

УДК 534.1

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИЗ ОТКРЫТОГО КОНЦА КЛИНОВИДНОГО ВОЛНОВОДА. I. МЕТОД РЕШЕНИЯ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТОВ

В. Т. ГРИНЧЕНКО\*, В. Т. МАЦЫПУРА\*\*

\*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\*Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 7.06.99 ◊ Пересмотрено 30.11.99

Исследовано излучение звука из открытого клиновидного волновода, для которого концы ограничивающих плоскостей не лежат на одной окружности. Основное внимание уделено описанию аналитической структуры волновых полей и обсуждению особенностей расчетного алгоритма. Показано, что в рассматриваемых задачах возникает неоднозначность при формировании алгебраических соотношений, выражающих условия сопряжения поля на границах подобластей. Путем анализа численных результатов выработаны рекомендации по преодолению указанной неоднозначности с целью повышения точности расчета.

Досліджено випромінювання звуку з відкритого клиновидного хвилепроводу, для якого кінці обмежувачих площин не лежать на одному колі. Основну увагу приділено описові аналітичної структури хвильових полів та обговоренню особливостей розрахункового алгоритму. Показано, що в розглянутих задачах виникає неоднозначність при формуванні алгебраїчних співвідношень, які визначають умови спряження поля на границях підобластей. Шляхом аналізу чисельних результатів вироблені рекомендації по подоланню вказаної неоднозначності з метою поліпшення точності розрахунків.

Sound radiation from open clinoid waveguide is studied, for which the ends of bounding planes do not lie on one circle. The basic attention is given to exposition of an analytic structure of wave fields and arguing of features of solving algorithm. It is shown that for the considered problems there is an ambiguity at shaping of algebraic relations expressing the field matching on boundaries of subdomains. By analysis of numerical results the references on overcoming the indicated ambiguity are worked out with purpose to raise the precision of calculations.

## ВВЕДЕНИЕ

В теории рассеяния звуковых и электромагнитных волн дифракция на различных препятствиях с резкими изломами в форме границы привлекает интерес многих исследователей как в теоретическом, так и прикладном аспекте. Структура дифрагированного поля в окрестности таких особых участков границы довольно сложна и для ее описания требуется специальный математический аппарат. Решение простейших фундаментальных по значению задач дифракции на полуплоскости и клине потребовало существенного развития аппарата математической физики [1, 2]. Разработка методов определения характеристик звуковых полей в клине до настоящего времени представляет актуальную для многих разделов физики проблему [3–5]. Использование таких методов позволяет получить ответ на важные вопросы при конструировании акустических и электромагнитных антенн. Анализ результатов решения граничных задач для клина важен для формирования качественных представлений об особенностях структуры звуковых полей в современной акустике океана [4]. Практические потребности стимулируют также рассмотрение задач рассеяния на неидеальных препятствиях [6].

Распространение волн в клиновидных областях сопровождается рядом специфических явлений, не наблюдающихся в других типах волноводов и рассеивателей. Стремление учесть эти эффекты при построении широко используемых приближенных методов явилось стимулом для развития геометрической [7] и физической [8] теорий дифракции. В рамках этих подходов можно получить достоверные оценки волновых полей для относительно высоких частот. При соизмеримости длины волны с некоторыми характерными размерами рассеивателя только решение полной граничной задачи может обеспечить получение достоверных количественных оценок характеристик поля как в ближней, так и волновой зонах. Это обстоятельство стимулировало появление большого количества работ по развитию методов решения таких задач.

На протяжении ряда лет значительный объем исследований по развитию метода и решению широкого круга конкретных задач в этой области выполнен В. П. Шестопаловым и его коллегами. Использование в качестве базы для построения представлений волновых полей решения классической задачи Римана – Гильберта позволило выработать метод, способный эффективно отразить тонкую структуру волновых полей вблизи угловых точек и тем самым обеспечить высокую эффективность

вычислительных процедур при получении количественных оценок рассеянных полей [9].

Анализ закономерностей рассеивания на ребре полуплоскости создает физическую основу для понимания особенностей структуры волновых полей различной физической природы при излучении из открытых концов волноводов или рассеянии на различного типа решетках. Первое полное, после важных интегральных оценок Рэлея [10], исследование проблемы излучения звука из конца цилиндрической трубы дано в работе [11]. Существенное влияние на формирование этого специфического раздела теории волн оказала монография [12]. Помимо большого объема конкретных данных о свойствах волновых полей в различных координатных системах монография содержит систематическое изложение общего подхода к решению соответствующих граничных задач теории рассеяния.

Моделирование большого количества прикладных проблем электродинамики, оптики и акустики приводит к рассмотрению дифракции на открытых концах волноводов и решеток [13–16]. Анализ многочисленных количественных данных позволяет установить особенности волновых полей в типичных решеточных структурах [17], исследовать закономерности отражения волн от открытых концов волноводов [18], определить излучение энергии из открытых волноводов применительно к проблеме снижения шума автомобильного выхлопа [19], исследовать рассеяния на конструктивных элементах залов в архитектурной акустике [20].

В общей совокупности задач, очерченной в таком коротком введении, выделяется класс задач, связанных с изучением рассеивания волн на открытых концах волноводов с усложненной геометрией. Здесь имеется в виду такой, например, открытый плоскопараллельный волновод, у которого плоскость среза на открытом конце не перпендикулярна к оси волновода. Аналогичными геометрическими свойствами обладает открытый клиновидный волновод, у которого концы ограничивающих плоскостей не лежат на одной окружности. Именно такого типа волноводы рассматриваются в данной работе.

