ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 1999. Том 2, N 3. С. 33 – 41

УДК 624.131+539.215

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОРИСТО-УПРУГОГО НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ СЛОЯ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

А. М. ГОМИЛКО*, А. А. ГУРЖИЙ*, А. Н. ТРОФИМЧУК**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Украинский институт исследований окружающей среды и ресурсов, Киев

Получено 22.09.99 ⋄ Пересмотрено 10.10.99

Рассмотрена осесимметричная задача о гармонических колебаниях пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя, находящегося на жестком основании и возбуждаемого нагрузкой типа непроницаемого поршня. С использованием интегрального преобразования Ханкеля найдено явное аналитическое решение соответствующей граничной задачи для системы уравнений М. Био. В результате численных расчетов получены характеристики полей давления и напряжений в слое, проанализированы энергетические особенности колебаний в зависимости от частоты.

Розглянуто осесиметричну задачу про гармоничнi коливання пористо-пружного насиченого рiдиною шару, який знаходиться на жорсткiй основi i збуджується навантаженням типу непроникливого поршня. З використанням iнтегрального перетворення Ханкеля знайдено явний аналiтичний розв'язок вiдповiдної граничної задачi для системи рiвнянь М. Бiо. В результатi чисельних розрахункiв отримано характеристики полiв тиску i напружень в шарi, проаналiзовано енергетичнi особливостi коливань в залежностi вiд частоти.

There is considered an axisymmetrical problem on harmonic vibration of poroelasticity liquid-filled layer located a rigid base disturbed by impermeable piston-type load. Using Hankel's integral transform the analytical solution of corresponding boundary-value problem for system equations of M. Biot is found. As a result of numerical modelling, the characteristics of pressure and stress fields in layer were obtained, and energetic peculiarities of vibration in dependence of frequency are analyzed.

ВВЕДЕНИЕ

Динамические задачи механики деформируемого твердого тела обычно рассматриваются в предположении упругости или вязкоупругости материала среды. Однако большой практический интерес представляют также пористые материалы, насыщенные жидкостью (грунтовые и скальные основания, дно океана и др.). Такие среды представляются как двухфазная среда – пористая твердая фаза и жидкость, заполняющая поры. Одной из наиболее распространенных моделей двухфазных сред является модель Био [1], которая к настоящему времени имеет достаточное экспериментальное и теоретическое обоснование (см. [2 – 4] и содержащуюся в них многочисленную библиографию).

Во многих работах изучались вопросы отражения и прохождении волн при контактировании пористо-упругих сред с жидкими, упругими или пористо-упругими слоями, процессы распространения и затухания волн в пористо-упругом слое [3, 5 – 9]. Значительно меньше работ посвящено рассмотрению краевых задач динамики для пористо-упругой среды. Здесь основное внимание уделялось случаю полупространства. Так, для двухфазного полупространства детально рассмотрена задача Лэмба [3, 10 – 12]. Колебания жесткого непроницаемого прямоугольного штампа на пористо-упругом полупространстве изучались в статье [13], где исходная трехмерная граничная задача на основании использования соответствующей функции Грина была сведена к системе интегральных уравнений. Случай проницаемого штампа на полупространстве был рассмотрен в [3, 14].

Данная статья посвящена изучению особенностей осесимметричных колебаний пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя, находящегося на жестком основании. Предполагается, что слой возбуждается гармонической нагрузкой типа непроницаемого поршня. Основной результат исследования состоит в получении явного аналитического решения соответствующей граничной задачи для системы уравнений Био в слое. Численные расчеты, проведенные на основании полученного решения, позволили проанализировать энергетические особенности колебаний слоя в зависимости от частоты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричная задача о вынужденных гармонических колебаниях пористо-упругого водонасыщенного слоя $\bar{z} \in (0, \bar{h})$, где $(\bar{r}, \theta, \bar{z})$ – цилиндрические координаты. Предполагается, что нижняя грань упругого скелета $\bar{z} = 0$

жестко защемлена, а на верхней грани задана гармоническая нагрузка $P(\bar{r})e^{i\omega\bar{t}}$ типа непроницаемого поршня и ставится условие равенства перемещений твердого скелета и жидкости [3]. Далее будем считать, что нагрузка $P(\bar{r})$сосредоточена на площадке $\bar{r}\leq a$ и отсутствует при $\bar{r}>a$.

