

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ – ЛЭМБА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ В СОСТАВНОМ УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 23.12.1999 ◊ Пересмотрено 10.02.2000

На основе метода суперпозиции проводится расчет дифракции волн Рэлея – Лэмба на вертикальной границе волновода, образованного при жестком контакте двух полуполос одинаковой высоты, но с различными упругими свойствами. Эффективность метода обеспечивается учетом характера особенности по напряжениям, которая возникает в угловой точке на линии контакта при определенном сочетании упругих характеристик сред. Приводятся численные результаты, подтверждающие эффективность метода. Проводится анализ зависимости напряжений в зоне контакта от частоты.

На базі методу суперпозиції проводиться розрахунок дифракції хвиль Релея – Лемба на вертикальній границі хвилепровода, утвореного при жорсткому контакті двох півполос однакової висоти, але з різними пружними властивостями. Ефективність методу забезпечується урахуванням характеру особливості по напруженням, яка виникає в кутовій точці на лінії контакту при певному поєднанні пружних характеристик середовищ. Наводяться чисельні результати, котрі підтверджують ефективність методу. Проводиться аналіз залежності напружень в зоні контакту від частоти.

On basis of method of superposition the diffraction of the Rayleigh – Lamb wave on a vertical boundary of the waveguide formed by a strong contact of two halfstrips is calculated for case of their identical heights, but different elastic properties. The efficiency of a method is ensured with the account of singularity on stresses, which arises in an angular point on line of contact at particular combination of the elastic properties of media. Numerical results confirming the efficiency of method are presented. The analysis of frequency dependence of stresses in a contact zone is carried out.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс отражения – прохождения волн на границе раздела сред с различными физическими свойствами изучен достаточно полно для случая бесконечной границы. При этом коэффициенты отражения и прохождения плоской волны, а, следовательно, и распределение энергии падающей волны между отраженными и прошедшими волнами определяется только соотношениями механических характеристик контактирующих сред и углом падения волны. В этом случае имеет место регулярное отражение, при котором коэффициенты отражения и прохождения не зависят от частоты. При наличии конечного участка контакта различных сред волновая картина существенно усложняется. Возникают сложные дифракционные эффекты, обуславливающие сильную зависимость коэффициентов отражения и прохождения от частоты. Кроме конечности размеров границы, важным фактором, оказывающим значительное влияние на структуру отраженного и прошедшего полей, является наличие угловых точек в пересечении гладких частей границы. Наличие таких точек может приводить к возникновению локальных особенностей в волновых полях, что усложняет задачу описания характеристик волн.

В данной работе рассматривается влияние обо-

их указанных факторов (конечности границы раздела и наличия локальных особенностей) применительно к задаче распространения волн в составном упругом волноводе. При этом основной целью работы является изучение изменений в характере процесса отражения – прохождения волны в зависимости от частоты.

Известно, что в случае жесткого контакта двух упругих волноводов в угловой точке на линии контакта могут существовать локальные особенности по напряжениям. Наличие таких особенностей и их характер (логарифмическая или степенная) зависят от механических характеристик контактирующих сред и не зависят от частоты [1].

В целом в рассматриваемой задаче имеются два аспекта. Первый – это достоверное описание ближнего дифракционного на поверхности контакта волнового поля. Второй – анализ особенностей частотных зависимостей интегральных энергетических характеристик отраженных и прошедших волн. В то же время, знание структуры дифракционного поля и роли отдельных волновых компонент в его формировании может оказаться важным для понимания особенностей энергетических характеристик.

Для относительно низкочастотных процессов достоверные количественные оценки волнового поля можно получить в рамках упрощенных моде-

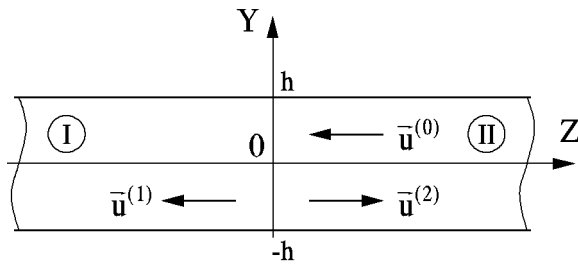


Рис. 1. Геометрия задачи

лей стержней и пластин. Принято считать, что одномерное приближение справедливо, если поперечный размер волновода меньше трети длины волны. При этом локальные особенности не оказывают существенного влияния на процессы отражения – прохождения волн. С повышением частоты усложняется пространственная структура бегущих волн. В формировании прошедшего и отраженного полей существенную роль начинают играть локализованные у поверхности раздела неоднородные волны. Кроме того, для достоверного описания поля в окрестности поверхности контакта необходимо учитывать характер особенности в окрестности угловых точек.

Традиционно развиваются два подхода решения задачи отражения – прохождения на вертикальной границе: метод однородных решений и метод суперпозиции.

В рамках метода однородных решений волновые поля в контактирующих полуполосах представляются в виде разложения по нормальным волнам. Известно [2, 3], что в случае наличия особенности по напряжениям, в рамках метода однородных решений на отрезке $h|1-2\epsilon| \leq y \leq h$ (h – высота волновода, ϵ – показатель особенности) ряды по напряжениям расходятся. В работах [4, 5] для улучшения сходимости на данном интервале применялись обобщенные методы суммирования и регуляризации. Граничная задача решалась в рамках метода однородных решений с использованием условия обобщенной ортогональности. В [6] с использованием соотношения обобщенной ортогональности предложен метод разложения по ортогональным полиномам с весом, учитывающим локальную особенность поля напряжений в угловой точке. В [7] также рассмотрена граничная задача для жесткого контакта двух полуполос. В этой работе предложен метод, основанный на использовании решений вспомогательных граничных за-

дач для изолированных полуполос с заданными граничными условиями. Он позволяет учитывать особенность по напряжениям в угловых точках на линии контакта.

Метод суперпозиции для решения граничных задач для составного волновода, развитый в работах [8, 9], позволяет учесть локальную особенность по напряжениям в угловой точке через асимптотику неизвестных. При этом напряжения и смещения, найденные в рамках метода суперпозиции, могут быть представлены как разложение по нормальным волнам.

Обсуждению вопросов методического характера, связанных с описанием волновых полей в составных волноводах, посвящена довольно обширная литература. Однако анализу физических аспектов формирования волнового поля до сих пор уделялось мало внимания. Здесь можно отметить лишь работы [4, 5], в которых проведен частотный анализ амплитуд возбуждения первой неоднородной волны в прошедшем и отраженном полях при конкретных соотношениях механических характеристик контактирующих сред.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию метода суперпозиции для решения граничной задачи о жестком контакте двух полуполос одинаковой ширины, но с разными механическими характеристиками. При этом акцент сделан на изучении особенностей распределения напряжений на границе контакта в зависимости от частоты при наличии особенности по напряжениям в угловой точке. Показано, что значительное рассогласование формы смещений в падающей волне и смещений в прошедшем и отраженном полях, обусловленных распространяющимися волнами, приводит к сильному возбуждению неоднородных волн. Изменение структуры волнового поля приводит к изменению эффективности прохождения волн на границе раздела и объясняет особенности распределения напряжений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается стационарное волновое поле в упругом волноводе, образованном жестким соединением двух упругих полуполос одинаковой высоты h , но с разными механическими характеристиками (рис. 1). Волновое поле возбуждается первой нормальной волной, приходящей из бесконечности в правой полуполосе ($+\infty$). Падающей волне соответствует индекс 0. Индексы 1 и 2 относятся к прошедшим и отраженным волнам соответственно. Свойства изотропных сред характеризуются модулями сдвига μ_1, μ_2 , коэффициентами Пуассона

на ν_1, ν_2 и плотностями ρ_1, ρ_2 . При этом индекс 1 присвоен левой полуполосе, в которой распространяются прошедшие волны. Поверхности $Y = \pm h$ свободны от напряжений. В дальнейшем математическая постановка и решение осуществляются в безразмерных координатах $y = Y/h, z = Z/h$.

