

УДК 529.532.539

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА В СОСУДЕ

В. Д. КУБЕНКО*, А. В. КУЗЬМА**

* Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко, Киев

** Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 21.06.99 ◊ Пересмотрено 20.08.99

Рассматриваются осесимметричные колебания полуограниченного столба идеальной сжимаемой жидкости, возмущаемой пульсациями или осцилляциями сферического тела в круговом цилиндрическом сосуде. Поле потенциала строится в виде суммы рядов по сферическим волновым функциям и решений уравнения Гельмгольца в интегральной форме в цилиндрических координатах. Краевая задача, учитывающая условия на теле, жесткой цилиндрической стенке и плоской свободной поверхности, сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения потенциала, решаемой методом усечения. При построении поля давления подробно рассмотрены случаи длин волн, не меньших радиуса полости, первые два собственных значения волнового числа. Рассматривается интегральная сила, действующая на пульсирующее у свободной поверхности тело, анализируются ее осредненные за период значения. Результаты сравниваются с имеющимися для полупространства сжимаемой жидкости, бесконечных столбов несжимаемой и сжимаемой жидкостей.

Розглянуто осесиметричні коливання напівобмеженого стовпа ідеальної стисливої рідини, що збурюються пульсаціями або осциляціями сферичного тіла в круговій циліндричній посудині. Поле потенціалу будується у вигляді суми рядів по сферичним хвильовим функціям та розв'язкам рівняння Гельмгольца в циліндричних координатах, представленим в інтегральній формі. Гранична задача, в якій враховано умови на тілі, жорсткій циліндричній стінці та площинній вільній поверхні, зведена до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу потенціалу та проведено її розв'язання методом зрізання. При побудові поля тиску докладно розглянуто випадок довжин хвиль збурення, не менших за радіус циліндра, перші два власні значення хвильового числа. Розглядається сила, що діє на пульсуюче поблизу вільної поверхні тіло, та аналізуються її осереднені за період коливань значення. Результати порівнюються з відомими для напівпростору стисливої рідини, для нескінченних стовпів нестисливої та стисливої рідин.

The axisymmetrical oscillations of ideal compressible liquid column with pulsing or oscillating spherical body into circular cylindrical container are considered. Field of velocity potential built as combination of series of spherical functions for Helmholtz's equation and solutions in integral form for cylindrical coordinates. The boundary conditions on spherical surface, rigid cylindrical wall and on flat free surface are taken into account and boundary problem reduced to infinite algebraic system for coefficients of potential that solved by truncation method. The result for stress field for wavelength longer radius, first critical wavelengths are expounded. Hydrodynamic forces for pulsating body are considered and averaged over period values analyzed. All result compared with ones for semi-infinite space and for incompressible or compressible endless liquid columns in cylindrical cavity.

ВВЕДЕНИЕ

Возбуждение колебательных режимов движения в многофазных средах может приводить как к негативным для технологического процесса последствиям (кавитация, образования газовых скоплений в трубопроводах и т. д.), так и использоваться для интенсификации дегазации жидкостей, флотации, теплообмена в средах, при очистке и аэрации промышленных стоков, для создания однородных смесей, при разрушении газовых пробок в трубах и капиллярах и т. п. [1–4], что объясняет интерес к исследованию колебаний сред со включениями. Внешние (заданные на бесконечности) периодические воздействия на жидкий объем с малыми сферическими включениями исследованы наиболее подробно для случая низкочастотных (при пренебрежении сжимаемостью жидкости) колеба-

ний [1, 5–8] и в акустическом приближении [8–10]. Предположения о малости радиусов и однородности свойств носимых частиц относительно характерных размеров системы (средних расстояний между частицами, расстояний до внешних границ, длин волн) позволили использовать уравнения колебаний, полученные для отдельного включения в неограниченном объеме жидкости, распространив его на всю фазу и использовав различные процедуры осреднения характеристик макрооднородной среды [1, 8, 10, 11].

Поведение включения и жидкости вблизи внутреннего источника колебаний (немалого соседнего тела, пульсирующего газового скопления, излучателя) требует построения более сложных макронеоднородных полей возмущения. Поэтому известные результаты основываются в основном на аналитических решениях задач о взаимодействии

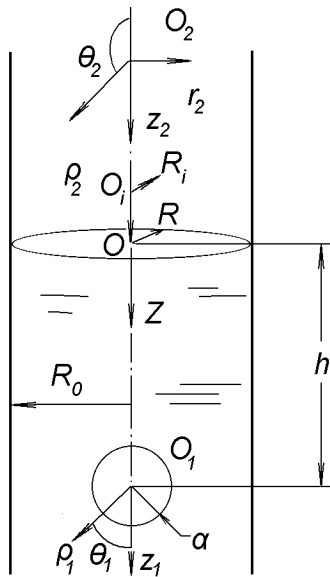


Рис. 1. Системы координат

двух пульсирующих или осциллирующих сфер в неограниченном объеме идеальной несжимаемой или сжимаемой жидкостях [12–15] или дифракции длинной волны на двух малых шарах в озвучиваемом жидком пространстве [16–18]. Для колеблющихся тел в последнее время использованы более общие модели упругих сфер, немалых пузырей и сферических оболочек [19–21].

Построение полей потенциала и давления в ограниченном объеме жидкости с внутренним источником колебаний – необходимый этап исследований колебательных явлений как в гомогенных, так и в многофазных средах. Однако по сравнению со случаями внешних периодических воздействий в неограниченном объеме сложность рассматриваемых краевых задач при их точной постановке существенно увеличивается. Это объясняется необходимостью совместного удовлетворения граничных условий на поверхности немалого колеблющегося в жидкости тела и на внешних границах жидкости, что удается сделать лишь для некоторых канонических или близких к ним границ [21, 22]. Кроме того, при исследовании колебаний системы в целом становится заметным обратное влияние жидкости на источник колебаний, проявляющееся

в увеличении присоединенной массы движущегося в ограниченном жидком объеме тела [22, 23], значительным изменениям полей давления и гидродинамических сил вблизи границ [2, 15], что особенно сказывается для такого податливого объекта, как газовый пузырь или скопление газа в столбе жидкости [2, 3].

Для преодоления указанных трудностей в большинстве работ, посвященных возбуждению колебаний в трубах, скважинах, волноводах размерами колеблющихся тел полностью пренебрегают по сравнению с характерными размерами и рассматривают точечные источники [25, 26].