Введем в рассмотрение безразмерные координаты r, z, высоту слоя $h=\bar{h}/a$, время t и частоту колебаний ζ согласно соотношениям

$$r=\bar{r}/a, \quad z=\bar{z}/a, \quad t=c_2\bar{t}/a, \quad \zeta=a\omega/c_2,$$

и пусть $c_2=\{|N|/(\rho_{11}-\rho_{12}^2/\rho_{22})\}^{1/2}$ – скорость поперечной волны в двухфазной среде без учета диссипации и вязкости упругого скелета. Здесь N – модуль сдвига скелета; $\rho_{12}\leq 0$ – коэффициент динамической связи фаз; $\rho_{11}=(1-m)\rho_s-\rho_{12}$, $\rho_{22}=m\rho_f-\rho_{12}$ – эффективные плотности фаз, причем ρ_s и ρ_f – плотности упругого скелета и жидкости соответственно. Далее временной множитель $e^{i\zeta t}$ опускается.

Уравнения движения пористо-упругой среды в рамках модели М. Био для векторов перемещений твердой и жидкой фаз $\vec{u}=\{u_r,\,u_z\}$, $\vec{v}=\{v_r,\,v_z\}$ в безразмерных переменных имеют вид [3]

$$\begin{aligned}&N\Delta\vec{u}+(A+N)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}+Q\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{v}=\\&\quad=-\zeta^2c_2^2(\rho_{11}\vec{u}+\rho_{12}\vec{v})+i\zeta Bc_2^2\rho_{11}(\vec{u}-\vec{v}),\\&Q\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}+R\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{v}=\\&\quad=-\zeta^2c_2^2(\rho_{12}\vec{u}+\rho_{22}\vec{v})-i\zeta Bc_2^2\rho_{11}(\vec{u}-\vec{v}),\end{aligned}\qquad(1)$$

где

$$A=\lambda+sQ; \qquad Q=sR;$$

$$B=\frac{a}{c_2\rho_{11}}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b}=F(\zeta)\frac{m^2\nu_0}{K_{pr}},$$

причем λ – параметр Ламе пористого скелета с пустыми порами; m – пористость; ν_0 – коэффициент динамической вязкости жидкости; K_{pr} – проницаемость; F – функция, учитывающая характер течения жидкости по порам; s – коэффициент, учитывающий упругую связь между фазами; R – параметр, связанный со сжимаемостью фаз и общей сжимаемостью пористо-упругого тела (см. [1,13]). При низких частотах колебаний $F(\zeta)\approx 1$, и в этом случае преобладают эффекты диссипации в упругом скелете [15]. В простейшем случае внутреннее трение скелета может быть учтено путем введения комплексного модуля сдвига (см., например, [6]):

$$N=|N|e^{i\gamma}, \qquad (2)$$

где $\gamma\geq 0$ – коэффициент внутреннего трения.

Согласно сформулированной постановке задачи, граничные условия для решения системы (1) при $r>0$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&u_r(r,0)=0, \quad u_z(r,0)=0, \quad v_z(r,0)=0,\\&\sigma_z^s(r,h)+\sigma^f(r,h)=2NP(r),\\&\tau_{zr}^s(r,h)=0, \quad v_z(r,h)=u_z(r,h).\end{aligned}\qquad(3)$$

Здесь σ_{ij}^s – компоненты тензора напряжений в упругом скелете при протекании жидкости; σ^f – сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды. Далее считаем, что смещения твердой и жидкой фаз обезразмерены посредством параметра a. При этом напряжения в цилиндрической системе координат для осесимметричного случая определяются зависимостями

$$\begin{aligned}&\sigma_r^s=2N\frac{\partial u_r}{\partial r}+A\,\mathrm{div}\,\vec{u}+Q\,\mathrm{div}\,\vec{v},\\&\sigma_z^s=2N\frac{\partial u_z}{\partial z}+A\,\mathrm{div}\,\vec{u}+Q\,\mathrm{div}\,\vec{v},\\&\tau_{rz}^s=N\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\\&\sigma^f=Q\,\mathrm{div}\,\vec{u}+R\,\mathrm{div}\,\vec{v}.\end{aligned}\qquad(4)$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ М. БИО ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦИАЛЫ

Решение осесимметричной граничной задачи (1), (3), согласно [3,16], будем искать в виде

$$\begin{aligned}&\vec{u}=\nabla\,\Phi_1+\nabla\,\Phi_2-\mathrm{rot}\,\left(\frac{\partial}{\partial r}\Psi\mathrm{e}_\theta\right),\\&\vec{u}=M_1\nabla\Phi_1+M_2\nabla\Phi_2-M_3\mathrm{rot}\,\left(\frac{\partial}{\partial r}\Psi\mathrm{e}_\theta\right)\end{aligned}\qquad(5)$$

со скалярными потенциалами $\Phi_1(r,z)$, $\Phi_2(r,z)$ и $\Psi(r,z)$, которые являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\begin{aligned}&\Delta\Phi_1+k_1^2\Phi_1=0,\\&\Delta\Phi_2+k_2^2\Phi_2=0,\\&\Delta\Psi+k_3^2\Psi=0\end{aligned}\qquad(6)$$

с безразмерными волновыми числами

$$\begin{aligned}&k_j^2=\zeta^2\frac{c_2^2}{c^2}z_j, \quad j=1,2,\\&k_3^2=\zeta^2\frac{\rho c_2^2}{N}\left[\Gamma_{11}+M_3\Gamma_{12}+(1-M_3)i\Gamma\right].\end{aligned}\qquad(7)$$

При этом величины $z=z_j$, $j=1,2$ находятся как корни квадратного уравнения

$$(q_{11}q_{22}-q_{12}^2)z^2-(q_{11}\Gamma_{22}+q_{22}\Gamma_{11}-2q_{12}\Gamma_{12}+ \\ +i\Gamma)\,z+\left(\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}^2+i\Gamma\right)=0,$$

коэффициенты которого определяются выражениями

$$\begin{gathered} H=A+2N+R+2Q; \\ \Gamma=-B\rho_{11}/\zeta\rho; \quad \Gamma_{ij}=\rho_{ij}/\rho; \\ \rho=(1-m)\rho_s+m\rho_f; \quad c^2=\frac{H}{\rho}; \\ q_{11}=A+2N/H; \quad q_{12}=Q/H; \quad q_{22}=R/H; \\ M_{1,2}=\left\{\Gamma_{11}q_{22}-\Gamma_{12}q_{12}-(q_{11}q_{22}-q_{12}^2)z_{1,2}+\right. \\ \left.+(q_{22}+q_{12})i\Gamma\right\}/\left\{\Gamma_{22}q_{12}-\Gamma_{12}q_{22}+\right. \\ \left.+(q_{22}+q_{12})i\Gamma\right\}; \\ M_3=(-\Gamma_{12}+i\Gamma)/(\Gamma_{22}+i\Gamma). \end{gathered} \qquad (8)$$

Уравнения (6) показывают [2, 16], что в упругой пористой среде, насыщенной вязкой сжимаемой жидкостью, могут распространяться волны трех видов: продольные волны первого и второго типов (Φ_1, Φ_2) и поперечная волна (Ψ). Постоянные распространения этих волн зависят как от характеристик среды, определяемых параметрами A, N, R, Q, $\boldsymbol{b}$, так и от частоты колебаний ζ. При этом скорости продольных $c_1(\zeta)$, $c_{12}(\zeta)$ и поперечной $c_2(\zeta)$ объемных волн определяются выражениями

$$c_1^2(\zeta)=c^2/z_1, \quad c_{12}^2(\zeta)=c^2/z_2,$$

$$c_2^2(\zeta)=N/[\rho_{11}+\rho_{12}M_3+i\Gamma\rho(1-M_3)].$$

В силу уравнений (6) потенциалы $\Phi_j(r,z)$, $j=1,2$ и $\Psi(r,z)$ можно представить в виде интегралов Фурье – Бесселя

$$\begin{gathered} \Phi_j(r,z)=\int\limits_0^\infty\left\{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j}+\right. \\ \left.+x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\right\}\frac{J_0(r\xi)}{\xi_j}d\xi, \\ \Psi(r,z)=\int\limits_0^\infty\left\{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3}+\right. \\ \left.+y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\right\}\frac{J_0(r\xi)}{\xi\xi_3}d\xi, \end{gathered} \qquad (9)$$

