

УДК 539.3:534.2

КОЛЕБАНИЯ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ У СВОБОДНОГО КРАЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Г. Р. ГУЛГАЗАРЯН, Л. Г. ГУЛГАЗАРЯН

Институт механики НАН Армении, Ереван

Получено 8.06.98 ◊ Пересмотрено 6.12.99

Изучены некоторые особенности волновых процессов в ограниченных тонких цилиндрических оболочках. Исследован вопрос о существовании особых форм колебаний с локализацией возмущений у свободного края полубесконечной незамкнутой цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей. Вдоль граничных образующих задавались условия шарнирного опирания. Исследование проведено для тонкой упругой изотропной оболочки, для которой жесткость на изгиб равна нулю (безмоментная оболочка). Изложен метод построения решения соответствующей граничной задачи. Конкретные вычисления выполнены для оболочек с направляющей в виде параболы с различной величиной кривизны. Установлены границы изменения параметров оболочек, при которых существуют собственные колебания с локализацией движения у края в собственных формах и приведены значения соответствующих собственных частот.

Вивчено деякі особливості хвильових процесів в обмежених тонких циліндричних оболонках. Досліджено питання про існування особливих форм коливань з локалізацією збурень біля вільного краю напівнескінченної незамкнутої циліндричної оболонки з довільною гладкою напрямницею. Вдоль граничних твірниць задавались умови шарнирного спираяння. Дослідження проведено для тонкої пружної ізотропної оболонки, для якої жорсткість на згин дорівнює нулеві (безмоментна оболонка). Викладено метод побудови розв'язку відповідної граничної задачі. Конкретні обчислення виконані для оболонок з напрямницею в вигляді параболи з різною величиною кривини. Встановлено границі зміни параметрів оболонок, при яких існують власні коливання з локалізацією руху біля краю в власних формах та наведені значення відповідних власних частот.

Some specific features of the wave process in bounded thin cylindrical shells are considered. The problem of existence of the peculiar forms of vibration with localization of disturbances near free edge of semi-infinite open cylindrical shell with arbitrary smooth directing curve is studied. Along the boundary rulings the simple support boundary conditions are specified. The investigation has been carried out for thin elastic shell when bending rigidity is vanishingly small (the moment free shell). The method of solution of the corresponding boundary problem is described. The calculations were carried out for shells with directing curve in form of a parabola with different values of curvature. The limits of the shell parameter changing are determined when the proper vibrations with localization of motion near edges in eigenforms exist. The corresponding eigenfrequency values are calculated.

ВВЕДЕНИЕ

Многие актуальные научно-технические проблемы связаны с изучением закономерностей колебаний и распространения волн в твердых деформируемых средах. К ним, в частности, следует отнести проблемы сейсморазведки, электроразведки, динамики энергетических сооружений и др. Среди различных составляющих волнового поля важное прикладное значение имеют те, для которых наблюдается наименьшее затухание в процессе распространения. В связи с этим особый интерес представляют волновые движения, локализованные у свободной границы твердого тела. Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [1], в которой установлено существование упругих волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства, с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие в упругих телах различной геометрии, обычно называются поверхностными

волнами типа Рэлея.

Волны, локализованные вблизи свободной границы полубесконечной пластинки, и волны в полубесконечной цилиндрической оболочке, затухающие от свободного торца оболочки вдоль направления ее образующих также относятся к поверхностным волнам типа Рэлея [2, 3]. Заметим, что в полубесконечной пластинке, когда край закреплен или свободно оперт, либо имеют место условия скользящего контакта, локализованной волны не существует [4]. В случае полубесконечной пластинки со свободной границей независимо друг от друга существуют планарные и изгибные волны, локализованные вблизи границы пластинки [4, 5]. При искривлении пластинки два указанных типа движения оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у кромки волн (преимущественно изгибных и преимущественно тангенциальных). В настоящее время ведутся исследования с целью определения влияния кривизны поверхности на собственные частоты (для ограни-

ченных областей) или фазовые скорости поверхностных волн типа Рэлея [6-10].