Указанные примеры изменения в геометрии волноводов, очевидно, приводят к существенному усложнению граничных задач, которые необходимо решать для получения количественных характеристик полей. Более важным, однако, является то обстоятельство, что такое изменение геометрии волновода позволяет в определенной мере управлять как энергетической эффективностью излучения с открытого конца, так и пространственной структурой поля.

Цель данной работы двояка. С одной стороны, дается описание и характерные особенности метода, позволяющего, с нашей точки зрения, построить эффективное аналитическое решение для широкого диапазона изменения параметров нерегулярного открытого конического волновода. С другой стороны, значительное внимание в работе уделено анализу решений для ряда конкретных значений геометрических параметров волноводов с целью выяснения возможностей управления структурой излученного звукового поля за счет изменения геометрических параметров. Большой объем работы и указанная ее логическая структура предопределили представление материала в виде двух публикаций. В первой части основное внимание уделяется описанию аналитической структуры волновых полей и особенностям расчетного алгоритма. Анализ конкретных данных о влиянии геометрических и физических параметров на структуру поля, излучаемого из открытого конца нерегулярного волновода, будет приведен в следующем номере журнала.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫБОР ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

Рассмотрим задачу об излучении звука из открытого конца полубесконечного клиновидного волновода, образованного двумя плоскостями. Шесть случаев взаимного расположения плоскостей, образующих волновод, показаны на рис. 1. Они исчерпывают все возможные варианты геометрии волновода. Такая систематизация по геометрическим параметрам является принципиальной с точки зрения конструирования аналитического решения граничных задач.

Для построения решения используем полярную систему координат  $(r, \theta)$ . Размеры выходного отверстия волновода определяются углом раскрытия  $\theta_0$  и расстоянием  $r_0$  от начала координат  $O$  до ребра на границе волновода (см. рис. 1). Волновод помещен в идеальную жидкость с плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$ . Характеристики гармонического звукового поля внутри и вне волновода определяются через функцию потенциала скоростей  $\Phi$ , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0, \quad k = \omega/c, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\omega$  – частота гармонической волны. Временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается.

Поверхности волновода считаем абсолютно жесткими. Тогда производная по нормали от потенциала скоростей на этих поверхностях равна