где $\xi_j=\sqrt{\xi^2-k_j^2}$, а неизвестные функции $x_{i,j}(\xi)$, $y_j(\xi)$, $i,j=1,2$ подлежат определению на основании граничных условий (3).

3. ВЫПОЛНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Согласно соотношениям (5), (9) для перемещений получаем

$$\begin{aligned} u_r(r,z)=&-\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^\infty\left\{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j}+\right. \\ &\left.+x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\right\}\frac{\xi J_1(r\xi)}{\xi_j}d\xi- \\ &-\int\limits_0^\infty\left\{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3}-\right. \\ &\left.-y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\right\}J_1(r\xi)d\xi, \\ u_z(r,z)=&\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^\infty\left\{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j}-\right. \\ &\left.-x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\right\}J_0(r\xi)d\xi+ \\ &+\int\limits_0^\infty\left\{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3}+\right. \\ &\left.+y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\right\}\frac{\xi J_0(r\xi)}{\xi_3}d\xi, \\ v_r(r,z)=&-\sum_{j=1}^{2}M_j\int\limits_0^\infty\left\{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j}+\right. \\ &\left.+x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\right\}\frac{\xi J_1(r\xi)}{\xi_j}d\xi- \\ &-M_3\int\limits_0^\infty\left\{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3}-\right. \\ &\left.-y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\right\}J_1(r\xi)d\xi, \\ v_z(r,z)=&\sum_{j=1}^{2}M_j\int\limits_0^\infty\left\{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j}-\right. \\ &\left.-x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\right\}J_0(r\xi)d\xi+ \\ &+M_3\int\limits_0^\infty\left\{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3}+\right. \\ &\left.+y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\right\}\frac{\xi J_0(r\xi)}{\xi_3}d\xi. \end{aligned} \qquad (10)$$

Введем в рассмотрение постоянные

$$a_j=(A+M_jQ)/(2N), \quad q_j=(Q+M_jR)/(2N),$$

$$t_j=a_j+q_j, \quad j=1,2.$$

Тогда для нормированных напряжений, согласно уравнениям (4) – (6), с учетом равенств

$$\operatorname{div}\vec{u}=-k_1^2\Phi_1-k_2^2\Phi_2,$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=-M_1k_1^2\Phi_1-M_2k_2^2\Phi_2,$$

имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_r^s}{2N} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} - k_1^2 a_1 \Phi_1 - k_2^2 a_2 \Phi_2,\\
\frac{\sigma_z^s}{2N} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} - k_1^2 a_1 \Phi_1 - k_2^2 a_2 \Phi_2,\\
\frac{\tau_{rz}^s}{2N} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\\
\frac{\sigma^f}{2N} &= -k_1^2 q_1 \Phi_1 - k_2^2 q_2 \Phi_2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Проведя на основании соотношений (10), (11) соответствующие вычисления, получим для напряжений следующие представления через интегралы Фурье – Бесселя:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_r^s(r,z)}{2N} &= \sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty \{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j} +\\
&+x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\}\{\xi r^{-1}J_1(r\xi) -\\
&-[\xi^2 + k_j^2 a_1]J_0(r\xi)\}\xi_j^{-1}d\xi +\\
&+\int_0^\infty \{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3} - y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\}\times\\
&\times\{r^{-1}J_1(r\xi) - \xi J_0(r\xi)\}d\xi,\\
\frac{\sigma_z^s(r,z)}{2N} &= \sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty \{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j} +\\
&+x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\}\left[\xi_j^2 - k_j^2 a_j\right]\xi_j^{-1}J_0(r\xi)d\xi +\\
&+\int_0^\infty \{y_1(\xi)e^{-(h-z)\xi_3} -\\
&-y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\}\xi J_0(r\xi)d\xi,\\
\frac{\tau_{rz}^s(r,z)}{2N} &= -\sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty \{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j} -\\
&-x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\}\xi J_1(r\xi)d\xi -\\
&-\int_0^\infty \{y_1(\xi)e^{-(h-z)xi_3} +\\
&+y_2(\xi)e^{-z\xi_3}\}\times\\
&\times[\xi^2 - k_3^2/2]\xi_3^{-1}J_1(r\xi)d\xi,\\
\frac{\sigma^f(r,z)}{2N} &= -\sum_{j=1}^{2}k_j^2 q_j\int_0^\infty \{x_{j,1}(\xi)e^{-(h-z)\xi_j} +\\
&+x_{j,2}(\xi)e^{-z\xi_j}\}\xi_j^{-1}J_0(r\xi)d\xi.
\end{aligned} \tag{12}$$

