

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА В СЛОЕ ЖИДКОСТИ НА ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. М. СЕЙМОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 10.07.99 ◊ Пересмотрено 22.10.99

Рассмотрена нестационарная задача для цилиндра, взаимодействующего со слоем сжимаемой жидкости и упругим полупространством при силовых или кинематических граничных условиях. Решена система дифференциальных уравнений, описывающих волновые процессы в слое жидкости и упругом полупространстве, изгибные колебания цилиндра. Используются методы интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля, ортогональных многочленов, координатных функций, коллокаций. В области изображений Лапласа задачи сведены к системе алгебраических уравнений. Обращение выполнено численно с помощью интеграла Фурье. Получены решения гармонических и нестационарных задач о горизонтальных и угловых колебаниях жесткого цилиндра и изгибных колебаниях упругого цилиндра. Для случая горизонтальных колебаний жесткого цилиндра под действием горизонтальной силы проведен численный анализ. Выявлены зависимости реакции основания, перемещения и равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр от времени при нестационарных воздействиях. Установлена зависимость искомых функций от высоты слоя жидкости и массы цилиндра. Задачи представляют интерес при исследованиях и расчетах колебаний морских платформ под действием волновых, ледовых и сейсмических нагрузок.

Розглянуто нестационарну задачу для циліндра, що взаємодіє з шаром стисливої рідини та пружним півпростором при силових або кінематичних граничних умовах. Розв'язано систему диференціальних рівнянь, які описують хвильові процеси у шарі рідини та пружному напівпросторі, згинні коливання циліндра. Використано методи інтегральних перетворень Лапласа і Ханкеля, ортогональних поліномів, координатних функцій, колокацій. В області зображень Лапласа задачі зведено до системи алгебраїчних рівнянь. Обернення виконано чисельно за допомогою інтеграла Фур'є. Отримано рішення гармонічних і нестационарних задач для горизонтальних та кутових коливань жорсткого циліндра та згинних коливань пружного циліндра. Для випадку горизонтальних коливань жорсткого циліндра під дією горизонтальної сили проведено чисельний аналіз. Виявлено залежність реакції основи, переміщення і рівнодійної гідродинамічного тиску на циліндр від часу при нестационарних навантаженнях. Встановлено залежність шуканих функцій від висоти шару рідини та маси циліндра. Задачі становлять інтерес при дослідженнях і розрахунках коливань морських платформ під дією хвильових, льодових і сейсмічних навантажень.

Nonstationary problem for the cylinder interacting with layer of compressible liquid and elastic halfspace under dynamic or kinematic loadings is considered. The system of differential equation is solved that describes the wave processes in liquid layer and elastic halfspace, and the bending vibration of the cylinder. Method of integral transforms (Laplace on time, and Hankel on radial coordinate), method of orthogonal polynomials, method of coordinate functions, and method of collocations are used. In the domain of the Laplace images the problem is reduced to a system of algebraic equations. The Laplace transform inversion is made numerically by means of the Fourier integral. The solutions are obtained for harmonic nonstationary problems on horizontal and angular vibration of rigid cylinder, and on bending vibration elastic cylinder. Numerical analysis is made for case of horizontal vibration of rigid cylinder undergoing the action of horizontal force. There are detected the time dependences of reaction of foundation, displacement and hydrodynamic pressure on the cylinder at nonstationary loading. The dependence of desired functions from the height of liquid layer and mass of the cylinder is established. The considered problems are of interest at studying and calculation of oscillations of a gravitational offshore platforms undergoing the wave, ice, and seismic loading.

ВВЕДЕНИЕ

При формировании волнового поля в среде типа слоя сжимаемой жидкости на полубесконечном деформируемом твердом полупространстве важное значение имеет установление эффектов взаимодействия сред при нестационарных внешних нагрузках. Движение указанных сред описывается волновыми уравнениями. В полуограниченной среде от источника возбуждения, которым может быть колеблющееся под действием заданной динамической нагрузки тело, распространяются на бесконечность несущие энергию волны, что обуславливает затухание колебаний при прекращении действия нагрузки. Если таким телом является вертикально расположенный в слое жид-

кости жесткий или упругий цилиндр, опирающийся на инерционное деформируемое (упругое) полупространство, то возникает необходимость в решении в общем случае нестационарной контактной задачи для системы цилиндр – слой жидкости – упругое полупространство. При ее решении требуется установить физические закономерности изменения во времени перемещений и напряжений в цилиндре, гидродинамического давления, напряжений по контакту с основанием в зависимости от характера динамической нагрузки, инерционных и деформационных свойств цилиндра и подстилающего основания, высоты слоя жидкости.

Такие задачи представляют интерес, например, при исследованиях и расчетах колебаний морских платформ гравитационного типа под действием

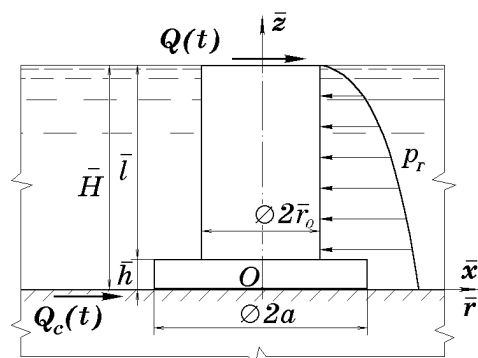


Рис. 1. Цилиндр в слое жидкости

силовых (волновых, ледовых) и кинематических (сейсмических) нагрузок.

Существующие методы решения задач о колебаниях конструкций учитывают взаимодействие с жидкостью при низкочастотных периодических нагрузках [1–3] или взаимодействие с основанием [4]. В данной статье предлагается подход, включающий исследование нестационарных процессов взаимодействия конструкции как с водной средой, так и с подстилающим деформируемым основанием.

В качестве расчетной схемы применительно к морской платформе рассматривается конструкция в виде вертикального жесткого или упругого цилиндра, защемленного в жесткой фундаментной плите кругового сечения, расположенной на границе упругого полупространства под слоем жидкости (рис. 1). Предполагается, что указанная конструкция подвергается наиболее опасным горизонтальным динамическим воздействиям.