Потенциал скорости движения идеальной несжимаемой жидкости в бесконечной в осевом направлении цилиндрической полости при возбуждении осесимметричных колебаний сферой конечных размеров построен в [2]. Учет влияния дополнительной конечной границы в полости проведен в [6, 27, 28], при этом в [28] исследовано взаимодействие двух колеблющихся на оси столба жидкости сфер, воздействие пульсирующей в полости сферы на малое включение рассматривалось в [6], а воздействие свободной поверхности столба жидкости в сосуде при исследовании колебаний сферического газового объема учтено в [27].

Для случая колебаний бесконечного столба идеальной сжимаемой жидкости, вызываемых пульсирующей на оси круговой цилиндрической полости сферой, потенциал в точной постановке построен в [29] на основании сведения краевой задачи для уравнения Гельмгольца к системе бесконечных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения потенциала.

В настоящей работе рассматриваются осесимметричные колебания, возбуждаемые сферическим телом в полуограниченном столбе сжимаемой жидкости в круговой цилиндрической полости. В отличие от [29] исследуемая краевая задача для потенциала включает условие на торцевой границе объема – свободной поверхности жидкости. Проводится построение потенциала и давления для двух типов колебаний тела – пульсации объема или осцилляции центра. Также рассматривается интегральная сила, действующая на пульсирующую у торцевой границы сферу, и показано, что ее среднее за период значение не равно нулю в отличие от случая бесконечного столба жидкости. Графические результаты получены для длин волн, не меньших радиуса цилиндра, первых собственных частот и предельного случая – несжимаемой жидкости, а также проведено сравнение с результатами для неограниченной полости и полупространства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим осесимметричные движения идеальной сжимаемой жидкости в круговой цилиндрической полости радиуса R_0 , возбуждаемые заданными колебаниями сферического тела радиуса $a(t)$. Перемещения жидкости и колебания тела в сосуде определим в цилиндрической системе координат $ORZ\varphi$, полюс которой свяжем с торцевой границей – свободной поверхностью – совпадающей с плоскостью $Z=0$, а ось \vec{OZ} направим по оси цилиндрической полости вглубь жидкости (рис. 1). Также введем основную сферическую систему координат $O_1\rho_1\theta_1\varphi_1$, полюс которой совпадает с центром сферы и вспомогательную систему $O_2\rho_2\theta_2\varphi_2$. Положение полюса O_2 последней координатной системы симметрично полюсу O_1 первой системы относительно поверхности раздела $Z=0$, а координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} l &= O_1O_2 = 2h, \\ \rho_1 \sin \theta_1 &= \rho_2 \sin \theta_2, \\ \rho_2 &= (\rho_1^2 + l^2 + 2l\rho_1 \cos \theta_1)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично вводим цилиндрические системы координат $O_1r_1z_1\varphi$ и $O_2r_2z_2\varphi$:

$$r_j = R, \quad z_j = Z + (-1)^j h, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Рассмотрим заданные колебания поверхности сферического тела: изменение радиуса a (пульсацию объема)

$$a = a_0(1 + \alpha e^{-i\omega_1 t}) \tag{3}$$

и перемещения центра O_1 (осцилляцию)

$$h = OO_1 = h_0(1 + \beta e^{-i\omega_2 t}), \quad \alpha, \beta \ll 1. \tag{4}$$

Потенциал скорости возмущенного движения жидкости будем отыскивать в виде [2], но для удобства дальнейших выкладок разделим вклады в поле потенциала, вносимые каждым типом движения:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-i\omega t} = \Phi_1 e^{-i\omega_1 t} + \Phi_2 e^{-i\omega_2 t}. \tag{5}$$

Здесь ω_1 – круговая частота пульсации поверхности тела; ω_2 – частота его осцилляционных колебаний; потенциальные функции Φ_1, Φ_2 находятся при решении соответствующих краевых задач для уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \Phi_k + \lambda_k^2 \Phi_k = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \rho_1} = v_n &= i(\alpha a_0 \omega_1 \delta_{1,k} + \beta h_0 \omega_2 \cos \theta_1 \delta_{2,k}), \\ \rho_1 &= a, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial R} = 0, \quad R = R_0, \tag{8}$$

$$\Phi_k = 0, \quad Z = 0, \quad k = 1, 2, \tag{9}$$

где $\lambda_k = \omega_k/c$; c – скорость звука в жидкости; v_n – нормальная скорость на поверхности тела. Условия (8), (9) заданы на боковой поверхности сосуда и свободной поверхности жидкости соответственно.

Решение задач (6)–(9) построим на основании подхода [2, 16] в виде сумм волновых гармонических функций в связанной с телом сферической системе координат $O_1\rho_1\theta_1\varphi_1$, в цилиндрической системе $ORZ\varphi$ и во вспомогательной сферической системе координат $O_2\rho_2z_2\varphi$:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} [h_n^{(1)}(\lambda_k \rho_1) P_n(\cos \theta_1) + \\ &+ (-1)^{n+1} h_n^{(1)}(\lambda_k \rho_2) P_n(\cos \theta_2)] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} B^{(k)}(\xi) J_0(\sigma_k R) e^{i\xi Z} d\xi, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sigma_k = \begin{cases} \sqrt{\lambda_k^2 - \xi^2}, & |\xi| < \lambda_k, \\ i\sqrt{\xi^2 - \lambda_k^2}, & |\xi| > \lambda_k, \end{cases} \quad k = 1, 2. \tag{11}$$

Функции $P_n(\cos \theta_j)$ представляют полиномы Лежандра, $J_0(\lambda_k \rho_j)$ – функция Бесселя, $h_n^{(1)}(\lambda_k \rho_j)$ – сферические функции Ханкеля первого рода, $j = 1, 2$. Неизвестные коэффициенты $A_n^{(k)}$ и функция $B^{(k)}(\xi)$ определяются при удовлетворении условий (7), (8).