Удовлетворение граничным условиям (3) проводится на основании свойств интегрального преобразования Ханкеля [17]:

$$f(r) = \int_0^\infty F(\xi)\xi J_j(r\xi)d\xi, \quad r>0,$$

$$F(\xi) = \int_0^\infty f(r)rJ_j(\xi r)dr, \quad \xi>0,$$

где $j=0,1$. При этом на основании равенств (10), (12) получаем следующую систему из шести уравнений относительно неизвестных функций $x_{1,j}(\xi)$, $x_{2,j}(\xi)$ и $y_j(\xi)$, $j=1,2$, определенных при $\xi>0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2}[x_{j,1}(\xi)e^{-h\xi_j} + x_{j,2}(\xi)]\xi\xi_j^{-1} +\\
&\quad+[y_1(\xi)e^{-h\xi_3} - y_2(\xi)] = 0,\\
&\sum_{j=1}^{2}[x_{j,1}(\xi)e^{-h\xi_j} - x_{j,2}(\xi)] +\\
&\quad+[y_1(\xi)e^{-h\xi_3} + y_2(\xi)]\xi\xi_3^{-1} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{2}M_j[x_{j,1}(\xi)e^{-h\xi_j} - x_{j,2}(\xi)] +\\
&\quad+M_3[y_1(\xi)e^{-h\xi_3} + y_2(\xi)]\xi\xi_3^{-1} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{2}(1-M_j)[x_{j,1}(\xi) - x_{j,2}(\xi)e^{-h\xi_j}] +\\
&\quad+(1-M_3)[y_1(\xi) + y_2(\xi)e^{-h\xi_3}]\xi\xi_3^{-1} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{2}[x_{j,1}(\xi) - x_{j,2}(\xi)e^{-h\xi_j}]\xi +\\
&\quad+[y_1(\xi) + y_2(\xi)e^{-h\xi_3}][\xi^2 - k_3^2/2]\xi_3^{-1} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{2}[x_{j,1}(\xi) + x_{j,2}(\xi)e^{-h\xi_j}][\xi_j^2 - k_j^2 t_j]\xi_j^{-1} +\\
&\quad+[y_1(\xi) - y_2(\xi)e^{-h\xi_3}]\xi = \xi\overline{P}(\xi).
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\overline{P}(\xi)$ – преобразование Ханкеля от заданной нагрузки:

$$\overline{P}(\xi) = \int_0^\infty P(r)J_0(\xi r)rdr, \quad \xi>0. \tag{14}$$

Введем для сокращения записи обозначения

$$\widehat{s}_j = \sinh(h\xi_j), \quad \widehat{c}_j = \cosh(h\xi_j), \quad j = 1,2,3,$$
$$\alpha_{j,i} = (1-M_j)\xi^2 - (1-M_i)\tau_3,$$
$$m_{j,i} = M_i - M_j, \quad \tau_3 = \xi^2 - k_3^2/2,$$
$$\tau_j = \xi_j^2 - k_j^2 t_j, \quad j = 1,2.$$

