} A_j B_j \mathbf{V}_{mj}^* C_\rho^{(j)} \mathbf{V}_{mj} d\alpha_j d\beta_j = 0. \quad (9)$$

Соответственно выражение для нормы векторной функции, описывающей стационарное состояние системы, имеет вид

$$\|\mathbf{W}_n\|^2 = \int_{\Gamma} A_0 B_0 \mathbf{U}_n^* C_\rho \mathbf{U}_n d\alpha d\beta + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} A_j B_j \mathbf{V}_{mj}^* C_\rho^{(j)} \mathbf{V}_{mj} d\alpha_j d\beta_j. \quad (10)$$

Условие (9) получено из условия ортогональности [19], которому удовлетворяют функции $\mathbf{u}_n(\alpha, \beta, \gamma)$, являющиеся трехмерными решениями уравнений колебаний теории упругости при принятии гипотез теорий оболочек типа Тимошенко [3]. При выводе соотношения (9) учтено, что в соответствии с гипотезами данной теории выполняются сильные неравенства

$$k_1^{(j)} k_2^{(j)} (h_j^2/12) \leq 1, \\ (k_1^{(j)} + k_2^{(j)}) (h_j^3/12) \leq 1, \quad (11) \\ k_1^{(j)} k_2^{(j)} (3h_j^2/12) \leq 1,$$

и соответствующие слагаемые в интегралах могут быть отброшены. В формулах (11) $k_1^{(j)}$, $k_2^{(j)}$ – главные кривизны; h_j – толщины оболочек.

Выписанные условие ортогональности и выражение для нормы аналогичны соответствующим формулам, которые приведены в [6, 7] для стержневых систем с присоединенными массами. Совпадение будет полным, если для присоединенных масс интегралы в выражениях (9), (10) понимать в смысле интегралов Стильтьеса.

Доказательство того, что функции (8) действительно удовлетворяют условию (9), можно получить с использованием формул Грина [20] для

уравнений (3) и (4) либо проверить непосредственно при рассмотрении конкретных систем. В частности, при численном решении такой контроль может служить удобным критерием для проверки правильности вычислений. Для краткости и наглядности изложения будем рассматривать абсолютно жесткие опорные элементы, и предположим, что задача определения стационарных состояний решена. Это означает, что найден спектр частот ω_s и определены функции $\mathbf{W}_s = \mathbf{W}_s(\alpha, \beta)$ (здесь и далее индекс “0” для координат основной оболочки опущен), описывающие стационарные состояния, которые при однородных краевых условиях являются нетривиальными решениями уравнения

$$L_0 \mathbf{W}_s = A_0 B_0 (-\omega_s^2 C_\rho^{(0)} \mathbf{W}_s + \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_j), \quad (12)$$

и дополнительно удовлетворяют условиям совместности (5). Последние в данном случае сводятся к требованию обращения в нуль перемещений в областях контакта Ω_j , и их можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{W}_s(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha, \beta) \in \Omega_i, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Формула Грина для оператора L_0 при однородных краевых условиях записывается в виде

$$\int_{\Gamma_0} (\mathbf{v}^* L_0 \mathbf{u} - \mathbf{u}^* L_0 \mathbf{v}) d\alpha d\beta = 0, \quad (14)$$

где \mathbf{u}, \mathbf{v} – некоторые, необходимое число раз дифференцируемые функции. Полагая в формуле (14) $\mathbf{u} = \mathbf{W}_s$, $\mathbf{v} = \mathbf{W}_r$ с учетом того, что функции удовлетворяют уравнению (12), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0} (\mathbf{W}_s^* L_0 \mathbf{W}_r - \mathbf{W}_r^* L_0 \mathbf{W}_s) d\alpha d\beta = \\ & = (\omega_s^2 - \omega_r^2) \int_{\Gamma_0} A_0 B_0 \mathbf{W}_s^* C_\rho \mathbf{W}_r d\alpha d\beta + \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_0} A_0 B_0 (\mathbf{W}_s^* - \mathbf{W}_r^*) \mathbf{q}_j d\alpha d\beta = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как функции \mathbf{q}_j отличны от нуля только в областях Ω_j , то интегрирование в интеграле под знаком суммы фактически производится только по этим областям. При этом в силу условий (13)

$\mathbf{W}_s = \mathbf{W}_r = 0$ эти интегралы обращаются в нуль, и формула (15) принимает вид

$$(\omega_s^2 - \omega_r^2) \int_{\Gamma_0} A_0 B_0 \mathbf{W}_s^* C_\rho \mathbf{W}_r d\alpha d\beta = 0,$$

откуда при $s \neq r$ и следует условие ортогональности. В случае деформируемых опорных элементов доказательство выполняется аналогично, однако при этом дополнительно следует учесть соотношения (2) и условия (5).