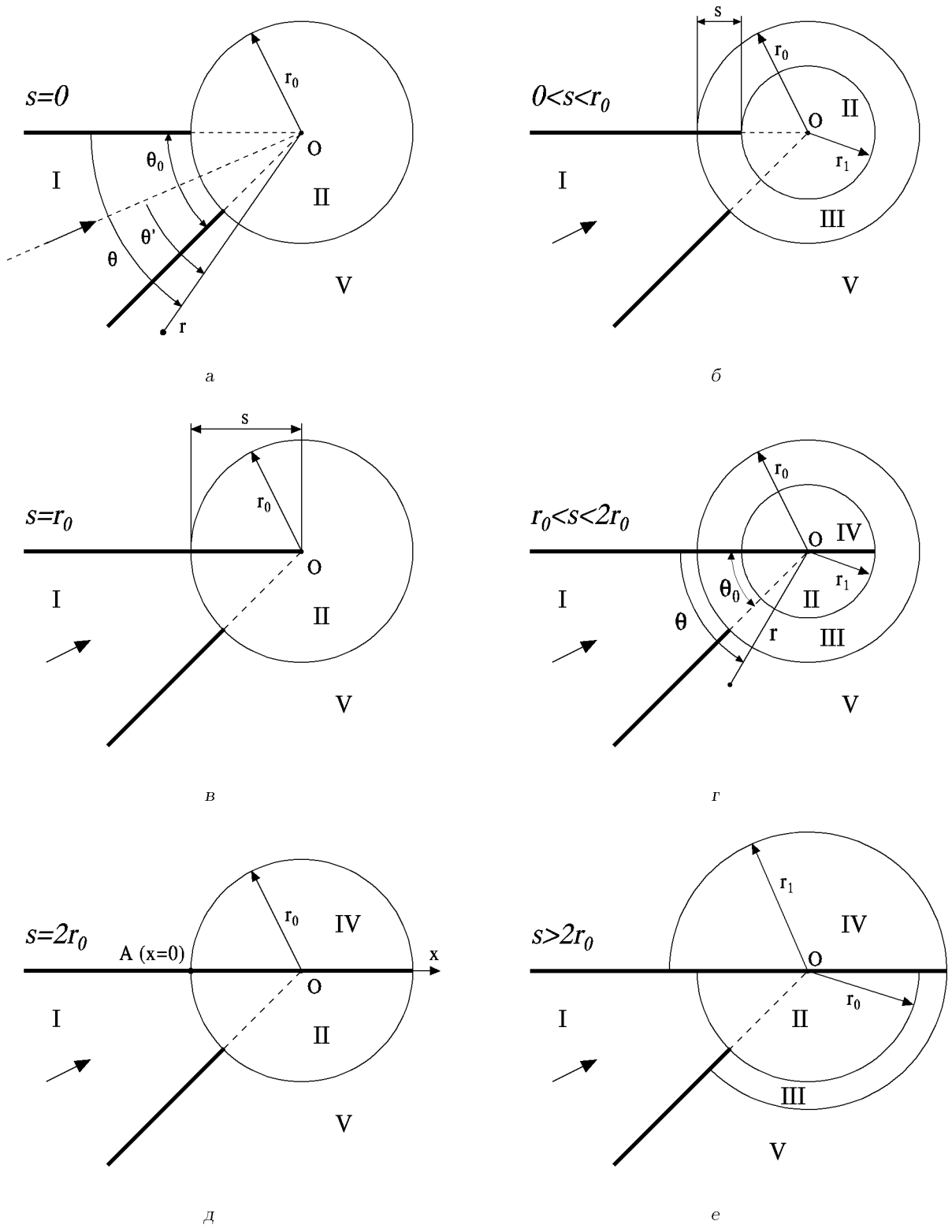


Рис. 1. Геометрия клиновидного волновода

нулю:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (2)$$

Все представленное на рис. 1 случаи будут рассматриваться с использованием единого метода частичных областей. С точки зрения этого метода наиболее простым является волновод, показанный на рис. 1, а. В соответствии с основной идеей метода частичных областей все пространство существования звукового поля в этом случае естественным образом разбивается на три области: область I представляет собой полубесконечный клиновидный волновод  $r \leq r_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ; область II – круг радиуса  $r_0$  с центром в начале координат  $O$ ; область V – внешнее пространство  $r \geq r_0$ ,  $\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi$  (здесь и далее за внешней областью закрепляется номер V).

Проведенный ниже анализ характеристик звуковых волн основывается на сравнении характеристик звукового поля волновода, изображенного на рис. 1, а, и волновода, у которого верхняя граничная поверхность ( $r \geq r_0$ ,  $\theta = 0$ ) продолжается вправо. Такие волноводы представлены на рис. 1, б–е, где по мере продолжения верхней поверхности волновода изменяется структура частичных областей, на которые разбивается вся область существования звукового поля. Параметр  $s$  характеризует величину продолжения верхней грани. Рис. 1, а соответствует  $s = 0$ . На рис. 1, б промежуточная зона между областями I и V разбивается на две области: область II – круг радиуса  $r_1$  и область III – круговой пояс между окружностями радиуса  $r_0$  и  $r_1$  и жесткой границей  $r_1 \leq r \leq r_0$ ,  $\theta = 0$ . В этом случае величина  $s$  изменяется в пределах  $0 < s < r_0$ . Рис. 1, в соответствует случаю  $s = r_0$ . Здесь промежуточная зона между областями I и V представляет собой круг радиуса  $r_0$  с жесткой границей  $0 \leq r \leq r_0$ ,  $\theta = 0$ . Дальнейшее увеличение параметра  $s$  приводит к волноводу, показанному на рис. 1, г. Здесь  $s$  изменяется в пределах  $r_0 < s < 2r_0$ . Промежуточная зона между областями I и V разбивается на три области: область кругового пояса III  $r_1 \leq r \leq r_0$  с жесткой границей при  $\theta = 0$ , область II – полукруг радиуса  $r_1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  с жесткой границей по диаметру и область IV – вторая половина круга радиуса  $r_1$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  с той же жесткой границей вдоль диаметра. Далее, при дальнейшем увеличении параметра  $s$  приходим к ситуации, показанной на рис. 1, д, где  $s = 2r_0$ . Здесь в сравнении с рис. 1, г отсутствует область III кругового пояса. И, наконец, рис. 1, е отражает ситуацию, при которой  $s > 2r_0$  (здесь имеем  $r_1 > r_0$ ). Очевидно,

в данном случае структура промежуточной зоны между областями I и V является наиболее сложной. Эта зона включает в себя область II – полукруг радиуса  $r_0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  с жесткой границей вдоль диаметра, область III, ограниченную дугами окружностей радиуса  $r_0$  и  $r_1$  и жесткими границами  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $\theta = \theta_0$ ,  $\theta = \pi$  и область IV – полукруг радиуса  $r_1$  с жесткой границей вдоль диаметра.

Описанный случай выделения частичных областей непосредственно связан со способом построения решения граничной задачи. Именно для таких подобластей удается построить общие решения для уравнения Гельмгольца. Решение исходной граничной задачи для клиновидных волноводов при этом сводится к выполнению условий сопряжения на границах частичных областей.

Пусть в области I, общей для всех типов волноводов, на открытый конец волновода набегают одна из распространяющихся нормальных волн (мода). В результате образуются отраженная и прошедшая в область V волны. В соответствии с методом частичных областей следует записать выражения для звуковых полей в каждой из частичных областей. При этом каждое из этих выражений должно быть общим представлением для потенциала скоростей, позволяющим выполнить граничные условия на границах и условия сопряжения между областями. Для области I это представление включает в себя набегающую волну и полную совокупность распространяющихся и неоднородных отраженных волн.

Обратимся вначале к ситуации на рис. 1, а, где  $s = 0$ . В этом случае, в отличие от всех остальных, нормальные волны обладают определенными свойствами симметрии относительно линии  $\theta = \theta_0/2$  (штриховая линия). Поэтому, естественно провести решение задачи для рис. 1, а в системе координат  $(r, \theta')$ , где  $\theta' = \theta - \theta_0/2$ , а затем перейти к основной системе координат  $(r, \theta)$ . В случае симметричного относительно оси  $\theta' = 0$  падающего поля потенциал звукового поля в области I следует записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_I(r, \theta') = & H_{\alpha_q}^{(2)}(kr) \cos(\alpha_q \theta') + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{\alpha_n}^{(1)}(kr) \cos(\alpha_n \theta'), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $q$  – номер нормальной волны, набегающей на открытый конец волновода;  $H_{\alpha_n}^{(1)}(kr)$ ,  $H_{\alpha_n}^{(2)}(kr)$  – функции Ханкеля первого и второго рода; величина  $\alpha_n$  определяется согласно условию (2) на жестких поверхностях клиновидного волновода:  $\alpha_n = 2n\pi/\theta_0$ . Совокупность произвольных коэффици-

ентов  $A_n$  позволяет выполнить условия сопряжения на границе с областью II.