В зоне контакта условия сопряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(y, 0) &= \sigma_z^{(2)}(y, 0) + \sigma_z^{(0)}(y, 0), \\ \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) &= \tau_{zy}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0), \\ u_y^{(1)} &= u_y^{(2)} + u_y^{(0)}, \\ u_z^{(1)} &= u_z^{(2)} + u_z^{(0)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускается (ω – круговая частота).

Необходимо найти вектора смещений в отраженном и прошедшем полях, удовлетворяющие однородной системе уравнений Ламе:

$$\begin{aligned} \Delta u_y^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y} \right) + \Omega_2^{(i)2} u_y &= 0, \\ \Delta u_z^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y} \right) + \Omega_2^{(i)2} u_z &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Omega_2^{(i)} = \omega h / c_i^{(s)}$, $i = 1, 2$ – безразмерная частота, $c_{(i)}^{(s)}$ – скорости поперечных волн.

Дополнительно к условиям сопряжения (1) должны выполняться условия излучения на бесконечности, заключающиеся в том, что каждая распространяющаяся нормальная волна в прошедшем и отраженном поле уносит энергию от границы раздела на бесконечность.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В данной работе применялся метод суперпозиции [8], который позволяет учесть особенности по напряжениям в угловых точках. В рамках этого метода построим решение граничной задачи для продольных колебаний составного волновода. Следуя общей схеме метода суперпозиции [8], компоненты вектора смещений в прошедшем поле ($z < 0$)

представим в виде

$$\begin{aligned} u_y^{(1)} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k^{(1)} \beta_k e^{q_1 z} - D_k^{(1)} q_2 e^{q_2 z} \right) \sin \beta_k y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) U_y^{(1)}(\tau, y) e^{-i\tau z} d\tau, \\ u_z^{(1)} &= -iC_0^{(1)} \Omega_1^{(1)} e^{i\Omega_1^{(1)} z} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left(-C_k^{(1)} q_1 e^{q_1 z} + D_k^{(1)} \beta_k e^{q_2 z} \right) \cos \beta_k y - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) U_z^{(1)}(\tau, y) e^{-i\tau z} d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

с неизвестными постоянными $C_0^{(1)}, C_k^{(1)}, D_k^{(1)}$ ($k = 1, 2, \dots$) и функцией $x^{(1)}(\tau)$. В соотношениях (3) $\Omega_1^{(1)} = \omega h / c^{(l)}$; $c^{(l)}$ – скорость продольной волны в первой полуполосе. Кроме того, здесь положено

$$\begin{aligned} U_y^{(1)}(\tau, y) &= p_1^2 \left(\tau^2 \frac{\sinh p_2 y}{\sinh p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\sinh p_1 y}{\sinh p_1} \right); \\ U_z^{(1)}(\tau, y) &= \tau p_1 \left(p_1 p_2 \frac{\cosh p_2 y}{\sinh p_2} - \frac{(\tau^2 + p_2^2)}{2} \frac{\cosh p_1 y}{\sinh p_1} \right); \\ p_j &= \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j; \end{cases} \\ q_j &= \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| < \Omega_j, \end{cases} \quad \beta_k = k\pi. \end{aligned}$$

Решение для отраженного поля ($z > 0$) получаем из соотношений (3) при замене индекса 1 на 2 и смене знака при $z, u_z, D_k^{(2)}$. Для второй полуполосы в выражения для p_j, q_j подставляем нормированные частоты $\Omega_j^{(2)}$ и обозначаем эти величины как \tilde{p}_j, \tilde{q}_j .

Волновое поле в составном волноводе возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся во второй полуполосе в отрицательном направлении оси z . В этом случае выражения для смещения в падающей волне имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_z^{(0)} &= \xi \left(\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \frac{\cosh(\tilde{p}_2 y)}{\sinh \tilde{p}_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tilde{p}_2^2 + \xi^2}{2} \tilde{p}_1 \frac{\cosh(\tilde{p}_1 y)}{\sinh \tilde{p}_1} \right) e^{-i\xi z}, \quad (4) \\ u_y^{(0)} &= i\tilde{p}_1 \left(\xi^2 \frac{\sinh(\tilde{p}_2 y)}{\sinh \tilde{p}_2} - \frac{\tilde{p}_2^2 + \xi^2}{2} \frac{\sinh(\tilde{p}_1 y)}{\sinh \tilde{p}_1} \right) e^{-i\xi z}. \end{aligned}$$

Здесь ξ – постоянная распространения первой нормальной волны во второй полуплоскости. Постоянная распространения для заданной частоты определяется из дисперсионного уравнения Рэлея – Лэмба:

$$\Delta(\xi) = \xi^2 \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \coth \tilde{p}_2 - \frac{(\xi^2 + \tilde{p}_2^2)^2}{4} \tilde{p}_1 \coth \tilde{p}_1 = 0.$$

Представление (3) выбрано таким образом, что условие отсутствия касательных напряжений на поверхностях $y = \pm 1$ выполнялось автоматически. Выполнение условия отсутствия нормальных напряжений на поверхностях $y = \pm 1$ и условий сопряжения приводит к системе интегралгебраических уравнений относительно неизвестных $C_0^{(i)}, C_k^{(i)}, D_k^{(i)}$ ($k = 1, 2, \dots$) и $x^{(i)}(\tau)$, имеющей следующий вид:

$$x^{(1)}(\tau)\Delta(\tau) + C_0^{(1)} \frac{2i\Omega_0^{(1)2}\Omega_1^{(1)}}{\tau^2 - \Omega_1^{(1)2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left((C_k^{(1)}(\beta_k^2 + \Omega_0^{(1)2}) \frac{2q_1}{\tau^2 + q_1^2} - D_k^{(1)}\beta_k \frac{2q_2^2}{\tau^2 + q_2^2} \right) (-1)^k = 0,$$

$$x^{(2)}(\tau)\Delta^{(2)}(\tau) + C_0^{(2)} \frac{2i\Omega_0^{(2)2}\Omega_1^{(2)}}{\tau^2 - \Omega_1^{(2)2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left((C_k^{(2)}(\beta_k^2 + \Omega_0^{(2)2}) \frac{2\tilde{q}_1}{\tau^2 + \tilde{q}_1^2} + D_k^{(2)}\beta_k \frac{2\tilde{q}_2^2}{\tau^2 + \tilde{q}_2^2} \right) (-1)^k = 0,$$