Опуская достаточно громоздкие выкладки, получаем определитель линейной алгебраической системы уравнений (13) $D=D(\xi)$ в виде

$$\begin{aligned}
D={}&-m_{2,1}\xi_1^2\xi_2\xi_3\xi^2\{m_{3,1}\tau_2+\alpha_{3,1}\}\widehat{s}_1+\\
&+m_{2,1}\xi_1\xi_2^2\xi_3\xi^2\{\alpha_{3,2}+m_{3,2}\tau_1\}\widehat{s}_2-\\
&-\xi_1\xi_2\xi^2\{m_{3,2}\alpha_{3,1}\tau_1+m_{3,1}\alpha_{3,2}\tau_2\}\widehat{s}_3+\\
&+m_{1,2}\xi_1\xi_2^2\xi_3\{\alpha_{3,2}\tau_1+m_{3,2}\xi^4\}\widehat{c}_1\widehat{s}_2\widehat{c}_3+\\
&+m_{1,2}\xi_1^2\xi_2\xi_3\{m_{1,3}\xi^4+\alpha_{1,3}\tau_2\}\widehat{s}_1\widehat{c}_2\widehat{c}_3+\\
&+\xi_1\xi_2\xi^2\{m_{3,1}\alpha_{3,2}\tau_1+m_{3,2}\alpha_{3,1}\tau_2\}\widehat{c}_1\widehat{c}_2\widehat{s}_3-\\
&-\xi^2\{m_{3,2}\alpha_{3,2}\xi_2^2\tau_1+m_{3,1}\alpha_{3,1}\xi_1^2\tau_2+\\
&+m_{1,2}^2\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2\}\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_3.
\end{aligned} \qquad (15)$$

При этом можно показать, что решение системы (13) дается выражениями

$$\begin{aligned}
&x_{i,j}(\xi) = \frac{\xi^2\xi_1\xi_2}{4\tau_3}\frac{X_{i,j}(\xi)}{D(\xi)}\overline{P}(\xi), \quad i,j=1,2,\\
&y_1(\xi) = -y_2(\xi)e^{-h\xi_3}-\\
&\quad -\frac{\xi\xi_3}{\tau_3}[x_{1,1}(\xi) - x_{1,2}(\xi)e^{-h\xi_1}]-\\
&\quad -\frac{\xi\xi_3}{\tau_3}[x_{2,1}(\xi) - x_{2,2}(\xi)e^{-h\xi_2}],\\
&2y_2(\xi) = x_{1,1}(\xi)e^{-h\xi_1}[\xi/\xi_1 - \xi_3/\xi]+\\
&\quad + x_{1,2}(\xi)[\xi/\xi_1 + \xi_3/\xi]+\\
&\quad + x_{2,1}(\xi)e^{-h\xi_2}[\xi\xi_2 - \xi_3/\xi]+\\
&\quad + x_{2,2}(\xi)[\xi/\xi_2 + \xi_3/\xi],
\end{aligned} \qquad (16)$$

причем

$$\begin{aligned}
X_{1,1}(\xi) ={}& \xi_1[m_{1,3}\alpha_{3,2}(\widehat{Q}_1^{(2)} - \widehat{Q}_2^{(2)})+\\
&+ m_{3,2}\alpha_{3,1}e^{-h\xi_1}(Q_1^{(2)} - Q_2^{(2)})]+\\
&+ 2m_{3,2}\alpha_{3,2}\xi_2\widehat{s}_2 Q_2^{(1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{1,2}(\xi) ={}& \xi_1[m_{1,3}\alpha_{3,2}e^{-h\xi_1}(\widehat{Q}_1^{(2)} - \widehat{Q}_2^{(2)})+\\
&+ m_{3,2}\alpha_{3,1}(Q_1^{(2)} - Q_2^{(2)})]+\\
&+ 2m_{3,2}\alpha_{3,2}\xi_2\widehat{s}_2\widehat{Q}_2^{(1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{2,1}(\xi) ={}& \xi_2[m_{2,3}\alpha_{3,1}(\widehat{Q}_2^{(1)} - \widehat{Q}_2^{(1)})+\\
&+ m_{3,1}\alpha_{3,2}e^{-h\xi_2}(Q_1^{(1)} - Q_2^{(1)})]+\\
&+ 2m_{3,1}\alpha_{3,1}\xi_1\widehat{s}_1 Q_2^{(2)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{2,2}(\xi) ={}& \xi_2[m_{2,3}\alpha_{3,1}e^{-h\xi_2}(\widehat{Q}_1^{(1)} - \widehat{Q}_2^{(1)})+\\
&+ m_{3,1}\alpha_{3,2}(Q_1^{(1)} - Q_2^{(1)})]+\\
&+ 2m_{3,1}\alpha_{3,1}\xi_1\widehat{s}_1\widehat{Q}_2^{(2)},
\end{aligned}$$