Независимо от использованного метода построения решений задачи на собственные значения для неоднородного уравнения (12) при дополнительных условиях совместности (13), функции $\mathbf{W}_s(\alpha, \beta)$ в области Γ_0 могут быть представлены в виде ряда по собственным формам колебаний гладкой оболочки $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k(\alpha, \beta)$:

$$\mathbf{W}_s(\alpha, \beta) = \sum_k b_k^{(s)} \mathbf{y}_k(\alpha, \beta), \quad (16)$$

где $b_k^{(s)}$ – известные коэффициенты.

При этом собственные формы определяются векторными функциями, которые при однородных краевых условиях, совпадающих с заданными для уравнения (12), представляют собой решения классической задачи на собственные значения для однородного уравнения, соответствующего (12):

$$L_0 \mathbf{y}_k = -A_0 B_0 \nu_k^2 C_\rho^{(0)} \mathbf{y}_k, \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

где через ν_k обозначена собственная частота колебаний оболочки без опор.

Система функций $\{\mathbf{y}_k\}$ образует полную, ортогональную систему в некотором гильбертовом пространстве H , заданном в области Γ_0 . С использованием равенства Парсеваля [20] можно записать еще одно выражение для нормы функции $\mathbf{W}_s = \mathbf{W}_s(\alpha, \beta)$, использующее коэффициенты разложения (16):

$$\|\mathbf{W}_s\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{(s)})^2, \quad (18)$$

которое в некоторых случаях оказывается более удобным, чем выражение (10), и также может быть использовано для контроля правильности вычислений.

Очевидно, что если рассмотреть G – замыкание линейной системы ортогональных функций $\{\mathbf{W}_s\}$, то, в силу представления (16), G является подпространством в H . Поэтому оно также является гильбертовым, причем в этом подпространстве система функций $\{\mathbf{W}_s\}$ будет образовывать

полную ортогональную систему по построению. Следовательно, эти функции можно использовать в качестве базиса в указанном подпространстве при построении решений нестационарных задач для рассматриваемых механических систем.

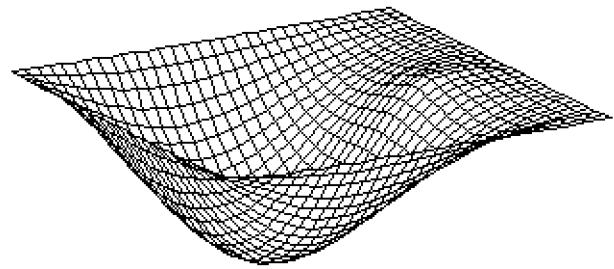
Таким образом, показано, что системы функций, описывающие стационарные состояния системы, обладают свойствами ортогональности и указано функциональное пространство, в котором они обладают свойством полноты. Так как при этом функции описывают конфигурацию системы при совместных гармонических колебаниях с общей частотой в отсутствие внешних и краевых нагрузок, то они имеют смысл собственных форм колебаний системы в целом.

3. ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

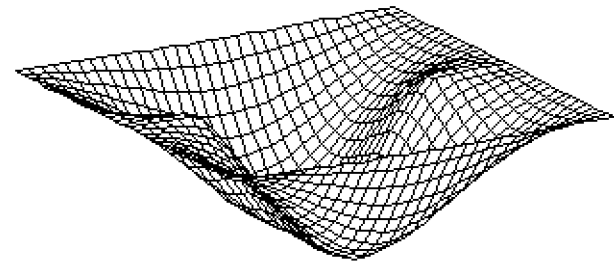
В разработанных подходах к решению задач о колебаниях составных систем можно выделить ряд этапов. Первый этап состоит в нахождении коэффициентов (элементов матриц) системы (6), и на этом этапе частота выступает в качестве произвольного параметра. Ненулевые элементы матриц представляют собой перемещения и углы поворота, вызванные различными компонентами реакций единичной интенсивности, и их можно найти при решении соответствующих краевых задач для уравнений (3), (4). Вторым этапом является решение трансцендентного уравнения для определения собственных частот колебаний (7), записанного в виде определителя, элементы которого зависят от частоты. Если ставится задача определения только спектров собственных частот, то на этом решение задачи заканчивается.