$$G_1 \left(-C_k^{(1)}q_1 + D_k^{(1)} \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2\beta_k} \right) - G_2 \left(C_k^{(2)}\tilde{q}_1 + D_k^{(2)} \frac{\beta_k^2 + \tilde{q}_2^2}{2\beta_k} \right) = \\ = -(-1)^k G_2 \xi \tilde{p}_1^2 (\xi^2 + \tilde{p}_2^2) \left(\frac{1}{\tilde{p}_2^2 + \beta_k^2} - \frac{1}{\tilde{p}_2^2 + \beta_k^2} \right),$$

$$iC_0^{(1)}\Omega_1^{(1)} + iC_0^{(2)}\Omega_1^{(2)} = -\xi\Omega_0^{(2)2},$$

$$C_k^{(1)}q_1 - D_k^{(1)}\beta_k + C_k^{(2)}\tilde{q}_1 + D_k^{(2)}\beta_k = (-1)^k \xi_0 \tilde{p}_1^2 \left(\frac{2\tilde{p}_2^2}{\tilde{p}_2^2 + \beta_k^2} - \frac{\xi^2 + \tilde{p}_2^2}{\tilde{p}_2^2 + \beta_k^2} \right),$$

(5)

$$(-C_k^{(1)}\beta_k + D_k^{(1)}q_1) - (-1)^k \frac{\beta_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) a_k(\tau) d\tau + \\ + (C_k^{(2)}\beta_k + D_k^{(2)}\tilde{q}_1) + \frac{\beta_k}{2\pi} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) \tilde{a}_k(\tau) d\tau = -\tilde{a}_k(\xi), \\ -G_1 \left(C_0^{(1)} \frac{\Omega_2^{(1)2}}{2} + \frac{\Omega_2^{(1)2}\Omega_0^{(1)2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) d\tau \right) + \\ + G_2 \left(C_0^{(2)} \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} + \frac{\Omega_2^{(2)2}\Omega_0^{(2)2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) d\tau \right) = -G_2 i \frac{\Omega_2^{(2)2}\Omega_0^{(2)2}}{2},$$

$$G_1 \left(C_k^{(1)} \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} - D_k^{(1)}\beta_k q_2 - (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(1)}(\tau) b_k(\tau) d\tau \right) - \\ - G_2 \left(C_k^{(2)} \frac{\beta_k^2 + \tilde{q}_2^2}{2} + D_k^{(2)}\beta_k \tilde{q}_2 - (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(2)}(\tau) \tilde{b}_k(\tau) d\tau \right) = -G_2 i \tilde{b}_k(\xi).$$

Здесь введены обозначения

$$a_k(\tau) = p_1^2 \left(\frac{2\tau^2}{\beta_k^2 + p_2^2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{\beta_k^2 + p_1^2} \right);$$

$$b_k(\tau) = p_1^2 \left(\frac{2\tau^2 p_2^2}{\tau^2 + q_2^2} - \frac{(\tau^2 + \Omega_0^2)(\tau^2 + p_2^2)}{\tau^2 + q_1^2} \right);$$

$$2\Omega_0^2 = \Omega_2^2 - 2\Omega_1^2.$$

Структура системы (5) указывает на важную особенность алгебраических соотношений, вытекающих из условий сопряжения на стыке. Полученная система (5) является системой второго рода, в которой естественным образом выделяются главные элементы, ответственные за выполнение конкретных граничных условий. Само формирование алгебраической системы проводится с использованием основных свойств разложений в ряды Фурье. Это обеспечивает сходимость использованных разложений даже в случае наличия интегрируемых особенностей в разлагаемых функциях, как это имеет место в данной физической задаче. Характер сингулярности в поле напряжений может быть определен до решения граничной задачи в целом.

Для полного описания волнового поля на границе раздела двух полуплос простые методы редукции интегро-алгебраических уравнений неприменимы. Это обусловлено наличием в угловой точке особенности по напряжениям при определенных соотношениях параметров контактирующих сред [1]. Существование в угловой точке особенности по напряжениям приводит к тому, что в рамках метода суперпозиции интегралы и ряды для напряжений на линии контакта сходятся медленно. В рамках метода однородных решений в случае наличия локальной особенности ряды по напряжениям расходятся на отрезке $h|1-2\epsilon| \leq y \leq h$ при $z=0$ [2, 3].

Для получения решения, адекватно описывающего волновое поле на границе раздела, необходимо использовать асимптотические свойства неизвестных. Анализ асимптотического поведения неизвестных в суммах основан на свойствах сходимости рядов для напряжений вблизи угловых точек на линии контакта двух сред: $y = \pm 1, z = +0$. Поступая аналогично [10], представим нормальное и касательное напряжения в отраженном поле при

$z = +0$ в виде

$$\sigma_z(\pm 1, z) = \frac{\sigma_+}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi(y),$$

$$\tau_{zy}(\pm 1, z) = \frac{\tau_+}{y(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_1(y).$$

Здесь $\psi(y), \psi_1(y)$ – некие гладкие функции; $\sigma_{(+)}, \tau_{(+)}$ – неизвестные амплитуды напряжений. Тогда требуемому характеру особенности в угловой точке соответствует следующее асимптотическое поведение неизвестных $C_k^{(2)}, D_k^{(2)}$ при $k \rightarrow \infty$ и функции $x^{(2)}(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$:

$$c_k^{(2)} = C_k^{(2)} (-1)^k = \frac{2a_0}{(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \frac{J_{\epsilon-0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-0.5}},$$

$$d_k^{(2)} = D_k^{(2)} (-1)^k = -\frac{2b_0}{(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \frac{J_{\epsilon-0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-0.5}},$$

$$a_0 = a_1 \left(1 - \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2\beta_k^2 (\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \right),$$

$$a_1 = \sigma_+ + \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)\tau_+,$$

$$b_0 = a_0 - \frac{\sigma_+ (\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})}{2\beta_k^2},$$

$$x^{(2)}(\tau) = -\frac{4}{\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tau^{\epsilon+3}} \times$$

$$\times \left(\coth(\pi\epsilon/2)\sigma_+(\epsilon-1)\tau_+\epsilon \right).$$

Построение конечной системы, соответствующей бесконечной системе (5), выполнено аналогично работе [8] с учетом асимптотического поведения неизвестных и функций $x^{(1)}(\tau), x^{(2)}(\tau)$

Для нахождения показателя особенности ϵ в выражениях (6) сохраним только главные члены в системе (5). Определитель полученной системы совпадает с уравнением Дандерса для статических задач [1]:

$$(\beta \sin^2 \frac{\pi\epsilon}{2} + (\alpha - \beta)\epsilon^2)^2 - 0.25 \sin^2 \pi\epsilon - \epsilon^2 \alpha^2 = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{G_2/G_1(1-\nu_1) - (1-\nu_2)}{G_2/G_1(1-\nu_1) + (1-\nu_2)},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{G_2/G_1(1-2\nu_1) - (1-2\nu_2)}{(G_2/G_1(1-\nu_1) + (1-\nu_2))}.$$
(9)

Анализ уравнения (7) для различных комбинаций упругих постоянных проведен в [1].