где функции

$$\widehat{Q}_1^{(2)} = e^{h\xi_2}Q_1^{(2)}; \quad \widehat{Q}_2^{(2)} = e^{-h\xi_2}Q_2^{(2)};$$
$$\widehat{Q}_1^{(1)} = e^{h\xi_1}Q_1^{(1)}; \quad \widehat{Q}_2^{(1)} = e^{-h\xi_1}Q_2^{(1)};$$
$$Q_1^{(1)}(\xi) = \xi^{-1}\xi_1\xi_3\tau_3\widehat{c}_3 - \xi\tau_3\widehat{s}_3 - \xi\xi_1\xi_3 e^{-h\xi_1};$$
$$Q_2^{(1)}(\xi) = \xi^{-1}\xi_1\xi_3\tau_3\widehat{c}_3 + \xi\tau_3\widehat{s}_3 - \xi\xi_1\xi_3 e^{h\xi_1};$$
$$Q_1^{(2)}(\xi) = \xi^{-1}\xi_2\xi_3\tau_3\widehat{c}_3 - \xi\tau_3\widehat{s}_3 - \xi\xi_2\xi_3 e^{-h\xi_2};$$
$$Q_2^{(2)}(\xi) = \xi^{-1}\xi_2\xi_3\tau_3\widehat{c}_3 + \xi\tau_3\widehat{s}_3 - \xi\xi_2\xi_3 e^{h\xi_2}.$$

Таким образом, формулы (10), (12) и (14) – (16) дают явное аналитическое решение граничной задачи (1), (3). При этом уравнение $D(\xi)=0$, рассматриваемое во всей комплексной плоскости, является дисперсионным уравнением для определения цилиндрических волн, распространяющихся в пористо-упругом слое при физических условиях, которые описываются однородными граничными условиями (3) [18].

Рассмотрим выражение для средней за период $T=2\pi/\zeta$ работы сил, действующих на двухфазный слой (функция диссипации $\overline{W}(\zeta)$) при наличии гармонического нагружения (3). Согласно [19], с учетом осесимметричности граничной задачи (1), (3), имеем

$$\overline{W}(\zeta) = \pi \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty i\zeta[\sigma_z^s(r,h)u_z^*(r,h)+\right.$$
$$\left.+\tau_{rz}^s(r,h)u_r^*(r,h)+\sigma^f(r,h)v_z^*(r,h)]rdr\right\} =$$
$$= 2\pi\zeta\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty NP(r)u_z(r,h)rdr\right\},$$

где индекс * означает комплексное сопряжение. Используя формулу Парсеваля для преобразования Ханкеля [17] и выражение для $u_z(r,h)$ из (10), получаем

$$\overline{W}(\zeta)=2\pi\zeta|N|\int_0^\infty\left\{\overline{P}(\xi)\mathrm{Im}\,(e^{-i\gamma}u(\xi)\right\}\overline{P}(\xi)d\xi, \quad (17)$$

где γ – коэффициент внутреннего трения упругого скелета из выражения (2), а функция смещений твердой фазы дана как

$$u(\xi) = x_{1,1}(\xi) - x_{1,2}(\xi)e^{-h\xi_1}+$$
$$+ x_{2,1}(\xi) - x_{2,2}(\xi)e^{-h\xi_2}+$$
$$+ \{y_1(\xi) + y_2(\xi)e^{-h\xi_3}\}\xi/\xi_3.$$

Отметим равенство

$$\overline{W}(\zeta)=2\pi\boldsymbol{b}\int_0^h\int_0^\infty|\vec{u}(r,z)-\vec{v}(r,z)|^2rdrdz, \quad (18)$$

показывающее, что величина $\overline{W}(\zeta)$ определяется функцией диссипации колебаний в двухфазной пористо-упругой среде, обусловленной вязкостным взаимодействием фаз [19].