При нахождении функций, описывающих стационарные состояния системы, добавляются еще два этапа. Третий этап состоит в нахождении реакций для каждой найденной частоты из системы (6), и так как эта система однородная, то значения реакций могут быть найдены только с точностью до некоторой константы. Наконец, на четвертом этапе заново решаются краевые задачи для уравнений уже при найденных значениях частоты и соответствующих этой частоте значений реакций. Полученные функции могут быть затем пронормированы, например, с использованием нормы, задаваемой выражением (10).

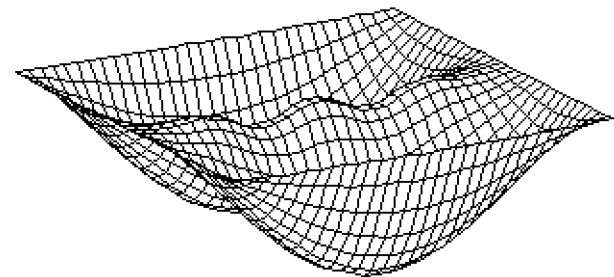
Две из возможных различных реализаций изложенного алгоритма для конкретных механических систем описаны в [11–13], где также приведены некоторые результаты расчетов. Применительно к пологим оболочкам с локальными опорами



а



б



в

Рис. 1. Первые формы собственных колебаний (поверхности прогиба) пластины с различным числом жестких опор:

а – одна опора, б – две опоры, в – три опоры

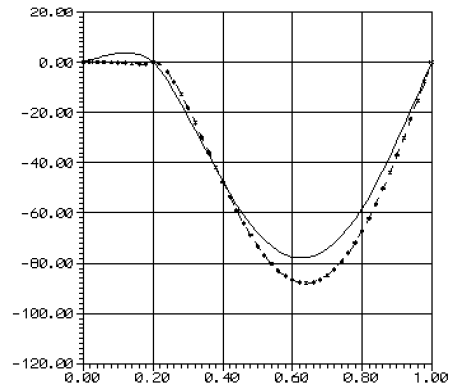
на прямоугольном плане был реализован подход, связанный с использованием разложений по собственным формам колебаний отдельных элементов системы, причем были найдены только частоты колебаний. В [12] рассмотрены пологие круглые в плане оболочки (купола), в частном случае – круглые пластины, в более общем случае – оболочки вращения, связанные с соосной цилиндрической оболочкой меньшего диаметра. В дан-

ном случае эффективным оказалось использование численно-аналитических методов, основанных на схеме разделения переменных с последующим численным решением краевых задач методом дискретной ортогонализации [3–5]. Реализованные алгоритмы обладают достаточно широкими возможностями и, в дополнение к известным результатам, позволяют одновременно учесть деформируемость опор, физический характер соединения оболочки с опорами и оценить влияние анизотропии упругих характеристик и кривизны основной оболочки.