Поле в области II (рис. 1, а) представим в виде суперпозиции стоячих волн:

$$\Phi_{II}(r, \theta') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(kr) \cos(n\theta'), \quad (4)$$

где  $J_n(kr)$  – функции Бесселя первого рода. Последовательность коэффициентов  $C_n$  обеспечивает выполнение условий сопряжения на границе с областями I и V.

Прошедшая в область V волна запишется в виде совокупности нормальных волн области V, являющейся внешностью клиновидного волновода:

$$\Phi_V(r, \theta') = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_{\beta_n}^{(1)}(kr) \cos(\beta_n(\theta' - \pi)), \quad (5)$$

где  $\beta_n = 2n\pi/(2\pi - \theta_0)$ .

Выбор угловых функций в решении (5) обеспечивает выполнение граничных условий на сторонах клиновидной области V, а радиальные функции выбраны в соответствии с условием излучения. Последовательность произвольных коэффициентов  $B_n$  должна быть определена из условий сопряжения с областью II. При  $s \neq 0$  (рис. 1, б-е) решение задачи проводится в системе координат  $(r, \theta)$ . Тогда звуковые поля в областях I и V будут следующими:

$$\Phi_I(r, \theta) = H_{\alpha_q}^{(2)}(kr) \cos(\alpha_q \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_{\alpha_n}^{(1)}(kr) \cos(\alpha_n \theta), \quad (6)$$

$$\Phi_V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_{\beta_n}^{(1)}(kr) \cos(\beta_n(\theta - \theta_0)), \quad (7)$$

где  $\alpha_n = n\pi/\theta_0$ ,  $\beta_n = n\pi/(2\pi - \theta_0)$ .

Опишем звуковые поля в промежуточной зоне между областями I и V для различных геометрий волновода (см. рис. 1, б-е).

Для рис. 1, б ( $0 < s < r_0$ ) имеем

$$\Phi_{II}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr) [C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)], \quad (8)$$

$$\Phi_{III}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n J_{\frac{n}{2}}(kr) + F_n N_{\frac{n}{2}}(kr)] \times \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right), \quad (9)$$

где  $J_{\frac{n}{2}}(kr)$ ,  $N_{\frac{n}{2}}(kr)$  – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Для рис. 1, в ( $s = r_0$ )

$$\Phi_{II}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_{\frac{n}{2}}(kr) \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right). \quad (10)$$

Для рис. 1, г ( $r_0 < s < 2r_0$ )

$$\Phi_{II}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(kr) \cos(n\theta), \quad (11)$$

$$\Phi_{III}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n J_{\frac{n}{2}}(kr) + F_n N_{\frac{n}{2}}(kr)] \times \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right), \quad (12)$$

$$\Phi_{IV}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_n(kr) \cos(n(\theta - \pi)). \quad (13)$$

Для рис. 1, д, где  $s = 2r_0$ , звуковые поля в областях II и IV определяются формулами (11) и (13) соответственно.

Для рис. 1, е, где  $s > 2r_0$ , звуковые поля в областях II и IV также определяются выражениями (11) и (13), а поле в области III следует записать в виде

$$\Phi_{III}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [E_n J_{\gamma_n}(kr) + F_n N_{\gamma_n}(kr)] \times \cos(\gamma_n(\theta - \theta_0)), \quad (14)$$

где  $\gamma_n = n\pi/(\pi - \theta_0)$ .

Учитывая свойство полноты и ортогональности функций, входящих во все построенные решения, легко убедиться, что все они обладают достаточной степенью произвола в виде наборов произвольных коэффициентов для того, чтобы выполнить условия сопряжения на границах частичных областей.

## 2. ОСОБЕННОСТИ ФОРМУЛИРОВКИ И ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЙ СОПРЯЖЕНИЯ

Физический смысл условий сопряжения очень прост. При подходе к границе раздела подобластей необходимо совпадение значений потенциала  $\Phi$  и его нормальной производной, вычисленных по представлению поля в каждой подобласти. Однако практическое выполнение этих условий с использованием приведенных выше выражений для общих решений обладает некоторыми особенностями, анализ которых важен для более глубокого понимания возможностей метода частичных областей. Подробные выкладки, связанные с выполнением условий сопряжения, и соответствующие вычисления будут приведены для волноводов, представленных на рис. 1, а и б.

Существо вопросов, возникающих при выполнении условий сопряжения, легко понять, обратившись, например, к представлениям звукового поля для волновода, показанного на рис. 1, а. Полное представление звукового поля в области II дается бесконечным рядом (4). Если на всей границе области  $r=r_0$  заданы некоторые граничные условия для давления или радиальной скорости, то коэффициенты  $C_n$  легко определяются как коэффициенты ряда Фурье.

При задании условий сопряжения на границе  $r=r_0$  должны выполняться оба названных условия. Естественно, эти условия могут быть выполнены только в том случае, когда определенный произвол содержится в решениях для соседних областей I и V. Такой произвол в виде наборов коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  в рядах (3) и (5) действительно имеется. Вопрос теперь заключается в том, как практически использовать условия сопряжения для определения неизвестных коэффициентов рядов Фурье. Имеются два альтернативных варианта действий. Коэффициенты  $C_n$  могут быть определены либо из условий для давления, либо из условий для радиальной скорости на полной окружности  $r=r_0$ . Соответственно меняется физический смысл уравнений, используемых для определения коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  в рядах (3) и (5).

Следовательно, условия сопряжения будут выглядеть следующим образом.