Ниже рассматриваются конкретные задачи динамического взаимодействия конструкций с жидкой и твердой средами. Вначале будут рассмотрены относительно простые модельные задачи, позволяющие выявить основные эффекты в более сложных ситуациях.

1. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА В СЛОЕ ЖИДКОСТИ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Пусть вертикальный цилиндр, радиус которого r_0 равен радиусу фундаментной плиты a , движется горизонтально в слое жидкости высотой H по произвольному закону $U_x(t)$ (рис. 1). Требуется найти гидродинамическое давление на цилиндр. Уравнение для потенциала скорости $\Phi(r, \varphi, z, t)$ в

цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где c_0 – скорость звука в жидкости. Граничные условия имеют следующий вид:

$$z = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

(нулевое давление на поверхности жидкости),

$$z = H, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

(вертикальная скорость жидкости равна нулю),

$$r = r_0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = \frac{dU_x(t)}{dt}, \quad 0 \leq z \leq H \quad (4)$$

(условие равенства скорости цилиндра горизонтальной составляющей скорости жидкости по боковой поверхности цилиндра, направленной по оси x).

При этом справедливо разложение искомой функции по угловой координате:

$$\Phi(r, \varphi, z, t) = \Phi^*(r, z, t) \cos \varphi. \quad (5)$$

Последнее выражение подставляем в (1) и выполняем преобразование Лапласа по переменной t (при нулевых начальных условиях):

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}^*}{dr} - \frac{1}{r^2} \bar{\Phi}^* + \frac{d^2 \bar{\Phi}^*}{dz^2} - \frac{p^2}{c_0^2} \bar{\Phi}^* = 0, \quad (6)$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

Уравнение (6) решаем с помощью интегрального преобразования Ханкеля на полубесконечном интервале ($r_0 \leq r < \infty$) [4]:

$$\tilde{\Phi}(r) = \int_{r_0}^{\infty} \phi(r) C_\nu(r, \xi) r dr, \quad (7)$$

$$\phi(r) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}(\xi) C_\nu(r, \xi) \xi d\xi. \quad (8)$$

Здесь соотношения (7) и (8) выражают прямое и обратное преобразования соответственно, а ядро преобразования $C_\nu(r, \xi)$ имеет вид

$$C_\nu(r, \xi) = \frac{J_\nu(\xi r) N'_\nu(\xi r_0) - N_\nu(\xi r) J'_\nu(\xi r_0)}{\sqrt{[J'_\nu(\xi r_0)]^2 + [N'_\nu(\xi r_0)]^2}} \quad (9)$$

и обладает свойствами

$$\frac{d^2 C_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dC_\nu}{dr} + \left(\xi^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) C_\nu = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(C_\nu \frac{d\bar{\Phi}^*}{dr} - \bar{\Phi}^* \frac{dC_\nu}{dr} \right) \right] = 0. \quad (11)$$

Здесь $J_\nu(\xi r)$ и $N_\nu(\xi r_0)$ – функции Бесселя и Неймана, а штрихами обозначены производные по полному аргументу. После выполнения процедуры преобразования (7) к уравнению (6) при $\nu=1$ получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \left(\frac{d^2 \bar{\Phi}^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\Phi}^*}{dr} - \frac{1}{r^2} \bar{\Phi}^* \right) C_1(r, \xi) r dr + \frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{\Phi}^* = 0. \quad (12)$$

Производим двухкратное интегрирование соотношения (12) по частям и, учитывая свойства ядра (10) и (11), имеем

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_0^2} \right) \tilde{\Phi}^* = r_0 C_1(r_0 \xi) \frac{d\bar{\Phi}^*}{dr} \Big|_{r=r_0}, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Phi}^*(\xi, z, p) = \int_{r_0}^{\infty} \bar{\Phi}^*(r, z, p) C_1(r, \xi) r dr \quad (14)$$

является изображением по Лапласу и Ханкелю функции $\Phi^*(r, z, t)$. К граничному условию (4) применяем преобразование Лапласа и результат подставляем в уравнение (13):

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_0^2} \right) \tilde{\Phi}^* = r_0 C_1(r_0 \xi) p \bar{U}_x(p). \quad (15)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (2) и (3), имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^*(\xi, z, p) &= r_0 p \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha(H-z)}{\operatorname{ch} \alpha H} - 1 \right); \\ \alpha &= \sqrt{\xi^2 + \frac{p^2}{c_0^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя формулу обращения преобразования Ханкеля (8), получаем искомую функцию (в изображениях Лапласа) для потенциала скорости жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^*(r, z, p) &= r_0 p \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha(H-z)}{\operatorname{ch} \alpha H} - 1 \right) C_1(r, \xi) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что гидродинамическое давление в жидкости определяется зависимостями

$$\begin{aligned} p_H(r, \varphi, z, t) &= -\rho_H \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ p_H^*(r, z, t) &= -\rho_H \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}, \end{aligned} \quad (18)$$

где ρ_H – плотность жидкости, получаем следующее выражение для его определения (в изображениях Лапласа):

$$\begin{aligned} \bar{p}_H^*(r, z, p) &= r_0 \rho_H p^2 \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha(H-z)}{\operatorname{ch} \alpha H} - 1 \right] C_1(r, \xi) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что $\bar{p}_H(r, \varphi, z, p) = \bar{p}_H^*(r, z, p) \cos \varphi$. Равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр в проекции на ось x определится интегралом

$$\bar{Q}_H(r_0, H, p) = r_0 \int_0^H \int_0^{2\pi} \bar{p}_H^*(r_0, z, p) \cos^2 \varphi d\varphi dz. \quad (20)$$

Подставляя соотношение (19) в (20) и выполняя интегрирование, имеем

$$\begin{aligned} \bar{Q}_H(r_0, H, p) &= \pi r_0 \rho_H p^2 \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left(\frac{\operatorname{th} H\alpha}{\alpha} - H \right) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее найдем момент гидродинамического давления на цилиндр относительно оси, расположенной у нижнего конца цилиндра. При интегрировании по вертикальной координате введем переменную $z' = H - z$. Тогда искомый момент определится интегралом

$$\begin{aligned} \bar{M}_H(r_0, p) &= r_0 \int_0^H \int_0^{2\pi} \bar{p}_H^*(r_0, z', p) \times \\ &\times z' \cos^2 \varphi d\varphi dz'. \end{aligned} \quad (22)$$

После подстановки соотношения (19) в формулу (22) и интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \bar{M}_H(r_0, p) &= -\pi r_0 \rho_H p^2 \bar{U}_x(p) \int_0^{\infty} \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{H\alpha \operatorname{sh} H\alpha + 1}{\operatorname{ch} H\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{2} H^2 \right] \xi d\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Формулы (21) и (23) необходимы для решения задачи о взаимодействии цилиндра с основанием.

2. КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ И С УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Пусть жесткий цилиндр зашпечлен нижним концом в жесткой фундаментной плите радиуса a и высоты h (см. рис. 1), расположенной под слоем жидкости на границе с упругим полупространством, и под действием заданной горизонтальной нагрузки совершает только горизонтальные колебания (угловые и связанные горизонтально-вращательные колебания могут быть рассмотрены отдельно). Неизвестными в данной задаче являются горизонтальное перемещение цилиндра вместе с фундаментом $U_x(t)$, гидродинамическое давление на боковую поверхность цилиндра и фундамента $p_H(r_0, \varphi, z, t)$, однонаправленные касательные напряжения по контакту круглой фундаментной плиты с основанием $\tau_x(r, t)$.

При решении задачи сделаем такие допущения:

- 1) будем считать, что $h \ll H$ ($H \approx l$) и влияние на суммарное гидродинамическое давление отличия диаметров a и r_0 мало;
- 2) взаимодействие слоя жидкости с упругим полупространством происходит через фундаментную плиту, несущую цилиндр, а вертикальные составляющие скорости жидкости на границе слоя жидкости и упругого полупространства малы.

Ограничение, накладываемое последним допущением, в дальнейшем может быть устранено путем учета этой составляющей скорости жидкости.

Рассматриваемая конструкция (цилиндр–фундамент) взаимодействует с двумя средами: слоем жидкости и упругим полупространством. Поэтому необходимо решать совместно уравнения для слоя жидкости (1), упругого полупространства [6] и фундамента с цилиндром. Последнее имеет вид

$$M \frac{d^2 U_x(t)}{dt^2} = Q(t) - Q_H(r_0, H, t) - Q_R(t), \quad (24)$$

где $U_x(t)$ – горизонтальное перемещение системы цилиндр–фундамент; параметр $Q(t)$ является заданной горизонтальной силой (например, равнодействующей волнового давления или ледовой динамической нагрузки). В случае сейсмического горизонтального воздействия

$$Q(t) = -M g_c f_x(t), \quad (25)$$

где M – масса цилиндра вместе с фундаментом; $f_x(t)$ – нормированное горизонтальное ускорение

площадки (акселерограмма) при отсутствии сооружения; g_c – характерное ускорение акселерограммы. Параметр $Q_H(r_0, H, t)$ – равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр (21) (записана в изображениях Лапласа); $Q_R(t)$ – равнодействующая касательных напряжений $\tau_x(r, t)$ по контакту фундамента с основанием.

Уравнение (24) необходимо решать совместно с уравнениями движения для упругого полупространства. Решение подобной задачи, но при отсутствии гидродинамической нагрузки $Q_H(r_0, H, t)$, получено в работе [6]. Ниже приведем решение с учетом этой нагрузки. Контактные напряжения $\tau_x(r, t)$ ищем в виде ряда

$$\tau_x(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(t) \frac{P_{2k}(\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (26)$$

где $B_{2k}(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени, $P_{2k}(\sqrt{1-r^2})$ – преобразованные полиномы Лежандра. Здесь r – безразмерная координата, т.е. истинная координата, отнесенная к радиусу фундаментной плиты a .

В случае представления (26) равнодействующая однонаправленных касательных напряжений определяется через первый коэффициент разложения:

$$Q_R(t) = 2\pi a^2 B_0(t). \quad (27)$$

Горизонтальные перемещения в направлении оси x границы упругого полупространства от нагрузки (26) находятся (в изображениях Лапласа) из выражения

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{a}{2\mu} \int_0^{\infty} \left[\frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + s^2}}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] \times \quad (28)$$

$$\times \bar{\tau}_x(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi,$$

где соотношение

$$\bar{\tau}_x(\xi, s) = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} J_{2k+1/2}(\xi) \quad (29)$$

представляет собой преобразование Лапласа и Ханкеля нулевого порядка функции (26); $J_0(r\xi)$ и $J_{2k+1/2}(\xi)$ – функции Бесселя нулевого и полуцелого порядков;

$$F(\xi, s) = (2\xi + s^2) - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2};$$

$s = ap/c_2$ – безразмерный параметр преобразования Лапласа; $\beta = c_2/c_1$; c_2 и c_1 – скорости поперечной и продольной волн в упругом полупространстве; μ – постоянная Ляме в нем.

С целью удовлетворения контактному условию

$$U_x(t) = u_x(z, 0, t), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (30)$$

выражение (28) разложим в ряд по многочленам $P_{2n}(\sqrt{1-r^2})$, используя представление

$$J_0(r\xi) = \sqrt{2/\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \times \\ \times J_{2k+1/2}(\xi) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}). \quad (31)$$

В результате имеем

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \times \\ \times b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}), \quad (32)$$

где

$$b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = \\ = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n+1/2)(2n+1/2)}{2\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)} \times \\ \times \int_0^{\infty} \left[\frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + s^2}}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] \times \\ \times J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+1/2}(\xi) d\xi. \quad (33)$$

Переходим к решению уравнения (24). Применим к нему преобразование Лапласа по времени, введя безразмерное время $t = c_2 \bar{t}/a$ ($\bar{t}$ – время в секундах). С учетом выражения (27) имеем

$$m_0 \frac{\mu}{a} s^2 \bar{U}_x(s) + \frac{\bar{Q}_H(r_0, H, s)}{2\pi a^2} + \bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2}, \quad (34)$$