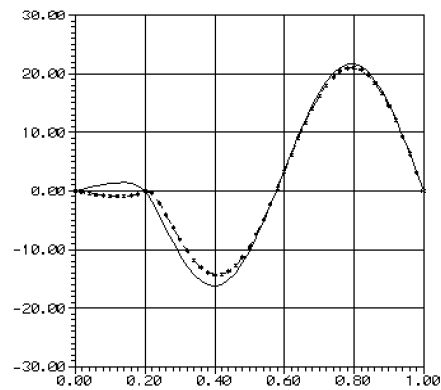
Результаты, приводимые ниже, относятся к исследованиям конфигурации систем. В частности, графическая информация, показанная на рис. 1–4, получена для квадратной изотропной пластины с относительной толщиной $h/a=0.01$, где h – действительная толщина и a – размеры пластины, при различном количестве жестких опор, установленных вдоль средней линии пластины. В этом случае формы последних не представляют интереса. Частоты и формы определялись как с учетом моментных реакций, так и без них, что физически соответствует жесткому и шарнирному соединению пластины с опорами. Соответствующие значения собственных частот приведены в [11]. Деформирование оболочек при колебаниях, в общем случае, описывается двумерными векторными функциями перемещений, которые определяют в пространстве некоторые поверхности. В частном случае пластин формы колебаний можно задать скалярными функциями $w = w(x, y)$. Такие поверхности, соответствующие первой форме колебаний для пластины с одной, двумя и тремя опорами, показаны на рис. 1, а–в соответственно. На этих рисунках хорошо прослеживается влияние различного количества опор (жестких точек) на форму колебаний пластины. Следует отметить, что первые формы колебаний (с точностью до масштабного множителя) повторяют статические решения задачи для пластины с опорами, находящейся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки.

Влияние различного характера соединения пластины с опорами удобней проследить, рассматривая характерные сечения поверхностей прогибов плоскостью, проходящей через середины опор. Такие сечения поверхностей прогиба, соответствующих различным значениям частот, показаны на рис. 2–4 для пластины с одной, двумя и тремя опорами соответственно. Все значения перемещений на рис. 2–4 и далее приведены в сантиметрах.

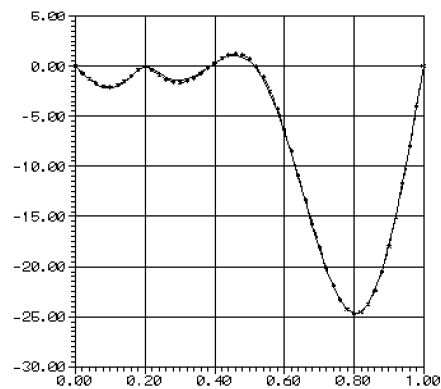
Учет реактивных моментов связан с фиксированием углов поворота в зоне опоры, что приводит



а



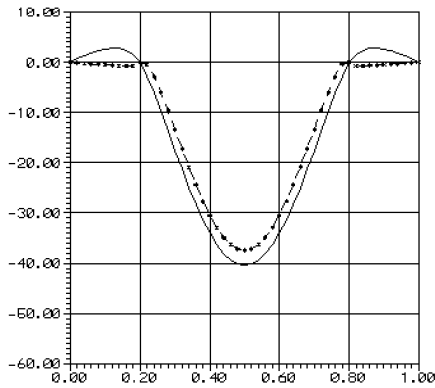
б



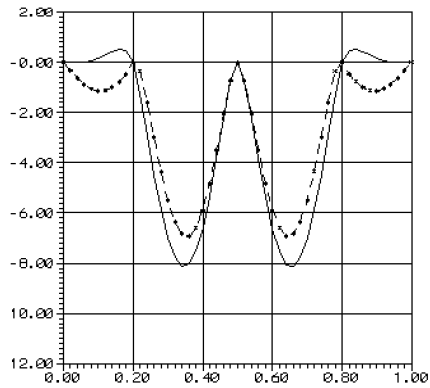
в

Рис. 2. Сечения собственных форм колебаний (поверхностей прогиба) пластины с одной жесткой опорой:

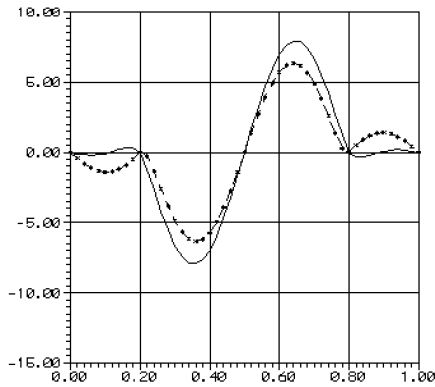
сплошная – без учета моментных реакций,
штрих-пунктир – с учетом моментных реакций;
а – для первой формы, б – для второй формы,
в – для третьей формы