Перейдем к безразмерным координатам следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_k &= \Phi_k c^2 / R_0^4, \quad k = 1, 2, \\ \bar{x}_i &= x_i / R_0, \quad i = \overline{1, 8}, \\ \bar{t} &= tc / R_0, \quad \bar{\lambda}_k = \omega_k R_0 / c, \\ &\bar{p}p / (\rho c^2), \end{aligned} \tag{12}$$

где x_i представляют прямолинейные координаты введенных систем; ρ – плотность жидкости; p – гидродинамическое давление. В дальнейшем используем только безразмерные величины, черточки над ними будем опускать. Переход от сферических волновых функций, представленных в системах координат $O_j\rho_j\theta_j\varphi$, к решениям (6) в соответствующих цилиндрических системах координат

нат $O_j z_j r_j \varphi$, $j=1, 2$ проведем по формуле [2, 30]

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(k)} (-1)^{m+1} h_m^{(1)}(\lambda_k \rho_j) P_m(\cos \theta_j) = \\ = \frac{1}{2\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(k)} i^{-m} P_m\left(\frac{\xi}{\lambda_k}\right) \right] \times \\ \times H_0(\sigma_k r_j) e^{i\xi z_j} d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Представим Φ_k в системе координат $ORZ\varphi$, преобразовав соотношение (10) с учетом формулы (13) и связи цилиндрических координатных систем (2):

$$\begin{aligned} \Phi_k(R, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} [A^{(k)}(\xi, h) H_0^{(1)}(\sigma_k R) + \\ + B^{(k)}(\xi, h) J_0(\sigma_k R)] e^{i\xi Z} d\xi, \\ A^{(k)}(\xi, h) = \frac{1}{2\lambda_k} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} A_m^{(k)} \times \\ \times [e^{-i\xi h} + (-1)^{m+1} e^{i\xi h}] P_m\left(\frac{\xi}{\lambda_k}\right), \\ k = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

После подстановки этих выражений в условие (8) на боковой стенке сосуда получим явный вид для функций $B^{(k)}(\xi)$:

$$B^{(k)}(\xi, h) = -\frac{H_1^{(1)}(\sigma_k)}{J_1(\sigma_k)} A^{(k)}(\xi, h). \quad (16)$$

Отметим, что функция $B^{(k)}(\xi)$ имеет конечное число простых полюсов на действительной оси, представляющих нули функции $J_1(\sigma_k)$, поэтому интеграл в соотношении (14) понимаем в смысле главного значения Коши и для его вычисления может быть использована теория вычетов при применении подхода вырезания под областей [25, 31]. Количество полюсов ξ_p подынтегральной функции уменьшается для малых λ_k (для больших длин волн), а сами полюса находятся из соотношений

$$\sigma_k = \alpha_p, \quad J_1(\alpha_p) = 0 \quad \text{для} \quad |\xi_p| \leq \lambda_k. \quad (17)$$

Дальнейший анализ выражений для потенциала будет проведен в следующем параграфе после замыкания задачи для неизвестных функций и коэффициентов.

Из формул (14)–(16) следует, что условие (9) на свободной поверхности будет выполняться при любых значениях коэффициентов $A_m^{(k)}$. Для определения системы уравнений относительно $A_m^{(k)}$ представим потенциальные функции в сферической

системе координат $O_1 \rho_1 \theta_1 \varphi$. Воспользуемся теоремами сложения [21] для сферических волновых функций $h_m^{(1)}(\lambda_k \rho_2) P_m(\cos \theta_2)$ и представлением ограниченного решения уравнения (6) в цилиндрических координатах через сферические волновые функции [2, 30]

$$\begin{aligned} e^{i\xi z_1} J_0(\sigma_k r_1) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} i^m (2m+1) \times \\ \times P_m\left(\frac{\xi}{\lambda_k}\right) j_m(\lambda_k \rho_1) P_m(\cos \theta_1), \\ k = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi(\rho_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(k)} P_n(\cos \theta_1) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n^{(k)} h_n^{(1)}(\lambda_k \rho_1) + [B_n^{(k)} + C_n^{(k)}] \times \\ \times j_n(\lambda_k \rho_1)\} P_n(\cos \theta_1), \end{aligned} \quad (19)$$

где коэффициенты имеют вид

$$B_n^{(k)} = \frac{(2n+1)}{\lambda_k} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} A_m^{(k)} Q_{kmn}^{(1)}(l), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Q_{kmn}^{(1)}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sigma_k)}{J_1(\sigma_k)} [1 + (-1)^{m+1} e^{-i\xi l}] \times \\ \times P_m\left(\frac{\xi}{\lambda_k}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\lambda_k}\right) d\xi, \end{aligned} \quad (21)$$

$$C_n^{(k)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(k)} Q_{knp}^{(2)}(l), \quad k = 1, 2. \quad (22)$$

Так как при любом конечном значении λ_k подынтегральная функция в выражении (21) имеет те же особенности на действительной оси, что и в формулах (14)–(16), то для вычисления главных значений (21) применим тот же подход [31]. Для малых значений $\lambda_k < \alpha_1 = 3.8317$ (длинные волны по сравнению с радиусом полости) подынтегральная функция имеет два полюса при $\xi_{1,2} = \pm \lambda_k$. При переходе в выражениях для потенциала к предельному случаю несжимаемой жидкости, рассматриваемому в дальнейшем, отметим, что $Q_{kmn}^{(1)}(l, \lambda_k)$ вблизи значения $\lambda_k = 0$ имеют особенность порядка

$$Q_{kmn}^{(1)}(l, \lambda_k) = O\{[\lambda_k^2 P_m(\lambda_k) P_n(\lambda_k)]^{-1} \sin^2(\lambda_k l)\}.$$

Нетрудно показать, пользуясь результатами [27, 32] и асимптотическими формулами для

функций Бесселя, что будут иметь место предельные переходы

$$Q_{kmn}^{(1)}(l)P_m(\lambda_k)P_n(\lambda_k)\frac{\pi i}{2^{m+n}}Q_{mn}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\xi)}{I_1(\xi)} \xi^{m+n} [1 + (-1)^{m+1} e^{i\xi l}] d\xi, \quad (23)$$

$$Q_{kmn}^{(1)}(l)P_m(\lambda)P_n(\lambda)\frac{\pi i}{2^{m+n}}q_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\xi)}{I_1(\xi)} \xi^{m+n} d\xi \quad (m+n) \neq 0, \quad (24)$$

где функции $Q_{mn}(l)$ рассмотрены в работе [27] при исследовании колебаний сферического газового скопления в цилиндрическом сосуде с несжимаемой жидкостью, а q_{mn} – в случае неограниченного столба несжимаемой жидкости в бесконечной полости [2]. Значения q_{mn} табулированы в [32], там же приведен метод вычисления q_{mn} с помощью теории вычетов.