где m_0 – приведенная масса цилиндра вместе с фундаментом:

$$m_0 = \frac{M}{2\pi a^3 \rho_0}; \quad (35)$$

ρ_0 – плотность материала основания. Выражение для равнодействующей гидродинамического давления (21) в безразмерных переменных примет вид

$$\bar{Q}_H(r_0, H, s) = \pi \mu a r_0^2 s^2 \frac{\rho_H}{\rho_0} \bar{U}_x(s) I_1(r_0, H, s), \quad (36)$$

где

$$I_1(r_0, H, s) = -H \int_0^{\infty} \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left(\frac{\text{th } H\alpha}{H\alpha} - 1 \right) \xi d\xi; \quad (37)$$

$\alpha = \sqrt{\xi^2 + \beta_0^2 s^2}$; $\beta_0 = c_2/c_0$; $r_0 = \bar{r}_0/a$; $H = \bar{H}/a$. После подстановки выражения (36) в уравнение (34) получаем

$$[m_0 + \bar{m}_H(s)] s^2 \frac{\mu}{a} \bar{U}_x(s) + \bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2}, \quad (38)$$

где слагаемое

$$\bar{m}_H(s) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\rho_H}{\rho_0} I_1(r_0, H, s) \quad (39)$$

может рассматриваться как приведенная присоединенная масса жидкости при колебаниях цилиндра в слое жидкости. Удовлетворяя контактному условию (30), подставляем выражение (32) в уравнение (38)

$$[m_0 + \bar{m}_H(s)] s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \times \\ \times b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}) + \\ + \bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2}. \quad (40)$$

Приравниваем в этом уравнении коэффициенты при полиномах Лежандра одинаковых порядков и, учитывая, что $P_0(\sqrt{1-r^2}) = 1$, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных $\bar{B}_{2k}(s)$ (в долях $\bar{Q}(s)/2\pi a^2$):

$$[1 + (m_0 + \bar{m}_H) b_{1/2, 1/2}(s)] \bar{B}_0(s) + \\ + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 1; \quad (41) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = 0 \\ n = 1, 2, \dots$$

Решив эту систему, перемещение $\bar{U}_x(s)$ из выражения (38) находим:

$$\bar{U}_x(s) = \frac{a}{\mu} \frac{\bar{Q}(s)/2\pi a^2}{(m_0 + \bar{m}_H(s)) s^2} [1 - \bar{B}_0(s)]. \quad (42)$$

Если при решении рассматриваемой задачи ограничиться определением только равнодействующей (27), то в разложении (26) достаточно удерживать первый член ряда ($k=0$). Тогда из первого уравнения (41) находим в явном виде коэффициент

$$\bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)/2\pi a^2}{1 + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}, \quad (43)$$

а перемещение при подстановке соотношения (43) в (42) записываем так:

$$\bar{U}_x(s) = \frac{a}{\mu} \frac{b_{1/2, 1/2}(s) \bar{Q}(s)/2\pi a^2}{1 + (m_0 + \bar{m}_H(s)) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}. \quad (44)$$

Полученное выражение для перемещения подставляем в соотношение (36) и получаем в явном виде формулу для равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр:

$$\bar{Q}_H(r_0, H, s) = \frac{s^2 \bar{m}_H(s) b_{1/2, 1/2}(s) \bar{Q}(s)}{1 + (m_0 + \bar{m}_H(s)) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}. \quad (45)$$

Гидродинамическое давление на цилиндр (19) в безразмерных переменных определяется выражением

$$\bar{p}_H^*(r_0, z, s) = -r_0 \frac{\rho_H}{\rho_0} \frac{\mu}{\alpha} s^2 \bar{U}_x(s) \times \int_0^\infty \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha(H-z)}{\operatorname{ch} \alpha H} - 1 \right] \xi d\xi. \quad (46)$$

Здесь $H = \bar{H}/a$, $z = \bar{z}/a$ – безразмерные величины. При подстановке (44) в (46) имеем

$$\bar{p}_H^*(r_0, z, s) = -\frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a} r_0 \frac{\rho_H}{\rho_0} \times \frac{s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}{1 + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)} \times \int_0^\infty \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha(H-z)}{\operatorname{ch} \alpha H} - 1 \right] \xi d\xi. \quad (47)$$

Таким образом, получены (в изображениях Лапласа по времени) все искомые функции, определяющие решение задачи: равнодействующая контактных напряжений (43), горизонтальное перемещение цилиндра (44), равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр (45), распределение гидродинамического давления по высоте цилиндра (47).

Обратное преобразование Лапласа выполняем численно, с помощью интегралов Фурье [7, 8], полагая $s = i\zeta$ и выполняя интегрирование по переменной ζ , которая будет безразмерной частотой гармонических колебаний ($\zeta = a\omega/c_2$). Если $\bar{f}(s)$ – изображение Лапласа функции $f(t)$, то при $s = i\zeta$

$$f(t) = \pm \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left\{ \bar{f}(i\zeta) \frac{\cos t\zeta}{\sin t\zeta} \right\} d\zeta. \quad (48)$$

При подстановке $s = i\zeta$ в формулы (43)–(47) искомые функции становятся комплексными, так как комплексным будет коэффициент $b_{1/2, 1/2}(i\zeta)$ из (33).