Последующее построение алгоритма решения системы связано со способом замыкания системы. В работе использован традиционный подход, основанный на задании асимптотических выражений для всех четырех коэффициентов. В этом случае σ_+ , τ_+ для отраженного поля и σ_- , τ_- для прошедшего поля также становятся неизвестными, а коэффициенты $c_k^{(i)}$, $d_k^{(i)}$ для всех $k > K$ задаются в виде (7).

Заканчивая описание метода суперпозиции применительно к решению задачи дифракции нормальных волн на вертикальной границе в составном волноводе, подчеркнем еще раз, что основное преимущество этого метода заключается в возможности учета локальных особенностей по напряжениям на границе раздела. Это позволяет построить эффективный алгоритм для вычисления характеристик отраженного и прошедшего полей при учете конечного числа слагаемых в рядах системы (5).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

При определении порядка линейной системы, соответствующей системе (5), необходимо оценить качество приближенного решения, описывающего волновой процесс в полуполосе. Для этого существует ряд критериев. В нашем случае при решении конечной системы использовались данные о скорости приближения неизвестных к их асимптотическим значениям. При проведении вычислений было установлено, что при сохранении более десяти членов значения неизвестных $C_0^{(i)}$ $i=1, 2$ практически не изменяются (сохраняются четыре значащие цифры). Для неизвестных $C_k^{(i)}$, $D_k^{(i)}$, $k=1, 4$ сохраняются две значащие цифры. Этим обеспечивается высокая точность оценок интегральных характеристик волновых полей.

При выполнении расчетов количество неизвестных, удерживаемых в суммах системы (5), составляло $K=15$. Для больших величин k использовались асимптотические значения неизвестных. Интегрирование на интервале $(-\infty, +\infty)$ с учетом

четности подынтегральных функций сводилось к интегрированию на интервале $(0, T)$ с добавлением значения интеграла на интервале $(T, +\infty)$, полученного при использовании асимптотических разложений по τ подынтегральных выражений. При этом T принималось равным 200.

3.1. Энергия

Одним из критериев достоверности решения был контроль за точностью выполнения закона сохранения энергии. Сумма энергий отраженного и прошедшего полей равна энергии падающей волны. Энергия отраженного поля равна сумме энергий, переносимой каждой распространяющейся волной, которая может существовать на данной частоте. Она определяется соотношением

$$W = \sum_{j=1}^J W_j,$$
(10)

$$W_j = |K_j|^2 G_2 \omega \tilde{p}_1^2(\xi_j) \Omega_2^{(2)2} \Delta^{(2)'}(\xi_j)$$

Здесь J – число распространяющихся волн в отраженном поле; K_j – коэффициент возбуждения j -ой нормальной волны.

Коэффициенты K_j для j -ой нормальной волны в отраженном поле находились из соотношения

$$K_j^{(np)} = \text{Res}_{\tau=\xi_j} x^{(2)}(\tau),$$
(11)

где Res обозначают вычеты функции $x^{(2)}(\tau)$ при $\tau = \xi_j$. Используя значения неизвестных, найденных в рамках метода суперпозиции с учетом особенности по напряжениям в угловой точке, запишем вид этих коэффициентов:

$$K_j^{\text{от}} = \frac{1}{\Delta^{(2)'}(\xi_j)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k^{(2)} (\beta_k^2 + \Omega_0^{(2)2}) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{2\tilde{q}_1}{\xi_j^2 + \tilde{q}_1^2} + D_k^{(2)} \beta_k \frac{2\tilde{q}_2^2}{\xi_j^2 + \tilde{q}_2^2} \right) (-1)^k +$$

$$\left. + S_K(\xi_j) - \frac{2i\Omega_0^{(2)2}\Omega_1^{(2)}}{\xi_j^2 - \Omega_1^{(2)2}} \right).$$
(12)

Здесь $S_K(\xi_j)$ определяется как

$$S_K(\xi) = \frac{2(\Omega_1^{(2)2}\tau_+ + \Omega_2^{(2)2}\sigma_+ \coth \pi\epsilon/2)}{\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2}} \times$$

$$\times \text{R}(\epsilon, K) - \frac{4(\tau_+ + \sigma_+ \coth(\pi\epsilon/2))}{\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2}} \times$$

$$\times \text{Rt}(\xi) + 2\sigma_+ \text{Rb}(\xi),$$
(13)

где

$$\begin{aligned}
\text{R}(\epsilon, K) &= -\frac{1}{2^{\epsilon+1.5}(\epsilon+0.5)\Gamma(\epsilon+0.5)} - \sum_{k=1}^k (-1)^k \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon+0.5}}; \\
\text{Rt}(\xi) &= \frac{I_{\epsilon+0.5}(\tilde{p}_1)}{2 \sinh \tilde{p}_1 \tilde{p}_1^{\epsilon-0.5}} \left(\xi^2 - \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} \right) - \frac{I_{\epsilon+0.5}(\tilde{p}_2)}{2 \sinh \tilde{p}_2 \tilde{p}_2^{\epsilon-0.5}} \xi^2 - \\
&- \sum_{k=1}^k (-1)^k \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon-1.5}} \left(\frac{\xi^2 - \Omega_2^{(2)2}/2}{\beta_k^2 + \tilde{p}_1^2} - \frac{\xi^2}{\beta_k^2 + \tilde{p}_2^2} \right) - \frac{1}{2^{\epsilon-1.5}2\Gamma(\epsilon-0.5)} \left(\frac{1}{\tilde{p}_1^2} \left(\xi^2 - \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} \right) - \frac{\xi^2}{\tilde{p}_2^2} \right) - \\
&- \frac{I_{\epsilon+0.5}(p_1)}{2 \sinh \tilde{p}_1 \tilde{p}_1^{\epsilon+1.5}} \left(\xi^2 - \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} \right) \left(\Omega_1^{(2)2} + \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \right) + \frac{I_{\epsilon+0.5}(\tilde{p}_2)}{2 \sinh \tilde{p}_2 \tilde{p}_2^{\epsilon+1.5}} \xi^2 \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} + \\
&+ \left(\left(\xi^2 - \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} \right) \left(\Omega_1^{(2)2} + \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \right) \frac{1}{\tilde{p}_1^2} - \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \frac{\xi^2}{\tilde{p}_2^2} \right) \frac{1}{4(\epsilon+0.5)2^{\epsilon+0.5}\Gamma(\epsilon+0.5)} + \\
&+ \sum_{k=1}^k (-1)^k \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{2\beta_k^{\epsilon+0.5}} \left(\left(\xi^2 - \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} \right) \left(\Omega_1^{(2)2} + \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \right) \frac{1}{\beta_k^2 + \tilde{p}_1^2} - \frac{\Omega_1^{(2)4} + \Omega_2^{(2)4}}{2(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})} \frac{\xi^2}{\beta_k^2 + \tilde{p}_2^2} \right); \\
\text{Rb}(\xi) &= \frac{\xi^2 I_{\epsilon+0.5}(p_2)}{2 \sinh \tilde{p}_2 \tilde{p}_2^{\epsilon+1.5}} - \frac{\xi^2}{2\tilde{p}_2^2(\epsilon+0.5)2^{\epsilon+0.5}\Gamma(\epsilon+0.5)} - \sum_{k=1}^k (-1)^k \frac{J_{\epsilon+0.5}(\beta_k)}{\beta_k^{\epsilon+0.5}(\beta_k^2 + \tilde{p}_2^2)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Энергия прошедшего поля определяется аналогично.