Функции $Q_{knp}^{(2)}(l)$ определяются по приведенным в работах [16, 21] формулам при значениях координат полюса O_2 : $\rho_{12}=l, \theta_{12}=\pi$ в системе координат $O_1\rho_1\theta_1\varphi$

$$Q_{knp}^{(2)} = 2i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^\sigma b_\sigma^{(n0p0)} \times h_\sigma(\lambda_k l) P_\sigma(\cos \pi), \quad (25)$$

$$b_\sigma^{(n0p0)} = \int_{-1}^1 P_n(x) P_p(x) P_\sigma(x) dx. \quad (26)$$

Там же, а так же в [20], представлены выражения $b_\sigma^{(n0p0)}$ в явном виде через коэффициенты Клебша – Гордона, которые не приводятся здесь из-за своей громоздкости.

Подставив формулы (19)–(22) в условие (7) и приравняв выражения при функциях $P_n(\cos \theta_1)$ одного порядка, получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_n^{(k)}$:

$$A_n^{(k)} - \sum_{m=0}^{\infty} f_{mn}^{(k)} A_m^{(k)} = -\frac{\dot{a}\delta_{0,n}\delta_{1,k} + \dot{h}\delta_{1,n}/2\delta_{2,k}}{\lambda_k h'_n(\lambda_k a)}, \quad (27)$$

где

$$f_{mn}^{(k)} = \frac{j'_n(\lambda_k a)}{h'_n(\lambda_k a)} \left[\frac{i^{n-m}}{\lambda_k} (2n+1) Q_{kmn}^{(1)}(l) + (-1)^{m+k} Q_{knm}^{(2)}(l) \right], \quad (28)$$

$k=1, 2$; $\delta_{i,j}$ – символы Кронекера, точки обозначают производную по времени, а штрихи – полную производную по аргументу. Воспользовавшись ограниченностью $Q_{kmn}^{(1)}, Q_{knm}^{(2)}$ и известными оценками для производных от сферических функций Бесселя

$$\frac{j'_n(\lambda_k a)}{h'_n(\lambda_k a)} = \mp i\pi \frac{\left(\frac{\lambda_k a}{2}\right)^{2n}}{\left(\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\right)}, \quad (29)$$

можно показать, что система (27), (28) является бесконечной алгебраической системой уравнений с определителем нормального типа [33] и может быть с любой степенью точности решена методом редукции. Погрешность вычислений будет уменьшаться с увеличением порядка N редуцированной системы и с уменьшением отношений $a_0/R_0, a_0/l$. При этом для $A_n^{(k)}$ при $a\lambda \ll 1$ справедлива оценка убывания членов системы с ростом n :

$$A_n^{(k)} = O(a\lambda)^{n+1}, \quad (30)$$

которая получается аналогично оценкам решений систем бесконечных алгебраических уравнений, рассмотренных в [21].

2. ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛА И ДАВЛЕНИЯ

Рассмотрим вначале поле потенциала для случая образования длинных по сравнению с радиусом цилиндра волн при малых волновых числах λ_k . При $\lambda_k < \alpha_1 = 3.8317$ главное значение интеграла от $B^{(k)}(\xi)$ в (14) можно представить через значения вычетов в точках $\xi = \pm \lambda_k$ на вещественной оси [31]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B^{(k)}(\xi) J_0(\sigma_k R) e^{i\xi Z} d\xi = \pi i \sum_{\substack{\xi=\pm\lambda_k \\ \sigma_k=0}} \text{Res}[B^{(k)}(\xi) J_0(\sigma_k R) e^{i\xi Z}]. \quad (31)$$

Учитывая, что $a < 1$ и оценку (30), получаем следующую формулу для поля потенциала в случае $a\lambda \ll 1$:

$$\Phi_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{*(k)} (a\lambda_k)^{n+1} [h_n^{(1)}(\lambda_k \rho_1) P_n(\cos \theta_1) + (-1)^{n+1} h_n^{(1)}(\lambda_k \rho_2) P_n(\cos \theta_2)] + \pi i \sum_{\xi=\pm\lambda_k} \text{Res}[B^{(k)}(\xi) e^{i\xi Z}], \quad (32)$$

где $A_n^{(k)} = A_n^{*(k)}(a\lambda)^{n+1}$, $A_n^{*(k)} = O(1)$.

Отметим, что неоднородность поля в радиальном направлении связана только с быстро затухающим с удалением от тела и торцевой границы первым членом уравнения. Следовательно, для сечений на расстояниях нескольких длин волны значения потенциала слабо зависят от R , и радиальная компонента скорости $\partial\Phi/\partial R = u_r \approx 0$. Для близких к нулю значений волнового числа ($\lambda_k \leq 0.1$) в окрестности нескольких радиусов от тела и границы жидкость можно считать несжимаемой [21]. Предельный переход $\lambda_k \rightarrow 0$ в формуле (10) с учетом (32) дает выражение, соответствующее приведенному в [27] для поля потенциала в полуограниченном столбе несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{*(k)} a^{n+1} \times \\ & \times \left[\frac{P_n(\cos \theta_1)}{\rho_1^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{P_n(\cos \theta_2)}{\rho_2^{n+1}} \right] + \\ & + \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(|\xi|)}{I_1(\xi)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{*(k)} \frac{(-i\xi a)^m}{m!} \times \\ & \times [e^{-i\xi h} + (-1)^{m+1} e^{i\xi h}] d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Если λ_k достигает первого собственного значения $\alpha_1 = 3.8317$, то в формуле (32) появляются дополнительные члены, зависящие от радиальной координаты даже для отдаленных сечений столба жидкости:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\xi = \pm \xi_1 \\ \sigma_k = 0}} \operatorname{Re} s [B^{(k)}(\xi) J_0(\sigma_k R) e^{i\xi Z}], \\ \xi_1 = \sqrt{\lambda_k^2 - \alpha_1^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичные слагаемые возникают, если длина волны уменьшается настолько, что $\lambda_k \geq \alpha_2 = 7.0156$ или $\lambda_k \geq \alpha_p$ и т. д.