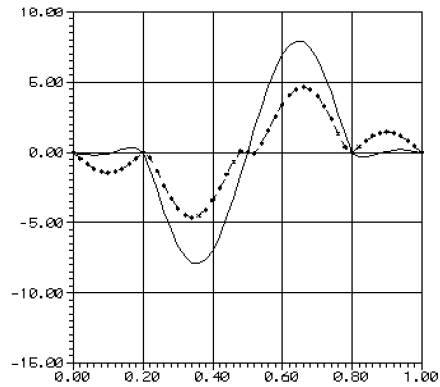
а



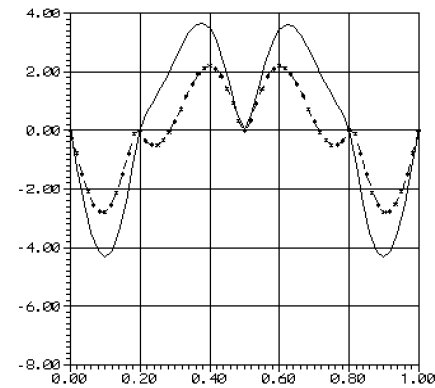
а



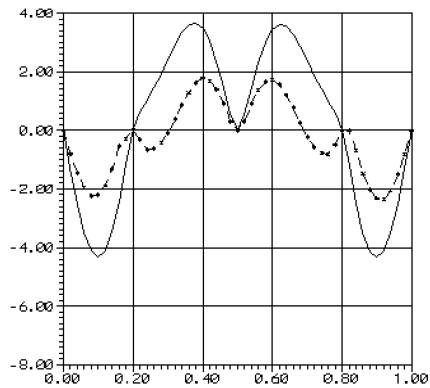
б



б



в



в

Рис. 3. Сечения собственных форм колебаний (поверхностей прогиба) пластины с двумя жесткими опорами:

сплошная - без учета моментных реакций,
штрих-пунктир - с учетом моментных реакций;
а - для первой формы, б - для второй формы,
в - для третьей формы

Рис. 4. Сечения собственных форм колебаний (поверхностей прогиба) пластины с тремя жесткими опорами:

сплошная - без учета моментных реакций,
штрих-пунктир - с учетом моментных реакций;
а - для первой формы, б - для второй формы,
в - для третьей формы

к качественному изменению форм (см. рис. 3), хотя значения частот при этом отличаются незначительно [11]. Соответствующие кривые без учета моментных реакций антисимметричны относительно центра, а при их учете – симметричны и имеют горизонтальную касательную. Влияние моментных реакций проявляется сильнее при большем количестве опор. Обращает на себя внимание факт, что третьи формы для пластины с двумя и тремя опорами полностью совпадают (см. рис. 3, в и 4, в). Это объясняется тем, что третья опора попадает точно на узловую точку.

Для качественной оценки влияния податливости опорных элементов рассматривалась пластина с одной опорой. При этом во внимание были приняты следующие обстоятельства. Критерием правильности нахождения собственных форм служит выполнение кинематических условий совместности. В точке контакта должны выполняться равенства прогибов пластины w_{pl} и осевых перемещений опоры v_c , а также тангенциальных перемещений пластины u_{pl} , v_{pl} и изгибных перемещений конца опоры u_ξ , v_η в соответствующих плоскостях, т. е.

$$w_{pl} = v_c, \quad u_{pl} = v_\xi, \quad v_{pl} = v_\eta.$$

При изгибе пластины, вызванном воздействием нормальной силы и момента, ее тангенциальные перемещения равны нулю, и для жестких опор последние два равенства всегда приближенно выполняются. В случае податливых опор картина меняется. При учете нормальных реакций (для опор это поперечные силы), и реактивных моментов ввиду малой изгибной жесткости стержня концы опоры будут иметь весьма значительные тангенциальные перемещения. В то же время реактивные моменты не могут вызвать тангенциальных перемещений пластины, и условия совместности будут нарушены. Компенсировать эти перемещения опоры могут только тангенциальные реакции, и, следовательно, их учет необходим для получения правильного представления о формах колебаний опор.