В данной работе выделяются достаточные условия, при которых существуют собственные колебания, экспоненциально затухающие от свободного торца полубесконечной незамкнутой цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей. Предполагается, что оболочка шарнирно опирается на две образующие, и ее жесткость на изгиб равна нулю (безмоментная оболочка). Таким образом, распространение поверхностных волн в незамкнутой оболочке приводит к возникновению специфических собственных колебаний даже в полубесконечных цилиндрических оболочках с выраженной локализацией колебаний в собственной форме вблизи края оболочки. Для цилиндрических оболочек с направляющими

$$y = ba^{-2}(2ax - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2a, \quad (1)$$

приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты при следующих значениях параметров: $a=1$, $b=2$ и $a=10$, $b=1$. Численный анализ показывает, что при увеличении кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки увеличиваются первые частоты собственных колебаний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются свободные колебания незамкнутой полубесконечной цилиндрической оболочки $0 \leq \alpha \leq +\infty$, такой, у которой образующие ортогональны краю оболочки. Выбор систем координат и возможная форма оболочки показаны на рисунке. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой можно представить в виде следующего сходящегося ряда Фурье:

$$R^{-2} = k^2 \left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right), \quad (2)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |r_m| < +\infty,$$

$$k = 2\pi/s, \quad 0 < \beta < s.$$

Здесь β – текущая длина дуги направляющей кривой; s – полная длина направляющей кривой между шарнирно опертыми образующими.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют технической теории цилиндрических оболочек [11] и записаны в выбранных

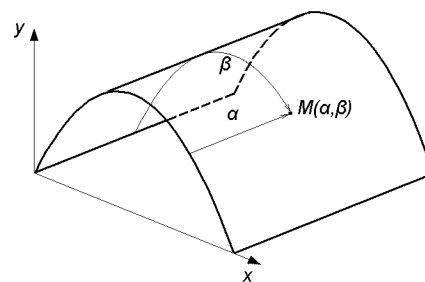


Рисунок. Незамкнутая цилиндрическая оболочка

криволинейных координатах α, β :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - \frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} &= \lambda u_1, \\ -\frac{1 - \sigma}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} - \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_3}{R} \right) &= \lambda u_2, \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{u_3}{R^2} &= \lambda u_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки;

$$\lambda = (1 - \sigma^2)\omega^2 \rho / E; \quad (4)$$

где ρ – плотность; E – модуль Юнга; σ – коэффициент Пуассона материала оболочки; ω – угловая частота.

Граничные условия на краях оболочки определяются следующими выражениями:

$$u_1 \Big|_{0,s} = \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \sigma \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{u_3}{R} \Big|_{0,s} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \\ = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left(\sigma \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^3 |u_j| \Big|_{\alpha \rightarrow +\infty} = 0,$$

где соотношения (5) выражают условия шарнирного закрепления по образующим $\beta=0$ и $\beta=s$, а

условия (6) являются условиями свободного края при $\alpha=0$ и условиями убывания возмущений при $\alpha \rightarrow +\infty$ соответственно.

2. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ

Сформулированная граничная задача является по существу задачей на собственные значения в неограниченной области. Поскольку речь идет о волновых процессах в механическом объекте без учета затухания в материале то, строго говоря, условие на бесконечности в соотношениях (6) следовало бы заменить условием излучения. Поскольку мы интересуемся волновыми движениями, не связанными с переносом энергии на бесконечность, указанное условие в соотношениях (6) можно использовать для отбора соответствующих собственных чисел.

Для детального анализа разрешимости рассматриваемой граничной задачи следует дополнительно ввести некоторые понятия. Для пары вектор-функций $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j = 1, 2$, введем понятие скалярного произведения по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^{+\infty} \int_0^s \sum_{k=1}^3 u_k^{(1)} \bar{u}_k^{(2)} d\beta d\alpha. \quad (7)$$

Обозначим через L_0 оператор, соответствующий левой части системы уравнений (3), первоначально определенный на гладких вектор-функциях $f = (u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющих условиям (5) и (6). Нетрудно проверить, что для таких вектор-функций выполняется соотношение

$$(L_0 f^{(1)}, f^{(2)}) = (f^{(1)}, L_0 f^{(2)}). \quad (8)$$

Более того, для любой функции $f = (u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющей условиям (5) и (6), имеет место неравенство

$$(L_0 f, f) \geq 0 \quad (9)$$

(см. [12, стр. 45]). Из неравенства (9) следует, что с задачей на собственные значения (3), (5), (6) можно связать неотрицательно определенный самосопряженный оператор (расширение по Фридрихсу оператора L_0 , см. [11], а также [13, стр. 350]), для которого в дальнейшем сохраним обозначение L_0 . Укажем, что при расширении по Фридрихсу к области определения оператора в общем случае добавляются функции, менее гладкие, чем собственные функции исходного