Поле гидродинамического давления, возмущенного телом в столбе сжимаемой жидкости, с учетом основных нелинейных членов имеет вид [16]

$$\begin{aligned} p = \rho \left[\sum_k \left(-i\omega_k \Phi_k^{(N)} + \sum_{n=0}^N \frac{\partial \Phi_k^{(N)}}{\partial A_n^{(k)}} \frac{\partial A_n^{(k)}}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi^{(N)}}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \Phi^{(N)}}{\partial h} \dot{h} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi^{(N)})^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(N)}}{\partial t} \right)^2 - \vec{\nabla} \Phi^{(N)} \cdot \vec{k} \dot{h} + o(a^{2N+1}) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь использовано условие для давления на свободной поверхности жидкости $p=0$, $Z=0$. Предпоследнее слагаемое отвечает за переносное движение системы координат, связанной с телом, \vec{k} – орт оси $\vec{O}_1 \vec{z}_1$. В случае перехода в формуле (35) к системе $ORZ\varphi$ этот член отсутствует. Потенциал и давление p могут быть определены после решения системы для коэффициентов (27), (28). При этом $\Phi^{(N)}$, $\Phi_k^{(N)}$ соответствуют значениям формул (5), (10), полученным после подстановки решений $A_n^{(k)}$ редуцированной до порядка N ($m, n \leq N$) системы.

Амплитудные значения давления, возмущенного пульсациями (3) или осцилляциями (4) тела, построенные на коаксиальной поверхности $R=0.5$ внутри жидкости, показаны на рис. 2, а, в или б, г соответственно. Рис. 2, а, б соответствуют распределению давления в полуограниченном, а рис. 2, в, г – в бесконечном столбе жидкости. Для возможности сравнения результатов при различных значениях λ и со значениями для несжимаемой жидкости величины p , данные на графиках, отнесены к $p_0 = \rho \alpha \omega_0^2 a_0^3 / R_0$ (а) или $p_0 = \rho \beta h_0 \omega_0^2 a_0^2 / R_0$ (б), а колебания рассматривались при равной величине виброускорения поверхности тела: $\alpha_0 \omega^2 = \beta h_0 \omega^2 = 20$ м/с². Частота $\omega_0 = 2\pi \cdot 2.276 \cdot 10^3$ Гц, что в случае сжимаемой жидкости соответствует $\lambda_k = 0.5$. Остальные параметры имели следующие значения: $\rho = 10^3$ кг/м³, $R_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м, $a_0 = 0.2R_0$, $h_0 = 0.8R_0$. Кривые 1 во всех случаях, кроме (в), где возникает особенность, соответствуют несжимаемой жидкости. Кривые 2–7 построены для $\lambda_k = 0.5, 1.0, 2.0, 3.8317, 5.0, 7.0156$, $k=1, 2$, а показанные прерывистыми линиями кривые 8–11 (только на рис. 2, а, б) – без учета влияния боковых границ сосуда (для полупространства) при тех же λ_k , кроме двух последних значений.

Наибольшие отличия результатов для полуограниченного столба жидкости и полупространства наблюдаются для случая первых собственных частот $\lambda_k = \alpha_{1,2}$ (линии с круглыми белыми маркерами), что, по-видимому, связано со значительно возрастающей ролью отражений от стенок в резонансных случаях. В предельном случае несжимаемой жидкости (кривая 1) наблюдается выравнивание средних скоростей для отдаленных сечений, причем более ярко это проявляется для пульсационных колебаний. Фаза колебаний остается при этом неизменной по всей длине столба жидкости. Сжимаемость среды приводит к образованию областей с разными фазами колебаний, количество которых увеличивается с ростом λ_1 , а длина при-

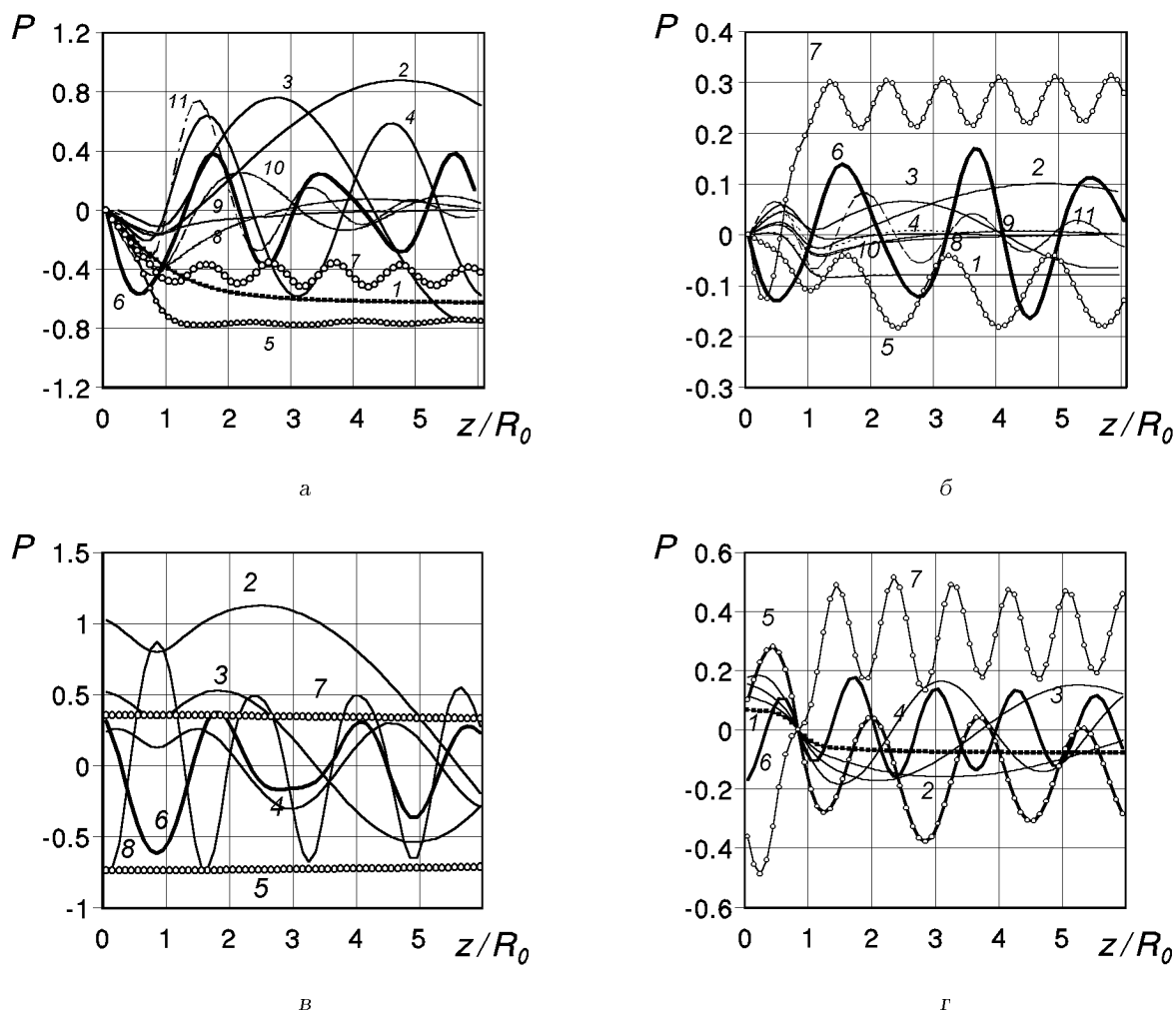


Рис. 2. Амплитудные значения гидродинамического давления для поверхности $R=0.5$, $0 < Z < 6R_0$, возмущенные пульсационными (а, в) или осцилляционными (б, г) колебаниями поверхности сферы с $a_0=0.2R_0$ в полуограниченном (а, б) и бесконечном (в, г) столбах жидкости

мерно соответствует полуволне.