Вариант 1:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r}, \quad |\theta'| \leq \theta_0, \\ 2) \quad & \Phi_{II} = \begin{cases} \Phi_I, & |\theta'| \leq \theta_0, \\ \Phi_V, & \theta_0 \leq |\theta'| \leq \pi, \end{cases} \\ 3) \quad & \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_V}{\partial r}, \quad \theta_0 \leq |\theta'| \leq \pi. \end{aligned} \quad (15)$$

Вариант 2:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Phi_I = \Phi_{II}, \quad |\theta'| \leq \theta_0, \\ 2) \quad & \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_I}{\partial r}, & |\theta'| \leq \theta_0, \\ \frac{\partial \Phi_V}{\partial r}, & \theta_0 \leq |\theta'| \leq \pi, \end{cases} \\ 3) \quad & \Phi_{II} = \Phi_V, \quad \theta_0 \leq |\theta'| \leq \pi. \end{aligned} \quad (16)$$

В первом варианте коэффициенты  $C_n$  являются “главными” для удовлетворения условий сопряжения по давлению. Во втором варианте они играют

такую же роль применительно к условию по радиальной скорости. Алгебраизация функциональной системы (15) или (16), выполненная известным способом [21], порождает бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ . При этом алгебраизация первого уравнения в этих системах происходит с использованием свойств полноты и ортогональности системы функций  $\cos(\alpha_n \theta')$ , второго – системы функций  $\cos(n \theta')$  и третьего – системы функций  $\cos(\beta(\theta' - \pi))$ .

Запишем в качестве примера алгебраическую систему уравнений, соответствующую функциональной системе (15):

$$\begin{aligned} A'_m \frac{\theta_0}{2} \delta_m - \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \frac{J'_n(kr_0)}{J_n(kr_0)} Q\left(\alpha_m, n, 0, \frac{\theta_0}{2}\right) &= -\frac{\theta_0}{2} \delta_{mq}, \\ C'_m \pi \delta_m - \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \frac{H_{\alpha_n}^{(1)}(kr_0)}{H_{\alpha_n}^{(1)'}(kr_0)} Q\left(m, \alpha_n, 0, \frac{\theta_0}{2}\right) - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} B'_n \frac{H_{\gamma_n}^{(1)}(kr_0)}{H_{\gamma_n}^{(1)'}(kr_0)} Q\left(m, \gamma_n, \frac{\theta_0}{2}, \pi\right) &= \\ = \frac{H_{\alpha_q}^{(1)}(kr_0)}{H_{\alpha_q}^{(1)'}(kr_0)} Q\left(m, \alpha_q, 0, \frac{\theta_0}{2}\right), \end{aligned}$$

$$B'_m \left(\pi - \frac{\theta_0}{2}\right) \delta_m - \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \frac{J'_n(kr_0)}{J_n(kr_0)} Q\left(\gamma_m, n, \frac{\theta_0}{2}, \pi\right) = 0,$$

где  $m=0, 1, \dots, \infty$ ;  $A'_n = A_n H_{\alpha_n}^{(1)'}(kr_0)$ ;  $B'_n = B_n H_{\gamma_n}^{(1)'}(kr_0)$ ;  $C'_n = C_n J_n(kr_0)$ ;

$$Q(a, b, c, d) = \int_c^d \cos(a\theta) \cos(b\theta) d\theta;$$

$$\delta_{mq} = \begin{cases} 1, & m = q = 0, \\ 0.5, & m = q \neq 0, \\ 0, & m \neq q; \end{cases}$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0.5, & m \neq 0. \end{cases}$$

Аналогично, для волновода, изображенного на рис. 1, б, можно записать два варианта условий сопряжения полей на границах областей.

Вариант 1:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r}, \quad r = r_0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\
 2) \quad & \Phi_{III} = \begin{cases} \Phi_I, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ \Phi_V, & \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad r = r_0, \\
 3) \quad & \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r}, \quad r = r_1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\
 4) \quad & \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_V}{\partial r}, \quad r = r_0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi, \\
 5) \quad & \Phi_{III} = \Phi_{II}, \quad r = r_1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Вариант 2:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \Phi_I = \Phi_{III}, \quad r = r_0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\
 2) \quad & \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_I}{\partial r}, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ \frac{\partial \Phi_V}{\partial r}, & \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad r = r_0, \\
 3) \quad & \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r}, \quad r = r_1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\
 4) \quad & \Phi_{III} = \Phi_V, \quad r = r_0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi, \\
 5) \quad & \Phi_{III} = \Phi_{II}, \quad r = r_1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь в первом варианте коэффициенты  $E_n$  и  $F_n$  области III являются “главными” для удовлетворения условий сопряжения по давлению между областями III и I, V. Во втором варианте они играют такую же роль применительно к условию по радиальной скорости.

Преобразование первого функционального уравнения в системах (17), (18) в алгебраическое уравнение происходит с использованием свойств системы функций  $\cos(\alpha_n \theta)$ , второго и третьего –  $\cos(n\theta/2)$  четвертого –  $\cos(\beta_n(\theta - \theta_0))$ , пятого –  $\cos(n\theta)$ ,  $\sin(n\theta)$ .

Таким образом, выполнение физических условий сопряжения в рамках метода частичных областей порождает две различных бесконечных системы. На этом этапе общего анализа граничных задач не существует каких-либо соображений для того, чтобы отдать предпочтение одной из систем. Некоторые основания для этого могут быть получены лишь при анализе данных конкретных расчетов с использованием обоих типов систем.