Для широкого диапазона изменения параметров среды при принятом числе неизвестных в конечной системе закон сохранения энергии выполнялся с точностью до 0.2% энергии падающей волны. Следует отметить, что учет особенности по напряжениям практически не сказывался на точности выполнения закона сохранения энергии. Это обусловлено тем, что коэффициенты возбуждения распространяющихся волн определяются, в основном, первыми коэффициентами системы (5). Поэтому анализ энергетических особенностей процесса отражения – прохождения нормальной волны на границе составного волновода может быть проведен даже при использовании метода простой редукции по отношению к системе (5). Распределение энергии падающей вол-

ны между отраженным и прошедшим полем для конкретных параметров контактирующих сред будет приведено ниже.

3.2. Напряжения

Еще одним критерием адекватности выбранной расчетной схемы является контроль за точностью выполнения условий сопряжения. Для этого необходимо найти значения напряжений и смещений на линии контакта. В силу громоздкости выражений для напряжений и смещений ниже приведем только выражение для нормального напряжения в прошедшем поле при $z=0$. Оно достаточно полно иллюстрирует тип формул, по которым следует проводить вычисления, и с учетом асимптотического поведения неизвестных имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_z^{(1)}(y, 0)}{2G_1} = & 2iC_0^{(1)}\Omega_1^{(1)}\Omega_0^{(1)2} \left(\int_0^T \frac{\Theta_z(\tau, y)}{\Delta^{(1)}(\tau)(\tau^2 - \Omega_1^{(1)2})} d\tau + i\pi \sum_{j=1}^J \frac{\Theta_z(\xi_j, y)}{\Delta^{(1)'(\tau)}(\xi_j^2 - \Omega_1^{(1)2})} \right) - \\
 & - \sum_{k=1}^k C_k^{(1)}(-1)^k \left(\int_0^T \frac{\Theta_z(\tau, y)e_k(\tau)}{\Delta^{(1)}(\tau)} d\tau + i\pi \sum_{j=1}^J \frac{\Theta_z(\xi_j, y)e_k(\xi_j)}{\Delta^{(1)'(\tau)}} - \pi(-1)^k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} \cos(\beta_k y) \right) + \\
 & + \sum_{k=1}^k D_k^{(1)}(-1)^k \left(\int_0^T \frac{\Theta_z(\tau, y)\varkappa_k(\tau)}{\Delta^{(1)}(\tau)} d\tau + i\pi \sum_{j=1}^J \frac{\Theta_z(\xi_j, y)\varkappa_k(\xi_j)}{\Delta^{(1)'(\tau)}} - \pi(-1)^k \beta_k q_2 \cos(\beta_k y) \right) - \\
 & - \left(\int_0^T S_n(\tau) \frac{\Theta_z(\tau, y)}{\Delta^{(1)}(\tau)} d\tau + i\pi \sum_{j=1}^J \frac{S_n(\xi_j)\Theta_z(\xi_j, y)}{\Delta^{(1)'(\tau)}} \right) + \pi \frac{\sigma_-}{\sqrt{\pi}\Gamma(\epsilon)2^{\epsilon-0.5}} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} - \frac{\Gamma(\epsilon)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\epsilon+0.5)} \right) - \frac{2(\coth(\pi\epsilon/2)\sigma_- \epsilon + \tau_-(1+\epsilon))}{\sqrt{2\pi}} \times \\
 & \times \left(\frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(1-y)^{1-\epsilon}} \left(\epsilon - \frac{(1-y)^2}{4} \right) + \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{(1+y)^{1-\epsilon}} \left(\frac{2y + \epsilon(1-y)}{1+y} - \frac{(1-y)^2}{4} \right) \right) - \\
 & - \frac{\gamma(1-\epsilon, (1-y)T)}{(1-y)^{1-\epsilon}} \left(\epsilon - \frac{(1-y)^2}{4} \right) - \frac{\gamma(1-\epsilon, (1+y)T)}{(1+y)^{1-\epsilon}} \left(\frac{2y + \epsilon(1-y)}{1+y} - \frac{(1-y)^2}{4} \right) - \\
 & - 2T^{1-\epsilon} \exp^{-T} \frac{\cosh(Ty) + y \sinh(Ty)}{1+y}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $\gamma(a, x)$ – неполная гамма-функция;

$$\begin{aligned}
 \Theta_z(\tau, y) = & p_1^2 \tau^2 p_2 \frac{\cosh p_2 y}{\sinh p_2} - \\
 & - \frac{(\tau^2 + p_2^2)(\tau^2 + \Omega_0^{(1)2})}{2} p_1 \frac{\cosh p_1 y}{\sinh p_1};
 \end{aligned}$$

$$e_k(\tau) = 2q_1 \frac{\beta_k^2 + \Omega_0^{(1)2}}{\tau^2 + q_1^2};$$

$$\varkappa_k(\tau) = \beta_k \frac{2q_1^2}{\tau^2 + q_2^2}.$$

Анализ точности выполнения условий сопряжения позволил установить следующие закономерности. Замена бесконечной системы (5) конечной приводит к возникновению погрешности в выполнении условий сопряжения. При использовании описанного выше алгоритма усечения системы величина погрешности выполнения условий сопряжения по смещениям u_z, u_y для всех рассмотренных случаев не превышала 4% от $u_z^{(0)}(0, 0)$. Погрешность по касательным напряжениям не превышала 0.02% от $\sigma_0 = \sigma^{(0)}(0, 0)$ для всех $|y| < 1$ кроме малой окрестности угловой точки и прак-

тически не зависела от показателя особенности в угловой точке.

Для нормального напряжения и σ_z ситуация иная. Точность выполнения условий сопряжения значительно падает вблизи малой окрестности угловой точки ($y = \pm 1, z = 0$). Напомним, что вблизи малой окрестности угловой точки нормальное напряжение отраженного поля определяется как

$$\sigma_z(\pm 1, z) = \frac{\sigma_+}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_+(y),$$

а прошедшего – как

$$\sigma_z(\pm 1, z) = \frac{\sigma_-}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_-(y).$$

Даже самая малая величина разности $\delta = \sigma_+ - \sigma_-$ вблизи угла приводит к бесконечной погрешности $\epsilon/(1-y^2)^{1-\epsilon}$. Поэтому даже при учете асимптотических свойств неизвестных, которые отражают поведение волновых полей вблизи угловых точек, невозможно удовлетворить условия сопряжения по напряжениям вблизи угла с заданной точностью. В то же время, при проведенных расчетах для всех $|y| < 0.98$ условия сопряжения по нормальным напряжениям выполнялись с погрешностью до 5% от σ_0 .

3.3. Численный анализ

Рассмотрим особенности процесса отражения – прохождения первой нормальной волны от границы раздела в составном волноводе в случае, когда в отраженном поле распространяющиеся волны высших порядков появляются раньше чем в прошедшем. Такая ситуация возможна при условии $\mu_1(1-\nu_1)/\rho_1(1-2\nu_1) > \mu_2(1-\nu_2)/\rho_2(1-2\nu_2)$. Анализ проведём для частот, меньших частоты первого толщинно-сдвигового резонанса в отраженном поле: $\Omega_2^{(2)} \leq \pi$.