Колебания жидкости, вызванные осцилляциями с теми же значениями виброускорения, что и пульсационные колебания, отличаются меньшими амплитудами давления. Вблизи среднего положения тела находится граница областей, выше и ниже которой колебания проходят в противофазах. Для несжимаемой жидкости таких областей две, при увеличении значений λ_2 количество таких областей увеличивается.

Отличия распределения давления в полуограниченном и бесконечном столбах жидкости (рис. 2, в, г), естественно, наиболее значительно проявляются в области между телом и торцевой границей и ослабевают при удалении на несколько длин волн. При этом несимметрия распределе-

ния поля давления по поверхности тела, связанная с влиянием отражения от свободной поверхности, может приводить к возникновению ненулевой интегральной силы, рассматриваемой в следующем разделе.

На рис. 3 показаны значения давления на различных коаксиальных поверхностях $R=0.25, 0.5, 1.0$ (кривые 1–3 и 4–6 соответственно). Рис. 3, а соответствует пульсациям, а рис. 3, б – осцилляциям сферы. Первая группа кривых построена для меньшего, чем α_1 , значения $\lambda_k=1$, вторая группа – для $\lambda_k=\alpha_1$. Кривые 7 и 8, а также 9 и 10 показывают изменение давления для бесконечного столба жидкости на коаксиальных поверхностях наибольшего ($R=1$ – стенка) и наименьшего радиусов ($R=0.25$) соответственно. При этом для двух

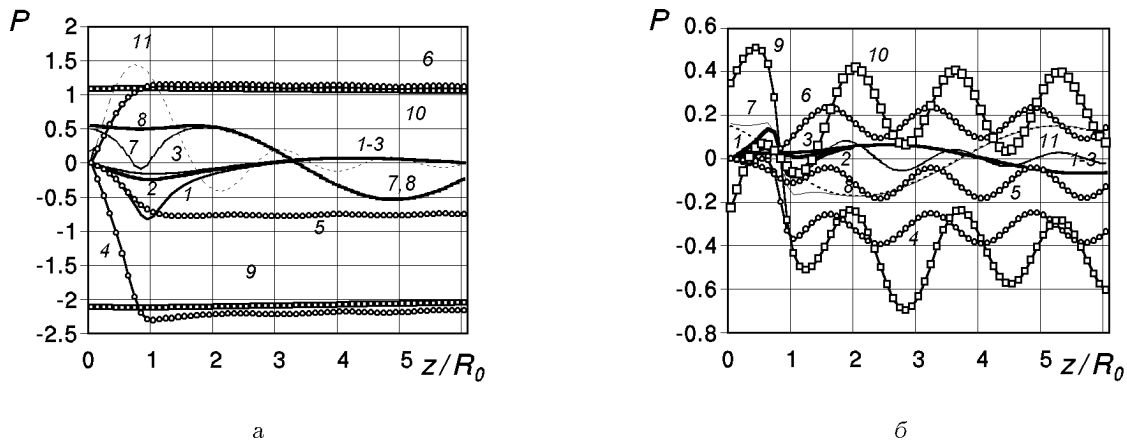


Рис. 3. Значения давления, возмущенного пульсирующей (а) и осциллирующей (б) сферами, построенные для точек на различных коаксиальных поверхностях ($R=0.25, 0.5, 1$) в столбе жидкости

первых кривых значения $\lambda_k = 1$, для второй группы – $\lambda_k = \alpha_1$. Штриховой линией в резонансном случае показаны значения давления на поверхности $R=0.25$ при отсутствии боковой границы – кривые 11, характер которых более существенно, чем для меньших волновых чисел, отличается от соответствующих значений (кривые 4, 9) в полуограниченной и бесконечной цилиндрических полостях. Влияние боковой границы в резонансном случае проявляется наиболее отчетливо, наличие стенки сказывается для всех значений радиуса R до расстояний $3 \div 4R$. Более существенно значения p в радиальном направлении изменяются при пульсационных колебаниях. Для значений $\lambda_k = 1$, как и для других, меньших критического α_1 , отличия значений давления по R в сечениях с $Z \geq 3R_0 = 3$ незначительны. Это подтверждает выводы, полученные при анализе выражений для давления и потенциала.

Отметим, что выявление дополнительного влияния торцевой границы, приводящего к возникновению краевого резонанса, представляет интерес при дальнейших исследованиях. Характер его проявления менее резкий, чем у рассмотренных радиальных резонансов [22].

Расчеты для других значений среднего радиуса тела показали, что отражения от внешних границ проявляются в резонансных случаях уже при соотношениях размеров $a_0/R_0 = 0.05 \div 0.1$. При этом первые резонансные частоты колебаний могут стать близки (например, при значениях $a_0 = 10^{-3} \text{ м} = 0.1R_0$) к собственным частотам колебаний пузырей в трубках, при исследовании которых размерами включения по отношению к ради-

усу трубы обычно пренебрегают [1].

Рассматриваемая задача для полей потенциала и давления может решаться при соотношениях $a_0/R_0 < 1$, $a_0/h_0 < 1$, так как определитель системы будет иметь нормальный тип во всем этом диапазоне. Однако при приближении a_0 к границам указанного диапазона количество необходимых вычислений значительно возрастает. Кроме того, с физической точки зрения при приближении размера тела к диаметру сосуда (для $a_0/R_0 > 0.5$) видимо требуется дополнительное исследование корректности предположения об идеальности среды для рассматриваемого диапазона частот [17, 23].