Данные рассуждения подтверждаются расчетами, результаты которых в виде сечений поверхностей прогибов для пластины и кривых поперечных перемещений опор для первых двух частот приведены на рис. 5, 6. Штриховые кривые на рис. 6 получены без учета тангенциальных реакций. Получающиеся при этом кривые прогибов пластины совпадают с приведенными на рис. 5. Податливая опора размещалась на средней линии на расстоянии $0.2a$ от края, а для ее относительного модуля упругости были приняты два зна-

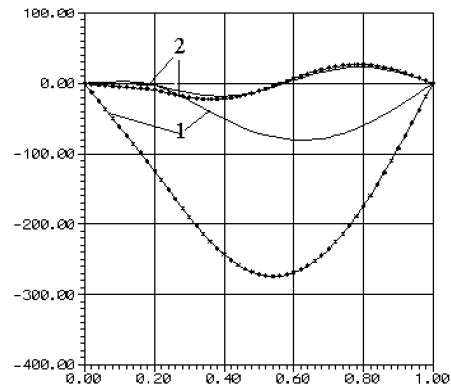


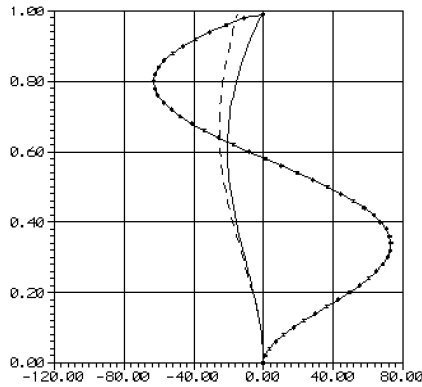
Рис. 5. Сечения собственных форм колебаний (поверхностей прогиба) пластины с податливой опорой (цифры возле кривых соответствуют номерам форм):

сплошная – $E_{sup}/E_{pl} = 0.5$,
штрих-пунктир – $E_{sup}/E_{pl} = 0.5$,

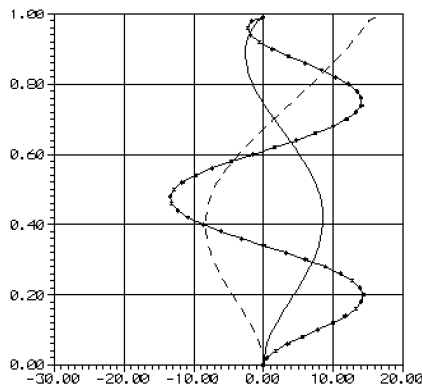
чения: $E_{sup}/E_{pl} = 0.5$ и 0.25 (E_{sup} , E_{pl} – модули упругости опоры и пластины соответственно, $E_{sup} = 0.1$ ГПа). Анализ первых двух собственных частот, найденных с учетом тангенциальных реакций и без него, показал, что их значения для обоих вариантов расчета практически совпадают.

Формы выбирались после проверки кинематических условий совместности. В частности, для значений перемещений пластины и опор в зоне контакта при отношении $E_{sup}/E_{pl} = 0.5$ были получены следующие значения: в случае первой формы $w_{pl} = -2.099$; $v_c = -2.099$; $u_{pl} = -2.455 \cdot 10^{-4}$; $v_\xi = -2.578 \cdot 10^{-4}$, и соответственно в случае второй: $w_{pl} = -2.822$; $v_c = -2.828$; $u_{pl} = -1.117 \cdot 10^{-4}$; $v_\xi = -1.067 \cdot 10^{-4}$, (все перемещения указаны в сантиметрах). Эти данные свидетельствуют о высокой точности расчетов, так как условия совместности выполняются практически точно (следует учесть, что $w_{pl} \geq u_{pl}$).

Из представленных результатов также следует, что при нахождении форм пластины и собственных частот системы в целом достаточен учет только моментных реакций, а тангенциальными компонентами можно пренебречь. Вместе с тем, как это следует из кривых, приведенных на рис. 6, форма колебаний податливой опоры без учета последних определяется полностью неверно (изменяется даже число изгибных волн, соответствующее приблизительно равным частотам). Изменение относительной жесткости опоры качественно не



а



б

Рис. 6. Изгибные формы колебаний опоры:
 а - для первой формы, б - для второй формы,
 сплошные - $E_{sup}/E_{pl} = 0.5$, штрих-пунктир - $E_{sup}/E_{pl} = 0.5$,
 штриховые - без учета моментных реакций

изменяет формы прогиба пластины, однако одному и тому же количеству волн в пластине соответствует различное количество изгибных волн, возникающих в опоре.