3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ И УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Рассмотрим колебания цилиндра в слое жидкости в случае, когда жесткость на изгиб является

конечной и движение его можно описать дифференциальным уравнением изгиба стержня кругового сечения. Полагаем, что $U_x(r, t)$ – перемещение стержня, состоящее из общего горизонтального смещения цилиндра с фундаментом и прогиба. Уравнения для потенциала скорости жидкости (1) и движения фундамента (24) следует дополнить в данном случае уравнением колебаний цилиндра (стержня)

$$EJ \frac{\partial^4 U_x}{\partial z^4} + \pi r_0^2 \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = -\pi r_0 p_H^*(r_0, z, t), \quad (49)$$

где $\pi r_0 \rho_H^*(r_0, z, t)$ – гидродинамическая нагрузка на цилиндр (в проекции на ось x), определяемая через потенциал скорости по формуле (18); EJ – изгибная жесткость стержня. При решении уравнения (1) граничное условие (4) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = \frac{\partial U_x(z, t)}{\partial t} \quad (r = r_0, 0 \leq z \leq H). \quad (50)$$

Тогда, после применения к уравнению (1) преобразования Лапласа и Ханкеля (7), а к уравнению (49) – преобразования Лапласа, с учетом условия (50) получим следующую систему дифференциальных уравнений в безразмерных переменных:

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \alpha^2 \tilde{\Phi}^*(\xi, z, s) = r_0 l^2 c_2 C_1(r_0 \xi) s \bar{U}_x(z, s), \quad (51)$$

$$\frac{d^4 \bar{U}_x}{dz^4} + k_1^2 \frac{\rho}{\rho_0} s^2 \bar{U}_x(z, s) = \frac{k_1^2}{r_0} \frac{\rho_H}{\rho_0} \frac{s}{c_2} \tilde{\Phi}^*(r_0, z, s), \quad (52)$$

где

$$k_1^2 = \pi r_0^2 \frac{\mu l^4}{EJ}; \quad \alpha^2 = \frac{l^2}{a^2} (\xi^2 + \beta_0^2 s^2); \quad (53)$$

ρ – плотность материала сплошного цилиндра, $\bar{z}$ – размерная координата, $z = \bar{z}/l$; l – длина стержня (полагаем, что $l \approx \bar{H}$ – высота слоя жидкости). При решении уравнения (51) необходимо удовлетворить граничным условиям (2) и (3), а при решении (52) – условиям на концах стержня. Например, если к верхнему концу стержня приложена горизонтальная сила $Q(t)$, то граничные условия будут такими:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_x(z, t)}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 U_x(z, t)}{\partial z^3} = \frac{l^3}{EJ} Q(t), \end{cases} \quad z = 0, \quad (54)$$

$$(55)$$

$$\begin{cases} U_x(1, t) = U_\Phi(t), \\ \frac{\partial U_x(z, t)}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad z = 1. \quad (56)$$

Здесь $U_\Phi(t)$ – перемещение фундамента.

Решение уравнений (51) и (52) проведем с помощью использования так называемых координатных функций [2] для представления неизвестной функции

$$U_x(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(t) w_p(z), \quad (57)$$

где

$$w_p(z) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ (z-1)^2 z^{p-1}, & p = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (58)$$

$a_p(t)$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени. Координатные функции (57) удовлетворяют условиям (55) жесткой заделки в фундаментную плиту. Коэффициент $a_0(t) = U_\Phi(t)$ характеризует общее горизонтальное смещение стержня вместе с фундаментом. Из условий (54) получаем два уравнения, связывающие некоторые коэффициенты в разложении (56):

$$a_1(t) - 2a_2(t) + a_3(t) = 0, \quad (59)$$

$$a_2(t) - 2a_3(t) + a_4(t) = \frac{l^3}{6EJ} Q(t). \quad (60)$$

Кроме того, функция $U_x(z, t)$ должна удовлетворять уравнению (52).

Сначала решим уравнение (51). При подстановке выражения (56) в (51) последнее уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \alpha^2 \tilde{\Phi}^*(\xi, z, s) = \\ = r_0 l^2 c_2 C_1(r_0 \xi) s \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) w_p(z). \end{aligned} \quad (61)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью, содержащей степенную функцию (57), может быть решено методом вариации постоянных. Опустив промежуточные выкладки, запишем окончательный результат решения уравнения (60), удовлетворяющий граничным условиям (2) и (3):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^*(\xi, z, s) = -r_0 c_2 l^2 s C_1(r_0 \xi) \times \\ \times \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) F_p^*(\xi, z, s), \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} F_p^*(\xi, z, s) = \frac{1}{\alpha^2} [F_p(\xi, z, s) - F_p(\xi, 0, s) \times \\ \times \frac{\operatorname{ch} \alpha(1-z)}{\operatorname{ch} \alpha} - F_p'(\xi, 1, s) \frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\alpha \operatorname{ch} \alpha}]; \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} F_p(\xi, z, s) = \sum_{k=0}^{[(p+1)/2]} \frac{1}{\alpha^{2k}} \frac{d^{2k} w_p(z)}{dz^{2k}}; \\ F_p'(\xi, z, s) = \sum_{k=0}^{[(p+1)/2]} \frac{1}{\alpha^{2k}} \frac{d^{2k+1} w_p(z)}{dz^{2k+1}}. \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Заметим, что при $\alpha=0$ функция (62) имеет неопределенность вида $0/0$. Раскрывая ее, получаем

$$F_0^*(\xi, z, s)|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-z)^2, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} F_p^*(\xi, z, s)|_{\alpha=0} = \frac{2z}{p(p+1)(p+2)} - \\ - \frac{z^{p+1}}{p(p+1)} + \frac{2z^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \\ - \frac{z^{p+3}}{(p+2)(p+3)}, \quad p > 0. \end{aligned} \quad (66)$$

К функции (61) применяем обратное преобразование Ханкеля (8)

$$\bar{\Phi}^*(r, z, s) = -r_0 c_2 \frac{l^2}{\alpha^2} s \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) \bar{\Phi}_p(r, z, s), \quad (67)$$

где

$$\bar{\Phi}_p(r, z, s) = \int_0^{\infty} C_1(r_0 \xi) F_p^*(\xi, z, s) C_1(r, \xi) \xi d\xi. \quad (68)$$

Полученное выражение для потенциала скорости жидкости (66) при $r=r_0$ подставляем в уравнение (52):

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{U}_x}{dz^4} + k_1^2 \frac{\rho}{\rho_0} s^2 \bar{U}_x(z, s) = \\ = k_1^2 \frac{l^2}{a^2} \frac{\rho_H}{\rho_0} s^2 \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) \bar{\Phi}^*(r_0, z, s), \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\bar{\Phi}^*(r_0, z, s) = \int_0^{\infty} C_1^2(r_0 \xi) F_p^*(\xi, z, s) \xi d\xi. \quad (70)$$