Конкретные вычисления выполним для волновода со следующими характеристиками: $\mu_2/\mu_1 = 3.27$, $\rho_2/\rho_1 = 4.25$, $\nu_2 = 0.29$, $\nu_1 = 0.3$. В этом случае возникает особенность по напряжениям в угловой точке, причем ее показатель равен $\epsilon = 0.911$.

Остановимся вначале на анализе энергетических характеристик волнового поля. На рис. 2 представлено распределение энергии падающей волны в отраженном и прошедшем полях для данного волновода. Сплошная кривая соответствует энергии прошедшего поля, а штриховая – отраженного. Точками на оси E обозначены (в процентном отношении) энергии отраженного и прошедшего полей, найденные по одномерному приближению. Через Ω^* обозначена частота, на которой в отраженном поле появляются распространяющиеся волны высших порядков. В рассматриваемом диапазоне частот в прошедшем поле распространяющиеся волны высших порядков еще не появляются. Для частот вплоть до $\Omega_2^{(2)} < 2$ распределение энергии между отраженной и прошедшей волной достаточно хорошо описывается в рамках стержневой модели и определяется только соотношением импедансов контактирующих сред несмотря на то, что при $\Omega_2^{(2)} = 2$ распределение по толщине напряжения в падающей волне уже далеко от равномерного: $\sigma^{(0)}(1, z)$ в два раза отличается от $\sigma^{(0)}(0, z)$. Для частот выше $\Omega_2^{(2)} > 2$ ситуация резко меняется, хотя в отраженном и прошедшем полях по-прежнему существует только по одной распространяющейся волне. Энергия прошедшего поля начинает увеличиваться и на частоте $\Omega_2 = 2.55$ наблюдается максимум прохождения. Напомним, что при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0.29$ в волноводе со свободным торцом на частоте $\Omega_2 = 2.3$ наблюдается краевой резонанс, обусловленный значительным возбуждением неоднородных волн. Хотя неоднородные волны энергии не переносят, естественно предположить связь наблюдаемого максимума энергии прошедшего поля с поведением неоднородных волн, кото-

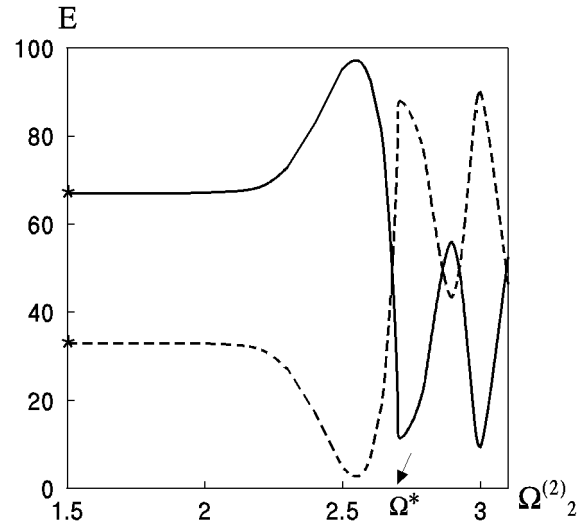


Рис. 2. Зависимость энергии от частоты:
сплошная – прошедшее поле,
штриховая – отраженное поле

рые значительно перестраивают структуру волнового поля. Можно говорить об интересном волновом эффекте, характерном для упругих волноводов: значительный уровень неоднородных волн увеличивает прозрачность поверхности контакта разных материалов.

При изменении параметров контактирующих сред в диапазоне, для которого в отраженном и прошедшем полях существует по одной волне, явление увеличения прозрачности границы раздела сохраняется, однако изменяется эффективность его проявления. Степень увеличения прозрачности границы зависит не только от соотношения импедансов контактирующих сред, но и от других параметров (соотношения коэффициентов Пуассона, показателя особенности в угловой точке и др.) Вопрос изменения эффективности прохождения энергии во вторую среду в зависимости от соотношения механических характеристик контактирующих сред требует дополнительного анализа.

Следует отметить еще один характерный частотный диапазон – $\Omega^* \leq \Omega_2^{(2)} \leq \pi$. Начиная с частоты Ω^* , возникает явление захвата энергии, под которым подразумевается увеличение эффективности отражения в определенном частотном диапазоне. Оно наблюдается для области частот, для которой в отраженном поле существуют распространяющиеся волны высших порядков, и связано оно с перераспределением энергии падающей волны между одной прошедшей и несколькими отра-

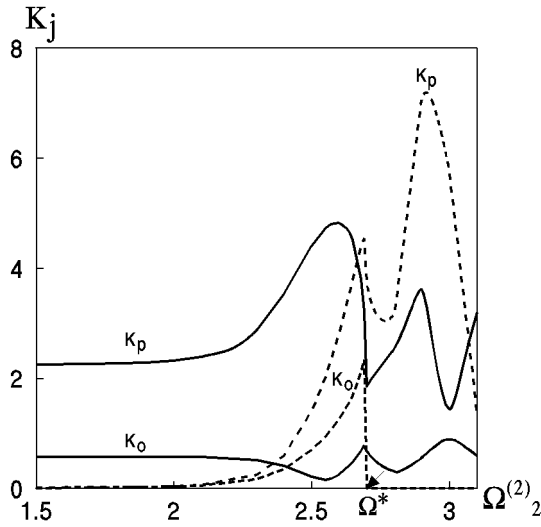


Рис. 3. Зависимость модуля амплитуды нормальной волны от частоты:

K_p – прошедшие волны, K_o – отраженные волны, сплошные – распространяющиеся волны, штриховые – неоднородные волны

женными волнами. Частота $\Omega_2^{(2)} = \Omega_{kr}^{(2)} = 2.89$ является частотой толщинного резонанса. На этой частоте исчезает “обратная” волна, и в отраженном поле существует только две распространяющиеся волны. Энергия отраженного поля на данной частоте минимальна. Частотная зависимость энергоемкости распространяющихся волн отраженного и прошедшего полей в области захвата энергии подробно изучена в [12].

Вернемся к изучению волновых характеристик отраженного и прошедшего полей на частотах $2.0 < \Omega_2^{(2)} < \Omega^*$, когда в отраженном поле существует только одна распространяющаяся волна, а распределения энергии в отраженном и прошедшем полях резко отличаются от предсказываемых стержневой моделью.

На рис. 3 представлены частотные зависимости модулей амплитуд нормальных волн в отраженном (кривые K_o : сплошная – распространяющаяся волна $K_1^{отр}$, штриховая – первая неоднородная волна $K_k^{отр}$) и в прошедшем поле (кривые K_p : сплошная – распространяющаяся волна $K_1^{пр}$, штриховая – первая неоднородная волна $K_k^{пр}$). В области низких частот неоднородные волны как в отраженном, так и в прошедшем полях возбуждаются слабо и процесс отражения – прохождения нормальной волны на границе раздела в составном волноводе может быть описан в рамках стержневой модели. С ростом частоты возрастает влияние неоднородных волн. Это приводит к тому,

что стержневая модель становится неправомерной. Вплоть до частоты Ω^* амплитуда первой неоднородной волны в отраженном поле растет. На этой же частоте вторая неоднородная волна достигает своего максимального значения. При этом амплитуда первой неоднородной волны превышает амплитуду распространяющейся волны в отраженном поле в три раза. Неоднородные волны высших порядков возбуждаются значительно слабее и их амплитуды не превышают амплитуду распространяющейся волны.