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Вопрос о построении алгоритмов решения бесконечных систем уравнений, порожденных выполнением условий сопряжения в методе частичных областей, многократно обсуждался в различных публикациях [21, 22]. При этом логическую стройность таким алгоритмам можно обеспечить за счет последовательного учета того, что во всех рассматриваемых здесь задачах звуковые поля обладают известными сингулярностями в окрестности угловых точек. Это также дает возможность получить количественные оценки характеристик звуковых полей в областях, сколь угодно близких к угловым точкам. Если же основной интерес представляют характеристики поля в точках, удаленных от угловых, то, как показывает опыт многочисленных расчетов, достаточную точность оценок можно получить с использованием метода простой редукции при удержании в конечной системе нескольких десятков уравнений.

Аналитические представления звукового поля, построенные в рамках метода частичных областей, всегда точно удовлетворяют уравнению Гельмгольца при любом количестве удерживаемых в рядах слагаемых. Поэтому в основу оценок точности решения задачи в целом следует положить оценку точности выполнения условий сопряжения на границах частичных областей.

Пусть числа  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$  определяют количество учитываемых мод в соответствующих частичных областях. Для оценки качества выполнения условий сшивания определим невязку как отношение модуля разности характеристики звукового поля (давления или колебательной скорости) слева и справа от границы раздела к амплитуде поля в волне, набегающей из области I при  $r = r_0$ .

Обратимся к анализу данных расчета для волновода, показанного на рис. 1, а. На рис. 2 представлены графики невязки по давлению  $\delta_p$  (сплошные линии) и колебательной скорости  $\delta_v$  (штриховые линии) на границе раздела областей  $r = r_0$  при следующих значениях параметров:  $s=0$  (рис. 1, а),  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $r_0 = \lambda$ ,  $N_1 = 7$ ,  $N_2 = N_5 = 30$ . Здесь  $\lambda$  – длина звуковой волны в свободном пространстве. Набегающей на открытый конец волновода является нулевая мода ( $q=0$ ). Рис. 2, а соответствует решению системы уравнений (15), т.е. случаю, когда определяющим для коэффициентов  $C_n$  является условие сопряжения по давлению. При использовании для определения этих коэффициентов условия сопряжения по скорости (система

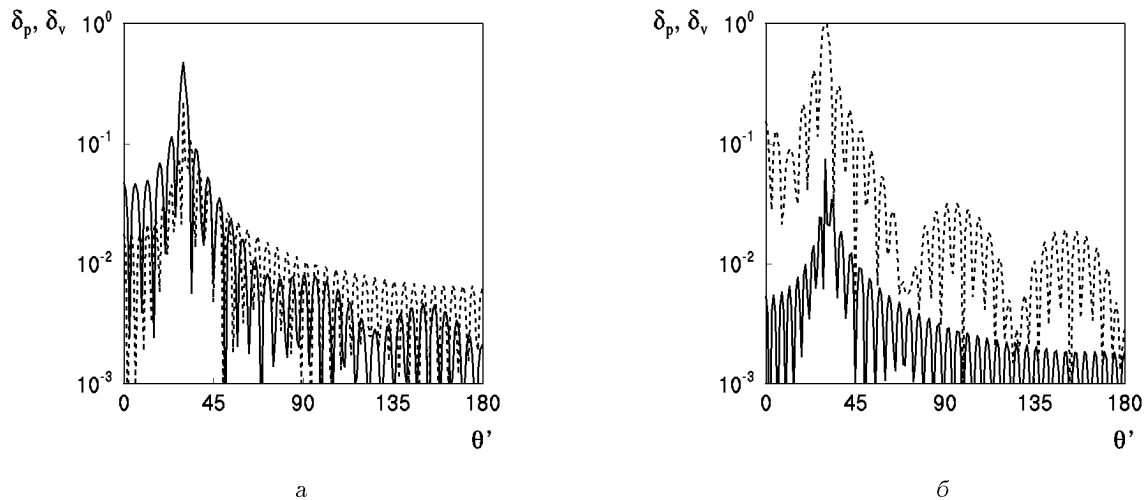


Рис. 2. Значения невязок по давлению и колебательной скорости на границе областей I, V и II (см. рис. 1, а) при  $\theta_0=60^\circ$ ,  $r_0=\lambda$ ,  $q=0$ : а - решение системы уравнений (15), б - решение системы уравнений (16), сплошные -  $\delta_p$ , штриховые -  $\delta_v$

уравнений (16)) величина невязки представлена на рис. 2, б. В силу симметрии поля данные приведены только для углов  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ . Интервал углов  $\theta'=(0^\circ, 30^\circ)$  определяет границу областей I и II, а диапазон углов  $\theta'=(30^\circ, 180^\circ)$  - границу областей II и V.

Прежде всего, из данных рисунков следует, что невязка в выполнении условий сопряжения возрастает при подходе к угловой точке. Учитывая наличие локальной особенности в окрестности ребра можно указать на некоторый парадокс. Дело в том, что в связи с этой особенностью должно наблюдаться такое поведение невязки, когда с ростом числа уравнений в конечной системе должна возрастать невязка в выполнении условий по скорости в угловой точке. Одновременно должно наблюдаться сужение области углов, в которой эта невязка заметна. Невязку можно считать малой, например, при  $\delta \leq 0.1$ . Невязка по давлению должна уменьшаться с ростом числа уравнений на всем протяжении границы. Это положение подтверждается данными конкретных расчетов.