Для системы круглая пластина – податливая цилиндрическая оболочка приведем некоторые новые, по сравнению с работой [13], результаты. Расчеты были выполнены для отношения $a/R=0.5$ при относительной длине оболочки $L/a=1$ и значениях относительных толщин оболочки $h_s/a=0.01$ и пластины $h/R=0.01$ (a – радиус цилиндрической оболочки, R – радиус пластины). Плотности считались одинаковыми и равными 1.2 г/см^3 .

Как указывалось в разделе 2, функции, описывающие стационарные состояния системы в целом,

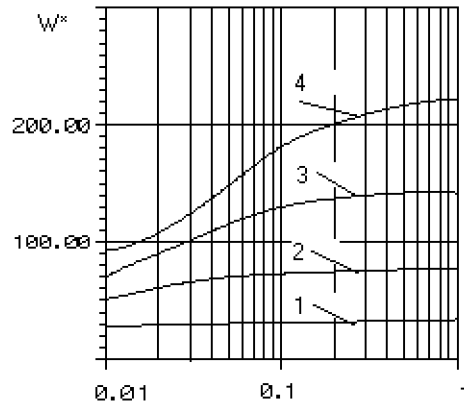


Рис. 7. Зависимость собственных частот колебаний системы от отношения модулей упругости опорной оболочки и пластины (цифры возле кривых соответствуют номерам частот)

обладают свойством ортогональности. Для данного примера формула (9) для скалярных произведений векторных функций, описывающих собственные формы, в случае осесимметричных колебаний принимает вид

$$\alpha_{nm} = (\mathbf{W}_n^* \mathbf{W}_m) = \int_0^R \rho_{pl} h_{pl} r (w_n w_m + u_n u_m) dr + \int_0^L \rho_{sp} h_{sp} a (w_{sp}^{(n)} w_{sp}^{(m)} + u_{sp}^{(n)} u_{sp}^{(m)}) ds, \quad (19)$$

где индекс pl относится к кольцевой пластине, а sp – к опоре. В процессе решения этой задачи для контроля выполнялось вычисление скалярных произведений в соответствии с формулой (19) при использовании формул Симпсона. Результаты вычислений для системы с отношением модулей $E_{sup}/E_{pl}=1/100$, приведенные в таблице, иллюстрируют тот факт, что разработанные алгоритмы обладают достаточной точностью. При вычислениях погрешность выполнения условий ортогональности не превосходила 5%. В принципе, она может быть уменьшена при уточнении значений частоты и уменьшения шага интегрирования в формуле Симпсона. Этот пример подтверждает правильность нахождения собственных форм, некоторые из которых приведены в [13].

Практический интерес представляет оценка влияния жесткости опорной оболочки на собствен-

Таблица. Значения скалярных произведений нормированных векторных функций

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
1	1.0034	0.0428	0.0218	0.0114
2	0.0428	0.9500	0.0013	0.0009
3	0.0218	0.0013	0.9257	0.0078
4	0.0114	0.0009	0.0078	1.0497

ные частоты системы в целом (ранее подобные исследования были выполнены в [13]). С этой целью на рис. 7 показана зависимость нескольких первых собственных частот $\omega^* = R^2 \sqrt{h_{pl} \rho_{pl} / D_{pl}} \omega$ от отношения модулей упругости опорной оболочки и пластины E_{sup} / E_{pl} при осесимметричных колебаниях системы (D_{pl} – изгибная жесткость пластины). Эти данные показывают, что деформируемость опорной оболочки практически не сказывается при равенстве модулей опоры и пластины. Качественно этот вывод полностью согласуется с результатами, полученными для прямоугольных в плане оболочек, связанных с системой стержневых опор [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенное выше позволяет заключить, что разработан общий подход, позволяющий в рамках двумерных теорий оболочек определять стационарные состояния систем тонкостенных элементов при совместных колебаниях с общей частотой. Этот подход реализован для систем, состоящих из основной оболочки и связанной с ней системой дополнительных опорных элементов. При этом в общем случае показано, что системы векторных функций, описывающие стационарные состояния системы в целом, обладают свойством ортогональности, а также указано функциональное пространство, в котором они дополнительно обладают свойством полноты. Это позволяет использовать их в качестве базисных функций при построении решений нестационарных задач для рассматриваемых систем, причем, так как каждая из функций строится с учетом неоднородностей, то соответствующие ряды будут обладать более высокой скоростью сходимости по сравнению с рядами других типов.