Представление (56) для функции $U_x(r, t)$ и ее производную четвертого порядка подставляем в уравнение (68). В результате последнее запишем в следующем виде:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p(s) \bar{W}_p(z, s) + \bar{a}_0(s) \bar{W}_0(z, s) = 0, \quad (71)$$

$$0 \leq z \leq 1,$$

где

$$\bar{W}_p(z, s) = w_p^{(4)}(z) + k_1^2 s^2 \bar{\Phi}_p^*(r_0, z, s); \quad (72)$$

$$\bar{\Phi}_p^*(r_0, z, s) = \frac{\rho}{\rho_0} w_p(z) - \frac{l^2}{a^2} \frac{\rho}{\rho_0} \bar{\Phi}_p(r_0, z, s); \quad (73)$$

$$w_p^{(4)}(z) = (p-1)(p-2) \times$$

$$\times [p(p+1)z^{p-3} -$$

$$- 2p(p-3)z^{p-4} +$$

$$+ (p-3)(p-4)z^{p-5}].$$

Уравнение колебаний цилиндра (70) необходимо связать с колебаниями фундамента на упругом полупространстве. Это осуществляется через коэффициент $\bar{a}_0(s)$. Так как $\bar{a}_0(s) = \bar{U}_x(s) = \bar{u}_x(t, 0, s)$ (см. (30)), то по аналогии с соотношением (34) можно записать выражение для искомого коэффициента

$$\bar{a}_0(s) = \frac{a}{\mu m_1 s^2} \left[\frac{\bar{Q}_1(s)}{2\pi a^2} - \bar{B}_0(s) \right], \quad (74)$$

где перерезывающая сила в заделке равна

$$\bar{Q}_1(s) = \frac{6EJ}{l^3} \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p(s); \quad (75)$$

$m_1 = M_F / 2\pi a^3 \rho_0$ – приведенная масса фундамента. С учетом соотношений (30) и (74) зависимость (73) принимает вид

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{a}{\mu m_1 s^2} \left[\sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p^* - \bar{B}_0(s) \right], \quad (76)$$

где

$$\bar{a}_p^*(s) = \frac{3EJ}{\pi a^2 l^3} \bar{a}_p(s). \quad (77)$$

В формулу (75) подставляем разложение (32) и приравниваем коэффициенты при многочленах Лежандра одинаковых порядков. Получаем систему

алгебраических уравнений, учитывающую взаимодействие фундамента и цилиндра с основанием:

$$- \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p^*(s) + \bar{B}_0(s) + m_1 s^2 \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0, \quad (78)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = 0,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Далее следует исключить коэффициент $\bar{a}_0(s)$ из уравнения (70), выразив его через разложение (32). В результате имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p^*(s) \bar{W}_p(z, s) +$$

$$+ 3r_0^2 \frac{l}{a} s^2 \bar{\Phi}_0^*(r_0, z, s) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0,$$

$$0 \leq z \leq 1.$$

Последнее уравнение должно удовлетворяться в любой точке указанного интервала. Если воспользоваться методом коллокаций, удовлетворяя этому уравнению в отдельных точках $z_i = i\Delta z$ ($i=0, 1, 2, \dots$; Δz – принятый шаг разбиения интервала), то уравнение (78) можно заменить системой алгебраических уравнений, записанных для каждого z_i . Таким образом, полная система алгебраических уравнений (в области изображений Лапласа), разрешающая задачу, будет включать уравнения (58) и (59) для граничных условий на верхнем конце стержня; систему уравнений, получаемых из уравнения (78) для ряда значений z_i , удовлетворяющего дифференциальному уравнению изгиба стержня (52); систему уравнений (77), удовлетворяющую условию контакта фундамента, несущего цилиндр, с упругим полупространством. Искомая система уравнений бу-

дет такой:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1^*(s) - 2\bar{a}_2^*(s) + \bar{a}_3^*(s) &= 0, \\ \bar{a}_2^*(s) - 2\bar{a}_3^*(s) + \bar{a}_4^*(s) &= 1, \\ \sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p^*(s) \bar{W}_p(z_i, s) + 3r_0^2 \frac{l}{a} s^2 \bar{\Phi}_0^*(r_0, z_i, s) \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0, \\ &\quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ - \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p^*(s) + \bar{B}_0(s) + m_1 s^2 \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) &= 0 \\ &\quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (80)$$

(свободный член дан в долях $\bar{Q}(s)/2\pi a^2$). Порядок системы уравнений (79) определяется количеством точек коллокации (шагом Δz) для уравнения (78) и количеством членов ряда в разложении для контактных напряжений (26). Соответствие между числом неизвестных и порядком системы (79) регулируется количеством координатных функций $w_p(z)$ (57) ($p = 1, 2, \dots$), удерживаемых в разложении (56). Например, если принять $\Delta z = 0,2$ (количество точек коллокаций 6: $i = 0, 1, 2, \dots, 5$), то в разложении (56), кроме коэффициента $\bar{a}_0(s)$, который при решении контактной задачи выражается через коэффициент $\bar{B}_0(s)$, необходимо удержать 8 членов ряда ($p = 1, 2, \dots, 8$).

После решения указанной, укороченной системы 9 порядка коэффициент $\bar{a}_0(s)$ (общее смещение) находится по формуле

$$\bar{a}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a \mu} \bar{B}_0(s) b_{1/2, 1/2}(s). \quad (81)$$

Прогиб стержня на верхнем конце ($z=0$) определяется коэффициентом $\bar{a}_1(s)$. Суммарное перемещение в произвольной точке стержня (общее смещение плюс прогиб) определится выражением

$$\begin{aligned}\bar{U}_x(z, s) &= \frac{l^3 \bar{Q}(s)}{6EJ} \times \\ &\times \left[3 \frac{r_0^2}{k_1^2} \frac{l}{a} \bar{B}_0(s) + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p^*(s) w_p(z) \right].\end{aligned}\quad (82)$$