Указанные черты наблюдаемого явления делают его сходным с краевым резонансом [8]. Отметим, однако, что резонансные явления характеризуются не только резким ростом амплитуд, но и изменением фазовых характеристик физических величин. На частоте краевого резонанса ($\Omega^{(e)}$) в полуполосе со свободным торцом фазы распространяющейся волны и всех неоднородных волн при переходе через ($\Omega^{(e)}$) изменяли знак. В данном же случае, первая и вторая неоднородные волны в отраженном поле изменяют знак на частоте $\Omega_2^{(2)} = 2.66$, т.е. ниже Ω^* . Фаза распространяющейся волны вблизи частоты Ω^* знак не меняет. Кроме того, за счет прохождения энергии во вторую среду амплитуда первой распространяющейся отраженной волны оказывается частотно зависимой. Поэтому максимум отношения модулей амплитуд первой неоднородной волны к первой распространяющейся волне в отраженном поле оказывается несколько меньшим Ω^* и наблюдается на частоте $\Omega_2^{(2)} = 2.55$.

На рис. 4 представлены частотные зависимости модуля отношения амплитуды первой неоднородной волны к амплитуде первой распространяющейся волны (сплошная кривая – в прошедшем поле, штриховая – в отраженном). Анализируя поведение нормальных волн в прошедшем поле, отметим, что в частотном интервале $2.0 < \Omega_2^{(2)} < \Omega^*$ амплитуда первой неоднородной волны меньше амплитуды распространяющейся волны. Однако начиная с частоты $\Omega^{(2)} = 2.35$ амплитуда первой неоднородной волны в прошедшем поле превышает амплитуды как первой неоднородной, так и распространяющейся волн в отраженном поле. Таким образом, значительное возбуждение неоднородных волн в отраженном и прошедшем полях в области частот, на которых в каждой полуполосе существует только по одной распространяющейся волне, приводит к перестройке структуры общего волнового поля.

Значительное возбуждение неоднородных волн, по-видимому, обусловлено рассогласованием формы падающей волны с формами волн, распростра-

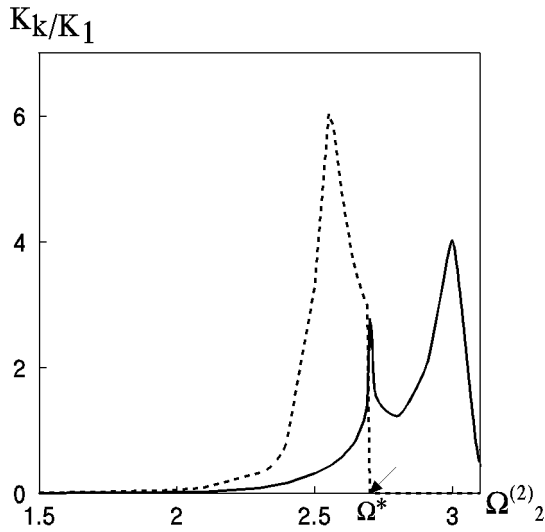


Рис. 4. Зависимость модуля амплитуды неоднородной волны, нормированной на амплитуду распространяющейся: сплошная – прошедшее поле, штриховая – отраженное поле

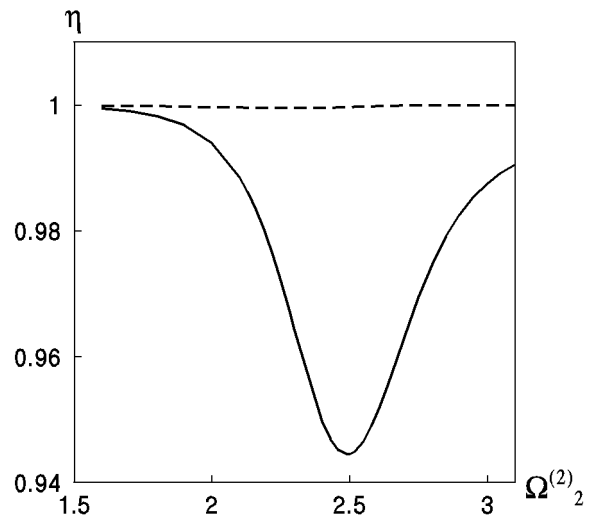


Рис. 5. Зависимость коэффициентов, характеризующих степень рассогласования нормальных волн от частоты:

сплошная – для горизонтальной компоненты смещения, штриховая – для вертикальной компоненты смещения

няющихся в отраженном и прошедшем полях. Для того, чтобы охарактеризовать степень согласованности смещений в падающей волне и на линии контакта двух полуполос с учетом сильной частотной зависимости формы мод в отраженном и прошедшем полях, целесообразно ввести следующие коэффициенты для горизонтальной и вертикальной компонент смещения соответственно:

$$\eta_z = \frac{\int_0^1 u_z^{(\text{пр})}(\xi_1, y) u_z^{(\text{от})}(\xi_2, y) dy}{\sqrt{\int_0^1 u_z^{(\text{от})2}(\xi_2, y) dy} \sqrt{\int_0^1 u_z^{(\text{пр})2}(\xi_2, y) dy}},$$

$$\eta_y = \frac{\int_0^1 u_y^{(\text{пр})}(\xi_1, y) u_y^{(\text{от})}(\xi_2, y) dy}{\sqrt{\int_0^1 u_y^{(\text{от})2}(\xi_2, y) dy} \sqrt{\int_0^1 u_y^{(\text{пр})2}(\xi_2, y) dy}}.$$

Здесь $\xi_{(1,2)}$ – первые действительные корни дисперсионного уравнения Рэлея – Лэмба для прошедшего и отраженного полей соответственно.

На рис. 5 приведены частотные зависимости указанных весовых коэффициентов. Сплошная кривая соответствует η_z , а штриховая – η_y . Из рисунка видно, что максимальная степень рассогласованности по обоим компонентам наблюдается на частоте $\Omega_2^{(2)} = 2.55$, являющейся частотой, на которой прохождение во вторую среду максимально. Поведение кривых на рис. 5 наглядно иллюстрирует особенности наблюдаемого явления.

Резкое рассогласование форм падающей волны и распространяющихся волн в отраженном и прошедшем полях на линии контакта двух полуполос должно, казалось бы, приводить к уменьшению энергии прошедшей волны в окрестности частоты $\Omega_2^{(2)} = 2.55$. В действительности же здесь наблюдается максимальная прозрачность стыка. Таким образом, значительное рассогласование форм смещений в падающей волне и смещений, обусловленных только распространяющимися волнами в отраженном и прошедшем полях, вызывает сильное возбуждение неоднородных волн. Как следствие, структура волнового поля значительно изменяется. Это, в свою очередь, порождает неожиданные, на первый взгляд, особенности процесса отражения – прохождения волн на границе раздела двух сред.