3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ТЕЛО ВБЛИЗИ ТОРЦЕВОЙ ГРАНИЦЫ

В случае бесконечного столба сжимаемой жидкости ($h \rightarrow \infty$) средняя за период колебаний гидродинамическая сила, действующая на тело, равна нулю из-за симметрии изменения поля давлений относительно центрального горизонтального сечения тела. Воздействие боковых границ выразится лишь в увеличении присоединенной массы движущегося тела по сравнению со случаем неограниченной жидкости [23, 24]. Влияние торцевой границы в случае полуограниченного столба или полупространства несжимаемой жидкости сказывается в возникновении ненулевой средней гидродинамической силы, действующей на пульсирующую сферу и направленной вглубь жидкости [12, 27]. Рассмотрим гидродинамическое воздействие свободной поверхности на колеблющееся

тело в полуограниченном столбе сжимаемой жидкости.

Силу гидродинамического давления определим по формуле

$$\begin{aligned}
 F = F_z &= -\operatorname{Re} \int p \vec{k} \cdot \vec{n}_1 dS = \\
 &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} p \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi.
 \end{aligned} \quad (36)$$

Подставив в эту формулу выражение (35) для p , получим с учетом ортогональности полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{m_l}{2a_0} \operatorname{Re} \times \\
 &\times \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} D_1^{(k)} + \sum_{m=0}^N \phi_m D_m^{(k)} D_{m+1}^{(k)} \right] \Big|_{a=a_0} \right\},
 \end{aligned} \quad (37)$$

где коэффициенты ряда ϕ_m , образованные членами (35), нелинейными относительно скорости, определяются в [16] при вычислении сил взаимодействия для двух тел в неограниченной жидкости (в [28] подобные расчеты проведены для тел в цилиндрической полости с несжимаемой жидкостью). Погрешность, возникающая при пренебрежении нелинейными членами, определяется на основании оценки $A_n^{(k)}$. Член наименьшего порядка малости относительно a_0 имеет вид $O[\delta^2(a_0/R_0)^7]$, где $\delta = \max[\alpha, \beta]$. Рассмотрим осредненную за период колебаний величину гидродинамического воздействия

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F dt, \quad T = 2\pi/\omega_1, \quad (38)$$

определив ее для тела, совершающего пульсационные колебания (3).

Зависимости $\langle F \rangle$ от параметра $l/R_0 = 2h_0/R_0$ для различных значений λ_1 и предельного случая несжимаемой жидкости построены на рис. 4. Кривые 1–4 соответствуют значениям $\lambda_1 = 0, 0.1, 0.5, 1$. В случае несжимаемой жидкости (кривая 1) значение усредненной силы остается положительным для всего интервала l , т.е. сила направлена от свободной поверхности [2, 6]. Кривые 5, 6 показаны для случая бесконечного удаления боковых границ и соответствуют $\lambda_1 = 0.1, 1$. Видно, что в сосуде из-за отражений от боковой границы происходит увеличение амплитуд усредненных сил и замедление убывания средней силы воздействия, что соответствует результатам для давления. Влияние сжимаемости жидкости сказывается в существовании внутри столба жидкости

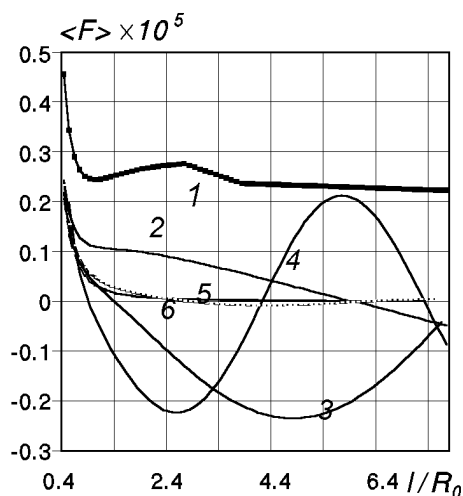


Рис. 4. Осредненные за период колебаний значения гидродинамических сил, действующих на пульсирующее сферическое тело

областей, в которых средние гидродинамические силы будут иметь противоположные направления. При удалении от свободной поверхности размер этих областей стремится к длине полуволны. Наличие соседних областей, в которых силы направлены навстречу, приводит к тому, что для колеблющегося свободного включения (пульсирующего пузыря) возможны положения устойчивого равновесия внутри столба сжимаемой жидкости, что соответствует экспериментальным результатам [1–3, 5, 34].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование влияния ограниченности столба жидкости при его осесимметричных колебаниях, возбуждаемых сферическим телом, позволило учесть при построении полей потенциала и давления конечность таких характерных параметров системы, как отношения радиуса источника колебаний к радиусу сосуда или к глубине погружения (a_0/R_0 или a_0/h_0), при различных значениях безразмерного волнового числа $\lambda = \omega R_0/c$ (отношениях радиуса R_0 и длин волны). При анализе полученных результатов использовались известные данные, относящиеся к случаям предельных значений этих параметров, при $a_0/R_0 \rightarrow 0$ – соответствующие точечному источнику, $a_0/h_0 \rightarrow 0$ – бесконечному столбу сжимаемой жидкости ($\lambda \rightarrow 0$, $a_0/h_0 = \text{const}$ – полуограниченный столб несжимаемой жидкости), $a_0/R_0 \rightarrow 0$, $a_0/h_0 = \text{const}$ – полупространству сжимаемой жид-

кости.

Для волновых чисел, меньших первого собственного числа, на расстояниях нескольких длин волн от тела и торцевой границы (в предельном случае несжимаемой жидкости – нескольких R_0) поле давления в поперечных сечениях столба жидкости почти не меняется по R . Причем отличия от случая полупространства заметны и при $a_0/R_0=0.1$, и более существенны для случая пульсационных, чем осцилляционных колебаний источника. Влияние отражений от боковой границы наиболее отчетливо проявляется для резонансных случаев $\lambda=\alpha_p$, $J_1(\alpha_p)=0$. При $\lambda\geq\alpha_1$ поля потенциала и давления остаются неоднородными по R во всем рассмотренном диапазоне глубин ($Z\leq 6R_0$).