оператора. Отсылая читателя к результатам, полученным в работах [11–13], заметим, что в соответствии с определением, принятым в теории самосопряженных операторов, число λ есть точка спектра оператора L_0 , если неоднородное уравнение $(L_0 - \lambda I)f = g$, где I – единичный оператор, имеет решение из области определения оператора L_0 не при всякой правой части g , суммируемой с квадратом на множестве $[0, s] \times [0, +\infty)$. Если λ является собственным значением L_0 , т.е. при некотором ненулевом f_0 имеем $(L_0 - \lambda I)f_0 = 0$, то неоднородное уравнение неразрешимо, например, при $g = f_0$. Следовательно, собственные значения всегда являются точками спектра. Число λ называется точкой дискретного спектра, если оно изолировано от других точек спектра и ему отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных функций. Все остальные точки спектра (например, предельные точки дискретного спектра, точки спектра, заполняющие интервалы вещественной оси), принято называть точками существенного или непрерывного спектра.

Спектр оператора L_0 не является чисто дискретным [12, 14]. Оказывается, что при любых самосопряженных граничных условиях, операторы, порожденные системой (3), имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $[0, \lambda_0]$ – множеством значений функции

$$\Omega(\beta, \theta) = (1 - \sigma^2) \cos^4 \theta R^{-2}(\beta), \quad (10)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Появление этого участка непрерывного спектра является следствием нарушения эллиптичности системы (3) по Дуглису – Ниренбергу.

3. ВЫВОД И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для последующих вычислений систему уравнений (3) целесообразно представить в виде

$$\begin{aligned} \Gamma u_1 &= \sigma \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{2\sigma \lambda}{1 - \sigma} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \Gamma u_2 &= \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + (2 + \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{2\lambda}{1 - \sigma} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ -R^{-2} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \sigma R^{-2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + R^{-2} w &= \lambda w \end{aligned} \quad (11)$$

(см. [15]), где $w = u_3/R$, а оператор Γ выражается через оператор Лапласа Δ следующим образом:

$$\Gamma = \Delta \Delta + \frac{3 - \sigma}{1 - \sigma} \lambda \Delta + \frac{2\lambda^2}{(1 - \sigma)}. \quad (12)$$

Решение системы (11), удовлетворяющее условиям (5), ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(k\chi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta, \\ u_2 &= \exp(k\chi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cos km\beta, \\ w &= \exp(k\chi\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом тождественно выполняются условия шарнирного опирания на краях $\beta=0$ и $\beta=s$.

Подставим выражения (13) в систему (11). Из первых двух уравнений (11), приравнявая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$\begin{aligned} kc_m u_m &= \chi a_m w_m, \\ kc_m v_m &= mb_m w_m, \\ a_m &= \sigma\chi^2 + m^2 + \sigma\eta^2, \\ b_m &= (2 + \sigma)\chi^2 - m^2 + \eta^2, \\ \eta^2 &= 2\lambda / ((1 - \sigma)k^2), \\ c_m &= (\chi^2 - m^2)^2 + (\chi^2 - m^2)(3 - \sigma)/2\eta^2 + \\ &\quad + (1 - \sigma)/2\eta^4, \\ m &= \overline{1, +\infty}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из третьего уравнения (11), учитывая соотношения (14) и правила умножения тригонометрических рядов (см. [16, стр. 592]), получаем бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} &(A_m(r_0 - r_{2m}) - (1 - \sigma)\eta^2)w_m + \\ &+ \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} A_n(r_{|m-n|} - r_{m+n})w_n = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$m = \overline{1, +\infty},$$

где

$$A_n = (c_n + n^2 b_n - \sigma\chi^2 a_n) / c_n, \quad n = \overline{1, +\infty}. \quad (16)$$

Так как в области определения A_n имеем $A_n = O(1/n^2)$, где константа в O -члене не зависит от n , то, учитывая представление (2) и тот факт, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty,$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m=1}^{\infty} |A_n| (|r_{|m-n|} + |r_{m+n}|) \leq \\ &\leq 3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} |r_m| \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \right) < +\infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (15) при любых комплексных $\lambda \notin [0, \lambda_0]$ и χ в области определения коэффициентов (16) относится к известному классу сходящихся определителей - к нормальным определителям [17]. Чтобы система (15) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$M(\chi, \lambda, \sigma) = 0. \quad (18)$$