В связи со значительным возбуждением неоднородных волн интересно проследить за поведением механических напряжений на границе раздела. На рис. 6 представлена частотная зависимость нормального напряжения в точке $(0, 0)$, нормированного к напряжению в падающей волне σ_0 . На частоте минимума энергии отраженного поля $\Omega_2^{(2)} = 2.55$ нормированное напряжение на линии контакта достигает максимальной величины, т.е. здесь отличие между напряжением в падающей волне и напряжениям на границе раздела является наибольшим. Такое поведение напряжения на гра-

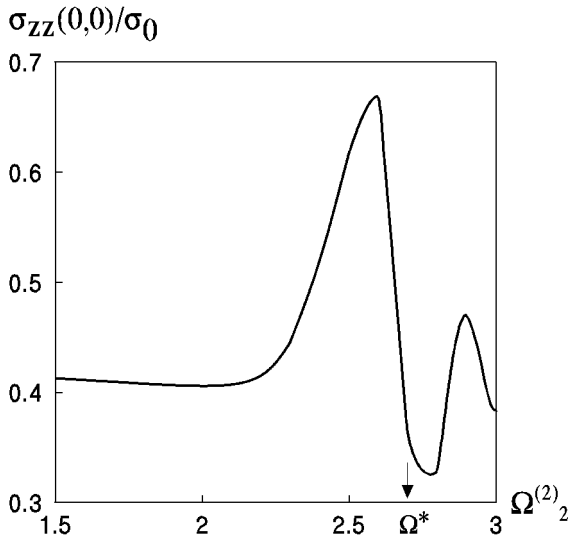


Рис. 6. Частотная зависимость нормального напряжения на срединной плоскости, нормированного на напряжение в падающей волне

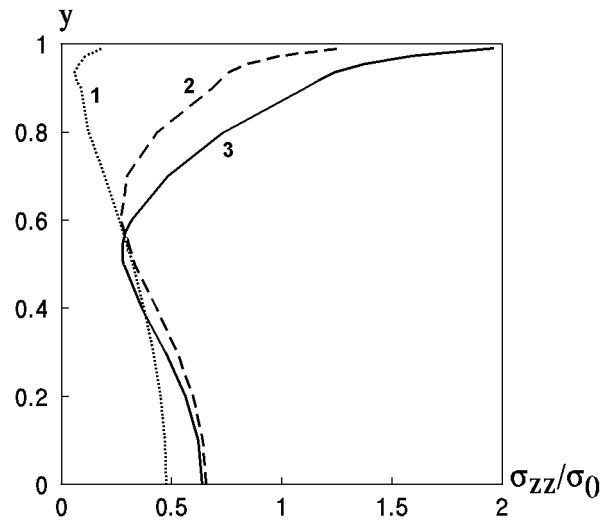


Рис. 7. Распределение нормального напряжения, нормированного на напряжение в падающей волне, по высоте волновода:
 1 - $\Omega_2^{(2)} = 2.35$, 2 - $\Omega_2^{(2)} = 2.55$, 3 - $\Omega_2^{(2)} = 2.65$

нице раздела в области частот, для которой в отраженном и прошедшем полях существует лишь по одной распространяющейся волне, можно объяснить только значительным возбуждением неоднородных волн. Отметим, что в данном случае форма частотной зависимости напряжения на линии контакта двух полуполос повторяет частотную зависимость энергии прошедшего поля. В рассматриваемой частотной области распределение напряжения в падающей волне по высоте волновода неравномерно. Поэтому рассмотрим изменение распределения модуля нормального напряжения на поверхности контакта для разных частот. Такая зависимость для нормальных напряжений представлена на рис. 7. Напряжение нормировано на σ_0 . Кривая 1 соответствует частоте $\Omega_2^{(2)} = 2.35$, кривая 2 - $\Omega_2^{(2)} = 2.55$, а кривая 3 - $\Omega_2^{(2)} = 2.65$. Из рисунка видно, что с ростом частоты существенно изменяется распределение напряжений на линии контакта. Поэтому частотная зависимость напряжений в различных точках на границе раздела будет отличаться не только количественно, но и качественно.

В области частот, для которой в обоих полуполосах существует только одна распространяющаяся волна, а распределение напряжения в падающей волне по толщине волновода неравномерно ($2.0 < \Omega_2^{(2)} < \Omega^*$), относительных максимумов напряжения на линии контакта уже два - на срединной плоскости ($z=0, y=0$) и в угловых точках

($z=0, y=\pm 1$). При существовании особенности по напряжениям в угле она для всех частот локализована в очень малой области вблизи угловой точки. Кроме того, на линии контакта существует один относительный минимум напряжений, который смещается по толщине волновода в направлении срединной плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в широком диапазоне частот изучены свойства волнового поля в составном упругом волноводе, образованном при жестком контакте двух полуполос одинаковой ширины, но с разными механическими характеристиками.

Основой построения алгоритма вычислений являлся метод суперпозиции, примененный к решению граничных задач с конечными границами при наличии в волновом поле локальных особенностей. С использованием значений неизвестных, найденных методом суперпозиции, определены коэффициенты возбуждения нормальных волн в отраженном и прошедшем полях. Это позволило оценить эффективность возбуждения неоднородных волн как в отраженном, так и в прошедшем полях. Было установлено, что значительное возбуждение неоднородных волн в области частот, где в отраженном и прошедшем полях существует только по одной распространяющейся волне, приводит к увеличению эффективности прохождения энергии во

вторую среду и росту напряжений на границе контакта. Значительное возбуждение неоднородных волн обусловлено рассогласованием формы падающей волны и смещений, образованных в отраженном и прошедшем полях распространяющимися волнами.

Полученные сведения об особенностях процесса отражения – прохождения волн на конечной границе контакта упругих тел с различными волновыми свойствами являются важными для построения алгоритмов неразрушающего акустического контроля механических соединений.

1. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // Прикладная механика. Тр. Амер. общ. инженеров-механиков. – 1971. – 38, N 2. – С. 87–96.
2. Пельц С. П., Шихман В. М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. – 1987. – 295, N 4. – С. 821–824.
3. Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О возможности метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуполосы // Теор. и прикл. мех. – Донецк: Вища школа. – 1987. – Вып. 18. – С. 3–8.
4. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. – 1988. – 52, N 6. – С. 1044–1048.
5. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. – Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1993. – 142 с.
6. Glushkov E. V., Glushkova N. V. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Amer. – 1997. – 102, N 3. – С. 1356–1360.
7. Никитин Ю. Г. Распространение упругих волн в составных волноводах. Автореф. дис. к. ф.-м. н. – Краснодар: Кубан. гос. ун-т, 1996. – 16 с.
8. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
9. Шевченко А. Ю. Термонапряженное состояние жестко-скрепленных полуполос одинаковой ширины // Прикл. мех. – 1977. – 13, N 9. – С. 66–72.
10. Городецкая Н. С. К задаче об отражении первой симметричной нормальной волны от заземленного торца полуполосы // Акуст. вісн. – 1999. – 2, N 2. – С. 26–34.
11. Shockley W., Curran D. R., Koneval D. J. Trapped energy modes in quartz crystals // J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – 41, N 4. – P. 981–993.
12. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Особенности структуры волновых полей в неоднородных волноводах // Вестник КПИ. Сер. электроакустика и звукотехника. – 1988. – N 12. – С. 3–7.