Наличие свободной поверхности сдвигает границы областей знакопостоянства давления в сосуде. Наиболее заметно влияние ограниченности столба жидкости при построении полей возмущения в области между телом и торцевой поверхностью и практически неощутимо вблизи нижнего конца выбранного интервала для Z . При этом наблюдается нарушение симметрии поля давления для пульсирующего тела (антисимметрии для осциллирующего) относительно поперечного сечения, проходящего через центр сферы, что имеет место для бесконечного столба жидкости. Это приводит к возникновению интегральной силы давления, действующей на тело, и имеющей ненулевое среднее за период колебаний значение. Осредненная сила для пульсирующей сферы вблизи поверхности жидкости направлена вглубь объема и через расстояния, приближающиеся с удалением от границы к длине полуволны, меняет направление на противоположное. В предельном случае несжимаемой жидкости ($\lambda=0$) как для полупространства, так и для полуограниченного жидкого столба сила остается направленной от границы для любых глубин Z , во втором случае затухая значительно медленнее.

Чередование в ограниченном столбе сжимаемой жидкости соседних областей со встречными или расходящимися направлениями осредненной силы давления может быть применено при исследовании устойчивости уровней динамического равновесия для газового скопления в колеблющемся сосуде с жидкостью, обнаруженных экспериментально [1,5] и изученных в случае малых включений ($a_0\ll R_0$, $R_0\omega/c\ll 1$) [1,6].

Построенные в данной работе поля потенциала и давления предполагается использовать для исследования поведения малых твердых и газовых включений в ограниченном объеме жидкости с

внутренним конечным источником колебаний, подобно проделанным для несжимаемой жидкости в [1] или для сжимаемой жидкости в [35] без учета влияния внешней границ.

1. *Колебательные явления в многофазных средах и их использование в технологии* / Ред. Р. Ф. Ганиева. – К.: Техника, 1980. – 142 с.
2. Кубенко В. Д., Лакиза В. Д., Павловский В. С., Пелых Н. А. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. – К.: Наук. думка, 1989. – 256 с.
3. Авдеевский В. С., Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Э., Устенко И. Г. Движение газового включения в капилляре при воздействии вибрации // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – N 3. – С. 85–92.
4. Кнеш Р., Дейли Дж., Хаммит Ф. Кавитация. – М.: Наука, 1974. – 687 с.
5. Bleich H. H. Effect of vibration on motion of small bubbles in liquid // Jet Propulsion. – 1956. – 26, N 11. – P. 956–978.
6. Кубенко В. Д., Кузьма В. М., Пучка Г. Н. Динамика сферических тел в жидкости при вибрации. – К.: Наук. думка, 1989. – 156 с.
7. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. О движении жидкости, содержащей мелкие частицы // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1977. – N 4. – С. 12–19.
8. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
9. Якимов Ю. Л. Эффект избирательного дрейфа пузырьков газа в вибрирующей жидкости в зависимости от их размера // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1978. – N 4. – С. 138–140.
10. Feuillade C. Scattering collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of super-sonances // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – 98, N 2, Pt. 1. – P. 1178–1190.
11. Алексеев В. Н., Рыбак С. А. Влияние распределения пузырьков по размерам при распространении звука в средах с резонансной дисперсией // Акуст. ж. – 1997. – 43, N 6. – С. 730–736.
12. Жуковский Н. Е. Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы // Собр. соч. Том 2. Гидродинамика. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – С. 670–688.
13. Буров А. В. О движении двух пульсирующих шаров в идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1983. – N 3. – С. 159–162.
14. Кузнецов Г. Н., Щекин И. С. Динамика пузырька вблизи сферического излучателя // Акуст. ж. – 1976. – 22, N 6. – С. 899–905.
15. Blake J. R., Robinson P. B., Shima A., Tomita Y. Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary // J. Fluid Mech. – 1993. – 255. – P. 707–721.
16. Жук А. П. Воздействие звуковой волны на систему двух сферических тел в идеальной жидкости // Прикл. мех. – 1990. – 26, N 5. – С. 81–89.
17. Жук А. П. Исследование воздействия акустической волны на систему двух сфер в вязкой жидкости // Прикл. мех. – 1994. – 30, N 2. – С. 33–40.
18. Gaunard G. C., Huang H., Strifors H. C. Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – 98, N 1. – P. 495–507.

19. Сима А. Собственные частоты колебаний двух сферических пузырьков в воде // Тр. Амер. Общ. инженеров-механиков. Теор. осн. инж. расчетов. Сер. Д.– 1971.– N 3.– С. 80–85.
20. Лебедев А. В., Хилько А. И. Рассеяние плоской волны на двух упругих шарах и сферических оболочках // Акуст. ж.– 1997.– **43**, N 4.– С. 521–530.
21. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Гидроупругость систем оболочек.– К.: Наук. думка, 1984.– 208 с.
22. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
23. Микишев Т. Н., Столбецов В. И. О колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.– 1983.– N 1.– С. 22–30.
24. Норкин М. В. Вертикальный удар по твердому телу, плавающему на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ.– 1999.– N 1.– С. 74–81.
25. Докучаев В. П. Возбуждение звука в трубе импульсным источником // Акуст. ж.– 1997.– **43**, N 5.– С. 642–647.
26. Ионов А. М., Максимов Г. А. О возбуждении гидроволны в скважине внешним источником // Акуст. ж.– 1999.– **45**, N 3.– С. 354–362.
27. Kuzma A. V. The behavior of a gas bubble-cluster in vertically vibrating incompressible liquid column // Thesis of 10-th Int. conf. "Modelling and investigation of systems stability". **Mechanical Systems.**– Kiev: Kiev University, Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, 1999.– P. 96.
28. Кубенко В. Д., Кузьма А. В. Взаимодействие двух пульсирующих сфер в цилиндрической полости с несжимаемой жидкостью // Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 5.– С. 81–89.
29. Кубенко В. Д. О колебаниях столба жидкости в жестком цилиндрическом сосуде при возбуждении пульсирующей сферой // Прикл. мех.– 1987.– **23**, N 4.– С. 119–122.
30. Ерофеев В. Т. Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Лапласа и Гельмгольца // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. науки.– 1972.– N 4.– С. 42–46.
31. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.– Т. 2.– М.: Физматгиз, 1963.– 516 с.
32. Ling C. B., Lin I. On evaluation of moments of $K_p(t)/I_p(t)$ // Math. comput.– 1972.– **26**, N 4.– P. 529–537.
33. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.– М.-Л.: Физматгиз, 1962.– 708 с.
34. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР.– 1983.– **270**, N 1.– С. 62–67.
35. Пучка Г. Н., Холопова В. В. Динамика газовых пузырьков вблизи цилиндрического излучателя // Прикл. мех.– 1993.– **29**, N 12.– С. 59–65.