При найденных значениях $\bar{U}_x(z, s)$ гидродинамическое давление на цилиндр определяется из уравнения (49) выражением

$$\begin{aligned}\bar{p}_H^*(r_0, z, s) &= -\frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} \times \\ &\times \left\{ r_0 \frac{\rho}{\rho_0} s^2 \left[\bar{B}_0(s) b_{1/2, 1/2}(s) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_1^2}{3r_0^2} \frac{a}{l} (\bar{a}_1^*(s) w_1(z) + \alpha_2^*(s) w_2(z)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{3l} \sum_{p=3}^8 \bar{a}_p^*(s) \left[w_p^{''''}(z) + \frac{k_1^2}{r_0} \frac{a}{l} \frac{\rho}{\rho_0} s^2 w_p(z) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (83)$$

Таким образом, получены (в изображении Лапласа) необходимые соотношения, разрешающие поставленную задачу: система алгебраических уравнений (79); представление для перемещений (прогибов) цилиндра (56), дифференцирование которого позволяет найти углы поворота сечений цилиндра, изгибающие моменты и перерезывающие силы в нем; общее смещение цилиндра вместе с фундаментом (80); суммарное давление по высоте цилиндра (соотношение (82) в проекции на ось x). Возврат к оригиналам, производим с помощью интеграла Фурье (48).

4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для численной реализации методики решения контактной задачи для жесткого цилиндра, взаимодействующего со слоем жидкости и с упругим полупространством при горизонтальных колебаниях, была разработана программа и выполнены расчеты на ПЭВМ (программирование и вычисления выполнены Н. П. Ермоленко). В качестве неизменных параметров приняты радиус фундаментальной плиты, равный радиусу цилиндра: $a = \bar{r}_0$ ($r_0 = 1$); высота цилиндра равняется высоте слоя жидкости $l = \bar{H}$; отношение плотности материала цилиндра (бетон) к плотности материала основания (мягкий грунт) $\rho_H/\rho_0 = 1.4$; отношение плотности воды к плотности материала основания $\rho/\rho_0 = 0.55$; отношение скорости поперечной волны в основании к скорости звука в воде $\beta_0 = c_2/c_0 = 0.143$; коэффициент Пуассона материала основания $\nu_0 = 0.3$.

Численный анализ выполнен при вариациях таких независимых параметров: m_0 – приведенная масса цилиндра, $\bar{H}$ – высота слоя жидкости, $\bar{r}_0 = a$ – радиус цилиндра. Вычисления проведены в предположении воздействия горизонтальной вне-

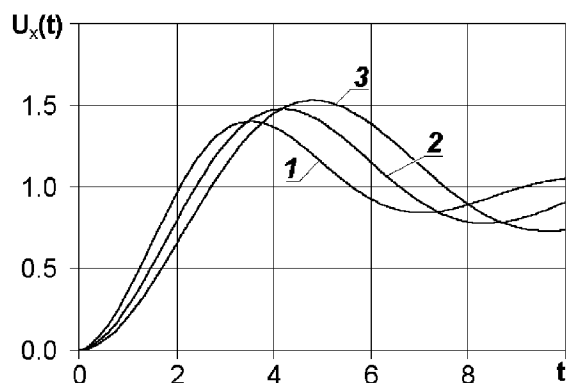


Рис. 2. Горизонтальные перемещения цилиндра при вариациях параметра массы цилиндра m_0 ($a=8$ м, $H=4$):

1 – $m_0=0$; 2 – $m_0=0.4$; 3 – $m_0=0.8$

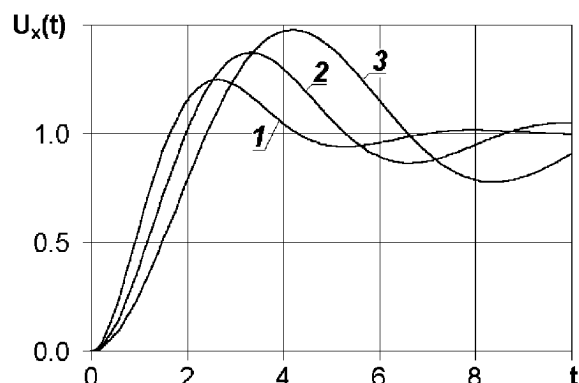


Рис. 4. Горизонтальные перемещения цилиндра при вариациях высоты слоя жидкости H ($m_0=0.4$, $a=8$ м):

1 – $H=0$; 2 – $H=2$; 3 – $H=4$

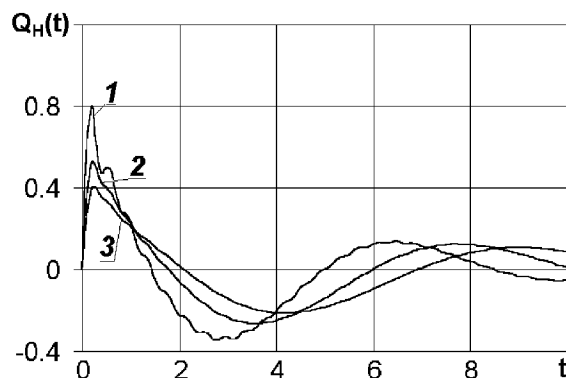


Рис. 3. Равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр при вариациях параметра массы цилиндра m_0 ($a=8$ м, $H=4$):

1 – $m_0=0$; 2 – $m_0=0.4$; 3 – $m_0=0.8$

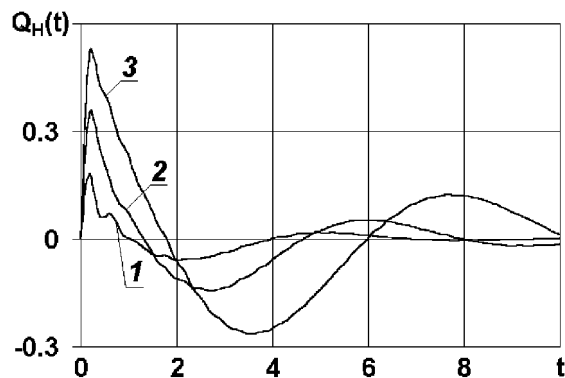


Рис. 5. Равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр при вариациях высоты слоя жидкости H ($m_0=0.4$, $a=8$ м):

1 – $H=0$; 2 – $H=2$; 3 – $H=4$

запно приложенной силы $Q(t)=QH(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Результаты расчета колебаний представлены на рис. 2–7. На рис. 2 показаны графики изменения во времени горизонтальных перемещений цилиндра (в долях статического значения перемещения $Qb_{1/2,1/2}(0)/2\pi\bar{r}_0\mu$). Кривая 1 характеризует движение невесомого цилиндра с присоединенной массой жидкости. При увеличении собственной массы цилиндра (кривые 2 и 3) максимальные перемещения растут. Этот эффект обусловлен характером внешней нагрузки. Постоянная сила, внезапно приложенная к телу, возбуждает инерционные силы, пропорциональные массе тела и приводящие к увеличению его перемещения. Обратный эффект имеет место при действии кратковременной нагрузки, например, в виде дельта-функции.