Пусть $\chi_j, j=1, 2$ - различные корни уравнения (18) с отрицательными действительными частями, а $(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_m^{(j)}, \dots), j=1, 2$ являются нетривиальными решениями системы (15) при $\chi_j, j=1, 2$ соответственно. Представим решение задачи (5), (6) (11) в виде

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \\ w &= w^{(1)} + w^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда решения системы (11) при $\chi_j, j=1, 2$ имеют вид (13). Учитывая граничные условия (6), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \\ &\sum_{j=1}^2 \frac{R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$m = \overline{1, +\infty},$$

где

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \sigma m^2 b_m^{(j)} - \sigma c_m^{(j)}, \quad (21)$$

$$R_{2j}^{(m)} = m\chi_j (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}),$$

а $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ - значения a_m, b_m, c_m из (14) при $\chi = \chi_j, j=1, 2$ соответственно. Чтобы система (20) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$|R_{ij}^{(m)}|_{i,j=1}^2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (22)$$

вне отрезка $[0, \lambda_0]$ и в области определения коэффициентов (16) имела некоторое решение λ . Урав-

нения (22) эквивалентны уравнениям

$$\delta_1 \chi_1^2 \chi_2^2 + \delta_2 \chi_1 \chi_2 + \delta_3 (\chi_1^2 + \chi_2^2) + \delta_4 = 0, \quad (23)$$

$$m = \overline{1, +\infty}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2(2(1 + \sigma)m^2 - \sigma\eta^2), \\ \delta_2 &= -\eta^2(2m^2 + \sigma\eta^2), \\ \delta_3 &= 2\sigma\eta^2(m^2 - \eta^2), \\ \delta_4 &= \sigma\eta^4(m^2 - \eta^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что в случае $R^{-1}(\beta) \equiv 0$ для аналогичной задачи имеем

$$\begin{aligned} \chi_1^2 &= m^2 - \eta^2, \\ \chi_2^2 &= m^2 - (1 - \sigma)/2\eta^2, \end{aligned} \quad (25)$$

а уравнения (23) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (2 - \eta^2/m^2)^4 &= 16(1 - \eta^2/m^2) \times \\ &\times (1 - (1 - \sigma)/2\eta^2/m^2), \quad (26) \\ m &= \overline{1, +\infty}, \end{aligned}$$

соответствующему уравнениям Рэлея для пластинки-полосы. Таким образом, доказано следующее утверждение: если $R^{-2}(\beta)n \geq 3$ можно представить в виде (2) и $\lambda \notin [0, \lambda_0]$, то уравнения (23) являются характеристическими уравнениями задачи (3), (5), (6), где χ_1 и χ_2 - различные корни уравнения (18) с отрицательными действительными частями.

4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

В связи с наличием бесконечного числа полюсов у коэффициентов системы (15), в общем случае решение уравнения (18) представляет сложную задачу. Поэтому рассмотрим следующий частный случай:

$$R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta). \quad (27)$$

В этом случае каждое уравнение системы (15) содержит три неизвестные и, следовательно, может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} r_1 p_{m-1} c_m c_{m+1} w_{m-1} + q_m c_{m-1} c_{m+1} w_m + \\ + r_1 p_{m+1} c_{m-1} c_m w_{m+1} = 0, \quad (28) \\ m = \overline{1, +\infty} \end{aligned}$$

где коэффициенты являются многочленами относительно χ^2 и η^2 :

$$\begin{aligned} p_n &= c_n + n^2 b_n - \sigma \chi^2 a_n, \\ q_n &= r_0 p_n - (1 - \sigma) \eta^2 c_n, \quad (29) \\ n &= \overline{1, +\infty} \end{aligned}$$

Так как определитель системы (28) относится к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем к нулю ее определитель:

$$D(\chi^2, \sigma, r_1, r_0, \lambda) = 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) устанавливает функциональную зависимость $\chi^2 = g(\sigma, r_1, r_0, \lambda)$. В явной форме эту зависимость можно установить следующим образом. Возьмем усеченный определитель из D при конечном m и приравняем его к нулю:

$$D_m(\chi^2, \sigma, r_1, r_0, \lambda) = 0. \quad (31)$$

Найдем χ_m , являющееся решением уравнения (31). Точное решение получается из χ_m при $m \rightarrow \infty$. Раскрывая определитель D_m по элементам последнего столбца или строки, получаем следующую рекуррентную последовательность:

$$\begin{aligned} D_1 &= q_1 c_2, \\ D_2 &= (q_2 D_1 - r_1^2 p_1 p_2) c_1 c_2 c_3, \quad (32) \\ D_m &= (q_m D_{m-1} - r_1^2 p_{m-1} p_m c_{m-2} c_m D_{m-2}) \times \\ &\times c_{m-1} c_{m+1}, \quad m = \overline{3, +\infty}. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение: при фиксированном $m \geq 2$ и при условиях

$$r_1^2 \ll 1, \quad \lambda_0 < \lambda < (1 - \sigma)/2m^2 k^2 \quad (33)$$

уравнение (30) имеет формальные решения вида

$$\begin{aligned} \chi_j^2 &= (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \dots, \quad (34) \\ j &= 1, 2, \end{aligned}$$