Характерной чертой представленных функций невязки является высокая степень изменчивости по угловой координате. Вычисления были выполнены с шагом по углу в один градус. Следует отметить, что "изрезанность" кривых является некоторым качественным указанием на достоверность вычислений. Дело в том, что при ограничении числа уравнений в бесконечной системе вносится погрешность в выполнение условий сопряжения как раз по высоким гармоникам в соответствующих

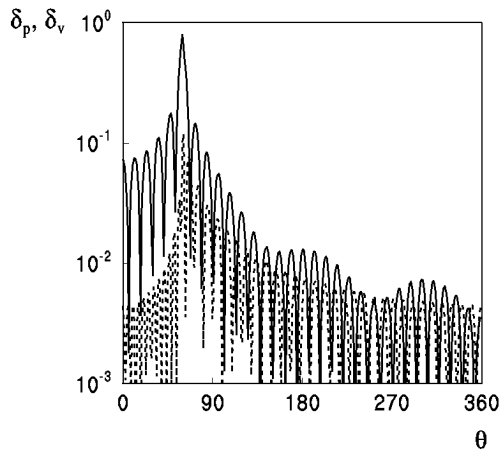
рядах Фурье.

Сопоставление данных рис. 2, а и б является основой для выработки рекомендаций по преодолению неоднозначности в процедуре формирования бесконечной системы алгебраических уравнений, отвечающих условиям сопряжения. Несмотря на то, что невязка по давлению на рис. 2, а несколько больше чем на рис. 2, б, очевидное улучшение в выполнении условий сопряжения по скорости на рис. 2, а позволяет рекомендовать для практического использования тот вариант записи условий сопряжения, в котором система уравнений для коэффициентов  $C_n$  формируется по условиям для давления.

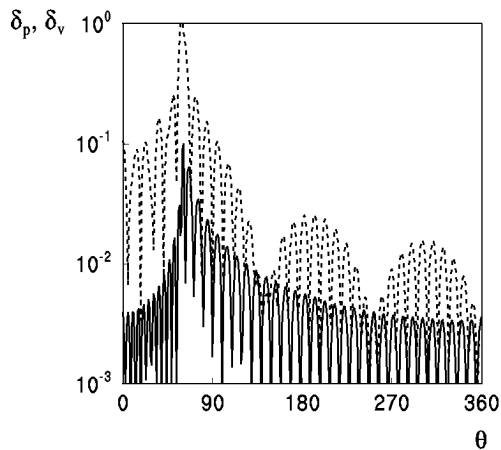
К такому же выводу можно прийти, анализируя данные расчетов для других геометрий волновода. Количественные оценки невязок по границам раздела областей для волновода, изображенного на рис. 1, б, показаны на рис. 3. По-прежнему звуковое поле генерируется нулевой набегающей модой ( $q=0$ ), а при усечении рядов оставлено следующее число гармоник:  $N_1=11$ ,  $N_2=N_3=N_5=30$ . Пусть  $s=0.5\lambda$ ,  $\theta_0=60^\circ$ ,  $r_0=\lambda$ ; тогда  $r_1=r_0-s=0.5\lambda$ .

На рис. 3, а, б приведены графики невязки по давлению  $\delta_p$  и скорости  $\delta_v$  на границе областей I, V и III ( $r=r_0$ ), а на рис. 3, в - на границе областей III и II ( $r=r_1$ ). При этом рис. 3, а соответствует системе уравнений (17), а рис. 3, б - системе уравнений (18). Графики невязки  $\delta_p$  и  $\delta_v$  на границе между областями III и II (рис. 3, в) практически совпадают для обоих вариантов формирования условий шивания. В качестве некоторого общего выво-

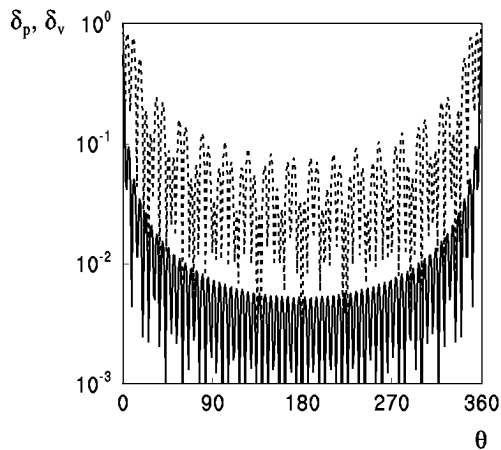




a



b



v

Рис. 3. Невязки по давлению и колебательной скорости на границах областей (см. рис. 1, б) при  $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $r_0 = \lambda$ ,  $s = 0.5\lambda$ ,  $q = 0$ :

а - I, V и III при решении системы уравнений (17),  
 б - I, V и III при решении системы уравнений (18),  
 в - III и II (для обоих вариантов),  
 сплошные -  $\delta_p$ , штриховые -  $\delta_v$

да отметим, что, несмотря на усложнение геометрии области, точность решения граничной задачи остается такой же высокой. Итак, при формировании условий сшивания звуковых полей на границах частичных областей (см. рис. 1) определимся следующим образом: на границе областей I, V и переходной зоны будем связывать полноту и ортогональность системы угловых функций переходной зоны с уравнением для давления, как это имеет место в системах (15) и (17). На границе, расположенной внутри переходной зоны, возможен один из рассмотренных выше вариантов.