В этом случае увеличение массы тела вызывает уменьшение перемещения. Осцилляции происходят относительно статического значения и в пределе перемещения равны ему. Закономерности изменения во времени равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр (в долях Q) видны на рис. 3. Давление жидкости является знакопеременным, затухающим во времени, что обусловлено излучением на бесконечность энергии в основании и слое жидкости. С увеличением массы цилиндра m_0 амплитуды колебаний убывают.

Влияние высоты слоя жидкости на перемещения цилиндра характеризует рис. 4. С увеличением высоты слоя жидкости возрастает ее присоединенная масса и, соответственно, увеличиваются максимальные перемещения. Графики для равнодействующей гидродинамического давления на

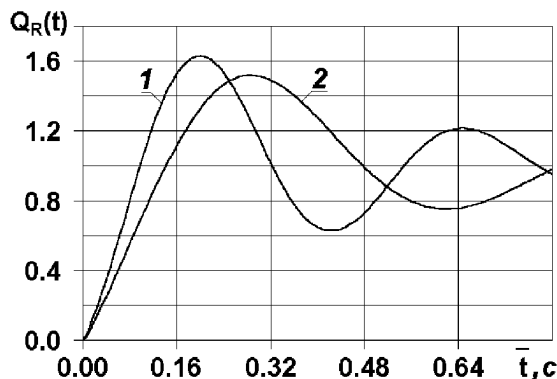


Рис. 6. Равнодействующая касательных напряжений по контакту с основанием при вариациях радиуса цилиндра $\bar{r}_0$ ($m_0=0.4$, $\bar{H}=32$ м):
1 – $\bar{r}_0 = 4$ м; 2 – $\bar{r}_0 = 8$ м

цилиндр представлены на рис. 5. При увеличении толщины слоя жидкости соответственно растет суммарное гидродинамическое давление на цилиндр.

Представляет также интерес установление зависимости расчетных функций от радиуса цилиндра. На рис. 6 приведены графики для равнодействующей касательных напряжений по контакту с основанием (в долях Q). При увеличении радиуса цилиндра наблюдается снижение максимальных амплитуд равнодействующей контактных напряжений, что обусловлено уменьшением ускорения цилиндра и, соответственно, – инерционных сил. Аналогичные закономерности проявляются и для равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр (рис. 7). Уменьшение амплитуд колебаний гидродинамического давления здесь связано с уменьшением скорости движения цилиндра при увеличении его радиуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применительно к вопросам расчета морской платформы гравитационного типа получено решение пространственной динамической контактной задачи для жесткого цилиндра, взаимодействующего со слоем сжимаемой жидкости и упругим полупространством при горизонтальных колебаниях. Выполнен численный анализ горизонтальных колебаний цилиндра при нестационарных нагрузках. Установлены закономерности изменения во времени перемещений и гидродинамического давления на цилиндр. Проведен анализ искомых функций при вариациях независимых параметров: массы цилиндра, высоты слоя жидкости и радиу-

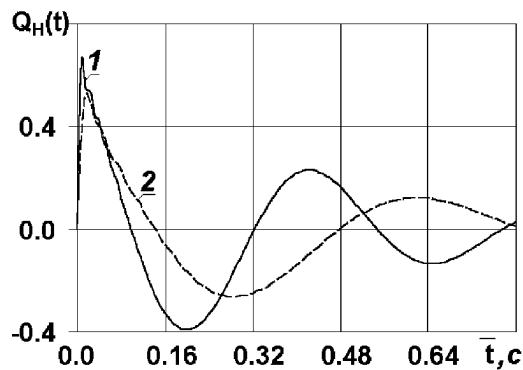


Рис. 7. Равнодействующая гидродинамического давления при вариациях радиуса цилиндра $\bar{r}_0$ ($m_0=0.4$, $\bar{H}=32$ м):
1 – $\bar{r}_0 = 4$ м; 2 – $\bar{r}_0 = 8$ м

са цилиндра. Показано, что эффекты взаимодействия цилиндра с упругим полупространством и слоем жидкости играют существенную роль при расчетах конструкций (морских гравитационных платформ) на нестационарные воздействия.

Разработана методика решения задачи в случае учета изгибных колебаний цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор благодарит академика НАН Украины В. Т. Гринченко за внимание к работе, ценные замечания и советы, которые были даны при подготовке статьи.

1. Шейнин И. С. Колебания конструкций гидросооружений в жидкости. – Л.: Энергия, 1967. – 314 с.
2. Шульман С. Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. – М.: Энергия, 1976. – 336 с.
3. Junger M., Feit D. Sound, structures and their interaction. – MIT: Cambridge, 1972. – 448 p.
4. Жиленко А. Г., Капустянский С. В. Взаимодействие сейсмических волн с морской стационарной платформой в шельфовой зоне // Сейсмостойкое строит. – 1998. – N 6. – С. 5–6.
5. Дыхта В. В. Метод интегральных преобразований в волновых задачах гидроакустики. – К.: Наук. думка, 1981. – 286 с.
6. Сеймов В. М., Ерможенко Н. П., Зайцева Е. А. Неосесимметричные периодические и нестационарные колебания круглого штампа на упругом полупространстве // Прикл. мех. – 1997. – 33, N 5. – С. 41–48.
7. Silverberg M. An efficient method for numerical Laplace transform inversion based on error control // IEEE Int. Conv. Rec. – 1967. – 15, N 5. – P. 117–120.
8. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. – К.: Наук. думка, 1976. – 284 с.