где $\chi_j^{(m)}$ - корни уравнения $q_m = 0$, а

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(m)} &= \frac{(q_{m-1} p_{m+1} + q_{m+1} p_{m-1}) p_m}{q_{m-1} q_{m+1} q'_m} \Big|_{\chi = \chi_j^{(m)}}, \quad (35) \\ j &= 1, 2. \end{aligned}$$

Действительно, легко проверить, что при условиях (33) уравнение имеет два положительных корня: $\chi^2 = (\chi_j^{(m)})^2$, $j = 1, 2$. Значения χ^2 , являющиеся корнями уравнения $D_{m+1}(\chi^2, r_1) = 0$ в зоне (33),

Табл. 1. Характеристики затухания и собственные частоты оболочки с параметрами $a=2, b=1, s \approx 4.5917, r_0 \approx 0.137056, r_1 \approx -0.055066$

m	$R^{-2} \approx k^2 r_0/2$			$R^{-2} \approx k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$		
	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m
2	-0.5016	-1.2559	0.92397	-0.5033	-1.2449	0.92276
3	-0.5210	-1.2029	0.92144	-0.5205	-1.2061	0.92179
4	-0.5283	-1.1841	0.92055	-0.5291	-1.1815	0.92036
5	-0.5318	-1.1754	0.92014	-0.5345	-1.1658	0.91932
10	-0.5366	-1.1636	0.91959	-0.5363	-1.1646	0.91967
100	-0.5382	-1.1597	0.91940	-0.5382	-1.1597	0.91940

Табл. 2. Характеристики затухания и собственные частоты оболочки с параметрами $a=10, b=1, s \approx 20.1325, r_0 \approx 0.007898, r_1 \approx -0.000188$

m	$R^{-2} \approx k^2 r_0/2$			$R^{-2} \approx k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$		
	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m	$k\chi_1/m$	$k\chi_2/m$	η/m
2	-0.1222	-0.2658	0.91967	-0.1222	-0.2658	0.91967
3	-0.1225	-0.2651	0.91952	-0.1225	-0.2651	0.91952
4	-0.1226	-0.2648	0.91947	-0.1226	-0.2648	0.91947
5	-0.1227	-0.2647	0.91944	-0.1227	-0.2647	0.91944
10	-0.1227	-0.2645	0.91941	-0.1227	-0.2645	0.91941
100	-0.1227	-0.2645	0.91940	-0.1227	-0.2645	0.91940

ищем в виде

$$\chi_j^2 = (\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_j^{(m)} r_1^4 + \dots, \quad (36)$$

$$j = 1, 2 \quad m = \overline{2, +\infty}.$$

Так как

$$D_{m+1} = ((q_{m+1}q_m - r_1^2 p_m p_{m+1})D_{m-1} - r_1^2 q_{m+1} p_{m-1} p_m c_{m-2} c_m D_{m-2}) c_{m-1} \times (37)$$

$$\times c_m c_{m+1} c_{m+2}, \quad m = \overline{3, +\infty},$$

то, подставляя (36) в уравнение $D_{m+1}(\chi^2, r_1) = 0$ и приравнявая коэффициенты при r_1^2 нулю, получаем

$$(q_{m+1} q'_m \alpha_j^{(m)} - p_m p_{m+1}) D_{m-1} - q_{m+1} p_{m-1} p_m c_{m-2} c_m D_{m-2} \Big|_{\chi=\chi_j^{(m)}} = 0, \quad (38)$$

$$j = 1, 2.$$

Учитывая, что

$$D_{n-1} \Big|_{r_1=0} = q_{n-1} c_{m-2} c_m D_{n-2} \Big|_{r_1=0}$$

получаем формулу (35).