Как уже отмечалось выше, важным интегральным критерием оценки точности решения граничной задачи является закон сохранения энергии. В рассматриваемых случаях генерации звуковых полей падающей нормальной волной в волноводе этот закон выражает тот факт, что сумма потоков энергии на бесконечность в области V и отраженной энергии в волноводе должны быть равны потоку энергии в падающей волне. Это равенство удобно описывать соотношением между безразмерными коэффициентами отражения и прохождения. Из закона сохранения энергии вытекает условие

$$V^{(q)} + W^{(q)} = 1. \quad (19)$$

Коэффициент прохождения  $W^{(q)}$  определяется как отношение среднего потока мощности волны в области V к среднему потоку мощности  $q$ -ой нормальной волны, набегающей на открытый конец волновода в области I. После ряда преобразований получаем следующую формулу для коэффициента прохождения:

$$W^{(q)} = \frac{2\pi - \theta_0}{\theta_0 \varepsilon_q} \sum_{n=0}^{\infty} |B_n|^2 \varepsilon_n, \quad (20)$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_n = 0.5$ ,  $n > 0$ . Согласно соотношению (20), коэффициент прохождения  $W^{(q)}$  представляется в виде суммы энергетических коэффициентов возбуждения нормальных волн в области V, или иначе, о выражении (20) можно говорить как о сумме коэффициентов трансформации  $q$ -ой нормальной волны области I в нормальные волны области V. Аналогично коэффициент отражения  $V^{(q)}$  представляется в виде

$$V^{(q)} = \frac{1}{\varepsilon_q} \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 \varepsilon_n. \quad (21)$$

При вычислении энергетических коэффициентов отражения и прохождения звука получаем такие результаты:

при решении системы (17)

$$V^{(0)}=0.102, \quad W^{(0)}=0.898, \quad V^{(0)}+W^{(0)}=1.00,$$

при решении системы (18)

$$V^{(0)}=0.089, \quad W^{(0)}=0.911, \quad V^{(0)}+W^{(0)}=1.00.$$

Из приведенных данных видно, что даже на уровне интегрального критерия оценки точности решения имеется некоторое различие в оценке отдельных составляющих потока энергии. Однако величина этого различия незначительна и можно говорить, что оба подхода к формированию бесконечной системы являются равноправными.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе развит общий подход к решению задачи об излучении звука из открытого нерегулярного волновода специального типа. Определенная несимметрия в граничных поверхностях волновода в принципе открывает возможность контроля структуры излученного поля. Разбиение всей области существования звукового поля на некоторые частичные подобласти позволило построить аналитические представления для функции потенциала. Показано, что в рассмотренных задачах возникает неоднозначность в процедуре формирования алгебраических соотношений, выражающих условия сопряжения поля на границах под областей. Путем анализа результатов конкретных расчетов даны рекомендации по преодолению неоднозначности с точки зрения повышения точности расчета при одном и том же количестве вовлеченных в рассмотрение гармоник в представлении функции потенциала. Возможности получения эффективного решения сложных граничных задач подтверждены оценками энергетика процесса излучения и отражения звука. Анализ конкретных результатов, показывающих влияние геометрических и физических параметров волноводов на характеристики ближнего и дальнего поля, будет приведен во второй части работы.

1. Зоммерфельд А. Оптика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 486 с.
2. Канторович М. И., Лебедев Н. Н. Об одном методе решения некорректных задач теории дифракции и родственных ей проблем // ЖЭТФ. – 1938. – N 10–11. – С. 1192–1206.
3. Малюжинец Г. Д. Развитие представлений о явлениях дифракции // УФН. – 1959. – 69, N 2. – С. 321–384.
4. Buckingham M. J., Tolstoy I. An analytical solution for benchmark problem. 1. The ideal wedge // J. Acoust. Soc. Amer. – 1990. – 87. – P. 1511–1513.
5. Davis A. M. J. Two dimensional acoustic diffraction by penetrable wedge // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – 100, N 3. – P. 1316–1324.
6. Barton P. G., Rawlins A. D. Acoustic diffraction by semi-infinite plane with different face impedances // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1999. – 52, N 3. – P. 469–487.
7. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Amer. – 1962. – 52. – P. 116–130.
8. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. – М.: Сов. радио, 1962. – 243 с.
9. Шестопапов В. П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1971. – 400 с.
10. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Том 2. – М.: ГИИТЛ, 1955. – 503 с.
11. Levine H., Schwinger J. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe // Phys. Rev. – 1948. – 73. – P. 383–406.
12. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966. – 475 с.
13. Lavrie J. B., Abrachams I. D., Linton C. M. Acoustic radiation from two opposed semi-infinite coaxial cylindrical waveguides. I. Overlapping edges // Wave motion. – 1993. – 18. – P. 121–142.
14. Abrachams I. D., Wickham G. R. On the scattering of sound by two parallel staggered plates. I. Explicit matrix Winer – Hopf factorization // Proc. Roy. Soc. London. – N A420. – 1988. – P. 131–156.
15. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Том 1. Дифракционные решетки. – К.: Наук. думка, 1986. – 231 с.
16. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Том 2. Волноводные неоднородности. – К.: Наук. думка, 1986. – 214 с.
17. Сиренко Ю. К., Шестопапов В. П., Яшик В. В. Аномальные собственные режимы, междутиповые колебания и волны открытых периодических резонаторов и волноводов // Радиотехн. и электрон. – 1990. – 35, N 12. – С. 2507–2518.
18. Шендеров Е. Л. Рассеяние плоской звуковой волны на полубесконечном волноводе с жестким фланцем // Акуст. ж. – 1998. – 44, N 1. – С. 106–115.
19. Sridhara B. S., Crocker M. J. Review of theoretical and experimental aspects of acoustical modeling of engine exhaust systems // J. Acoust. Soc. Amer. – 1994. – 95, N 1. – P. 2363–2370.
20. Ouis D., Lindblad S. G. Scattering by a Horizontal Strip on a Hard Side Wall // Proc. of 16-th Int. Congr. on Acoustics. – Seattle, 1998. – P. 2813–2814.
21. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наук. думка, 1986. – 238 с.
22. Vovk I. V., Grinchenko V. T. Interaction of electroacoustic transducers in an array // Acoust. Phys. – 1996. – 42, N 2. – P. 159–165.