Для практического использования полученных результатов уместно отметить следующее. В достаточно широком диапазоне отношений жесткостей основной оболочки и опорных элементов при определении собственных частот опоры можно считать абсолютно жесткими. Это обстоя-

тельство существенно упрощает задачу, так как в этом случае не возникает необходимости построения решений уравнений для опорных элементов. Большинство результатов, имеющих в научнотехнической литературе, соответствуют именно этому случаю.

Вместе с тем, в случае податливых опор такой подход позволяет лишь приближенно определить спектр частот системы в целом. Правильные значения частот могут быть получены только при удовлетворении всех условий совместного деформирования основной оболочки и опорных элементов. В случае пластин это приводит к необходимости привлечения полных систем дифференциальных уравнений, описывающих не только изгиб, но и растяжение – сжатие пластин. При жестком соединении основной оболочки и опорных элементов только при таком подходе удастся правильно описать конфигурацию системы.

Также установлено и подтверждено приведенными примерами расчетов, что изменение типа соединения несущей оболочки с опорными элементами приводит к качественному изменению собственных форм, однако это изменение имеет локальный характер, проявляющийся только в непосредственной окрестности опорного элемента. Поэтому при определении такой интегральной характеристики системы, как собственная частота, расхождение в значениях частот при жестком и шарнирном соединении оказывается не столь значительным и находится в пределах $10 \div 30\%$.

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Паламарчук В. Г. Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженнодеформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) // Прикл. мех. – 1988. – 34, N 4. – С. 3–22.
3. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. Кармишин А. В., Ляковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
5. Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций / Кармишин А. В., Жуков А. И., Колосов В. Г. и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 228 с.
6. Вибрации в технике: в 6 томах. Т. 1 / Ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
8. Barot A. V., Suryanarayan S. Free vibrations of rectangular plates with interior point supports // J. Sound Vib. – 1989. – 134, N 2. – P. 291–313.

9. Nowacki W. Vibration and buckling of rectangular plates simply supported at the periphery and at several point inside [in Polish] // Arch. Mech. Stosow.– 1953.– 5, N 3.– S. 437–442.
10. Лерман Л. Б. Колебания пологих слоистых оболочек с локальными упругими опорами // Прикл. мех.– 1994.– 30, N 2.– С. 55–60.
11. Лерман Л. Б. Применение уравнений плоской задачи теории упругости к исследованию колебаний протяженных слоистых плит с внутренними линейными опорами // Прикл. мех.– 1994.– 30, N 6.– С. 66–69.
12. Лерман Л. Б. Колебания круглых в плане пологих оболочек с локальными опорами // Прикл. мех.– 1999.– 35, N 3.– С. 69–75.
13. Лерман Л. Б. О решении задач динамики пластин и оболочек с конструктивными неоднородностями // Прикл. мех.– 1999.– 35, N 9.– С. 46–53.
14. Zarutsky V. A., Lerman L. B. The realization of modal superposition method in shell dynamic problems with constructive heterogeneities // Zeszyty naukowe politechniki rzeszowskiej. Folia scientiarum universitatis technicae resoviensis.– 1999.– N 174, Mechanica, z. 52. Problemy dynamiki konstrukcji.– S. 127–132.
15. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
16. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Матем. методы та фіз.-мех. поля.– 1998.– 41, N 1.– С. 12–34.
17. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6-ти томах. Т. 5. Динамика упругих тел / Головчан В. Т., Кубенко В. Д., Шульга Н. А., Гузь А. Н., Гринченко В. Т.– К.: Наук. думка, 1986.– 288 с.
18. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны.– Л.: Судостроение, 1972.– 376 с.
19. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.– М.: Стройиздат, 1982.– 448 с.
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1972.– 496 с.