Аналогичным образом (как это было проделано в [7]), методом математической индукции можно

доказать, что при использовании определителей более высокого порядка чем $m+1$ в представлении χ^2 , являющихся нулями этого определителя в виде (36), коэффициенты при r_1^2 не изменятся. Таким образом, доказаны представления (34) с гарантированными значениями первых двух слагаемых. В табл. 1, 2 приведены безразмерные характеристики собственных значений η/m и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_{i1}/m, i=1, 2$ в зависимости от m, a, b для оболочек с направляющими (1) при $\sigma=1/3$. В расчетах использованы приближенные формулы

$$\chi_j = -((\chi_j^{(m)})^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2)^{1/2}, \quad j = 1, 2. \quad (39)$$

Заметим, что с увеличением квадрата кривизны увеличивается отрезок $[0, \lambda_0]$ непрерывного спектра задачи (3), (5), (6) (см. выражения (10)). Сравнивая табл. 1 и 2, приходим к заключению, что с увеличением зоны непрерывного спектра задачи (3), (5), (6) также увеличиваются и первые частоты собственных колебаний. Численный анализ показывает, что с уменьшением квадрата кривизны, собственные формы колебаний задачи (3), (5), (6) затухают медленнее, и при $R^{-2} \rightarrow \infty$ все характеристики собственных колебаний цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам преимущественно планарных колебаний пластинки-полосы ($\eta/m=0.91940$). Отметим, что первые группы параметров $k\chi_{i1}/m$,

$i=1, 2$ и η/m в каждой из таблиц соответствуют круговой цилиндрической оболочке радиуса r_0 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показано, что в полубесконечной цилиндрической оболочке с произвольной направляющей, квадрат кривизны которой можно представить в виде ряда (2), при наличии шарнирного опирания Навье на двух образующих могут существовать собственные колебания, затухающие от свободного края вдоль ее образующих. Частоты таких колебаний определяются совокупностью уравнений типа Рэлея (23)–(24) (ср. [8]). Численный анализ показывает, что каждое уравнение из системы (23) в интервале $(0, 1)$ может иметь только один корень относительно безразмерной характеристики собственной частоты η/m . При больших m или при малой кривизне собственные частоты задачи (3), (5), (6) близки к собственным частотам задачи о планарных колебаниях пластинки – полосы. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты увеличиваются.

1. *Rayleigh J. W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc.– 1885.– 17.– P. 4–11.
2. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах.– М.: Наука, 1981.– 288 с.
3. *Белубекян М. В.* Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твердого тела.– Ереван, 1997.– С. 79–96.
4. *Белубекян М. В., Енгибарян И. А.* Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией // Изв. РАН. МТТ.– 1996.– N 6.– С. 139–143.
5. *Коненков Ю. К.* Об изгибной волне “рэлеевского” типа // Акуст. ж.– 1960.– 6, N 1.– С. 124–126.
6. *Багдасарян Р. А., Белубекян М. В., Казарян К. Б.* Волны типа Рэлея в полубесконечной цилиндрической оболочке // Волновые задачи механики.– Нижний Новгород, 1992.– С. 87–93.
7. *Гулгазарян Г. Р., Казарян К. Б.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении. Механика.– 1997.– 50, N 1.– С. 27–33.
8. *Гулгазарян Г. Р., Гулгазарян Л. Г.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке с произвольной направляющей // Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем.– Ереван, 1997.– С. 147–150.
9. *Белубекян М. В., Гулгазарян Г. Р., Саакян А. В.* Волны типа Рэлея в полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении. Механика.– 1997.– 50, N 3–4.– С. 49–55.
10. *Гулгазарян Г. Р., Гулгазарян Л. Г.* Колебания, локализованные у свободного торца полубесконечной незамкнутой круговой цилиндрической оболочки // Сб. науч. тр. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения проф. Т. Т. Хачатряна и О. М. Сапонджяна, 23–24 окт. 1998.– Ереван, 1999.– С. 95–98.
11. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек.– М.: Наука, 1979.– 383 с.
12. *Асланян А. Г., Лидский В. Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек.– М.: Наука, 1974.– 155 с.
13. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.– М.: Мир, 1979.– 587 с.
14. *Гулгазарян Г. Р., Лидский В. Б., Эскин Г. И.* Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сиб. мат. ж.– 1973.– 4, N 5.– С. 978–986.
15. *Гулгазарян Г. Р.* Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки // Изв. НАН Армении. Механика.– 1996.– 49, N 1.– С. 61–70.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3.– М.: Физматгиз, 1963.– 656 с.
17. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Том 1.– М.: Физматгиз, 1963.– 342 с.