Величину $\overline{W}(\zeta)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\overline{W}(\zeta) = \overline{W}^s(\zeta) + \overline{W}^f(\zeta),$$

где $\overline{W}^s(\zeta)$ и $\overline{W}^f(\zeta)$ – средняя за период работа сил, действующих на упругий скелет и жидкую фазу соответственно. Для этих величин получаем выражения

$$\begin{aligned}\overline{W}^s(\zeta) &= \pi\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty i\zeta\sigma_z^s(r,h)u_z^*(r,h)rdr\right\} = \\ &= -2\pi\zeta|N|\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty e^{i\gamma}\Sigma^s(\xi)u^*(\xi)d\xi\right\}, \\ \overline{W}^f(\zeta) &= \pi\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty i\zeta\sigma^f(r,h)v_z^*(r,h)rdr\right\} = \\ &= -2\pi\zeta|N|\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty e^{i\gamma}\Sigma^f(\xi)u^*(\xi)d\xi\right\},\end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\Sigma^s(\xi)=\left\{x_{1,1}(\xi)+x_{1,2}(\xi)e^{-h\xi_1}\right\}\left[\xi_1^2-k_1^2a_1\right]/(\xi_1\xi)+$$
$$+\left\{x_{2,1}(\xi)+x_{2,2}(\xi)e^{-h\xi_2}\right\}\left[\xi_2^2-k_2^2a_2\right]/(\xi_2\xi)+$$
$$+\left\{y_1(\xi)-y_2(\xi)e^{-h\xi_3}\right\};$$
$$\Sigma^f(\xi)=-k_1^2q_1\left\{x_{1,1}(\xi)+x_{1,2}(\xi)e^{-h\xi_1}\right\}/(\xi_1\xi)-$$
$$-\,k_2^2q_2\left\{x_{2,1}(\xi)+x_{2,2}(\xi)e^{-h\xi_2}\right\}/(\xi_2\xi).$$

В случае равномерно распределенной на площадке $r<1$, $z=h$ нагрузки

$$P(r) = P_0, \quad r\in(0,1), \quad P(r)\equiv 0, \quad r>1, \quad (20)$$

для преобразования Ханкеля имеем равенство $\overline{P}(\xi)=J_1(\xi)/\xi$, $\xi>0$. Тогда из формулы (17) получаем следующее выражение для нормированной работы сил:

$$W(\zeta)\equiv\frac{\overline{W}(\zeta)}{2NP_0^2}=\frac{\pi\zeta}{P_0}\int_0^\infty\{\mathrm{Im}\,u(\xi)\}\,\frac{J_1(\xi)}{\xi}d\xi. \quad (21)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты проводились для случая равномерной нагрузки (20) слоя безразмерной высоты $h=1$ с характеристиками двухфазной среды, взятыми из [3] (водонасыщенный песок): $\lambda=1.47\cdot10^8$ Н/м^2, $s=1.02$, $N=9.79\cdot10^7$ Н/м^2, $R=2.74\cdot10^8$ Н/м^2, $\rho_s=2.67\cdot10^3$ кг/м^3, $\rho_f=0.994\cdot10^3$ кг/м^3, $\rho_{12}=0$, $m=0.30$. При этом варьировались коэффициенты проницаемости двухфазного слоя и вязкость скелета грунта. Рассматривался диапазон низких частот $f=0\div5$ Гц, для которого течение жидкости по порам подчиняется условию Пуазейля и $F(\zeta)\equiv1$.

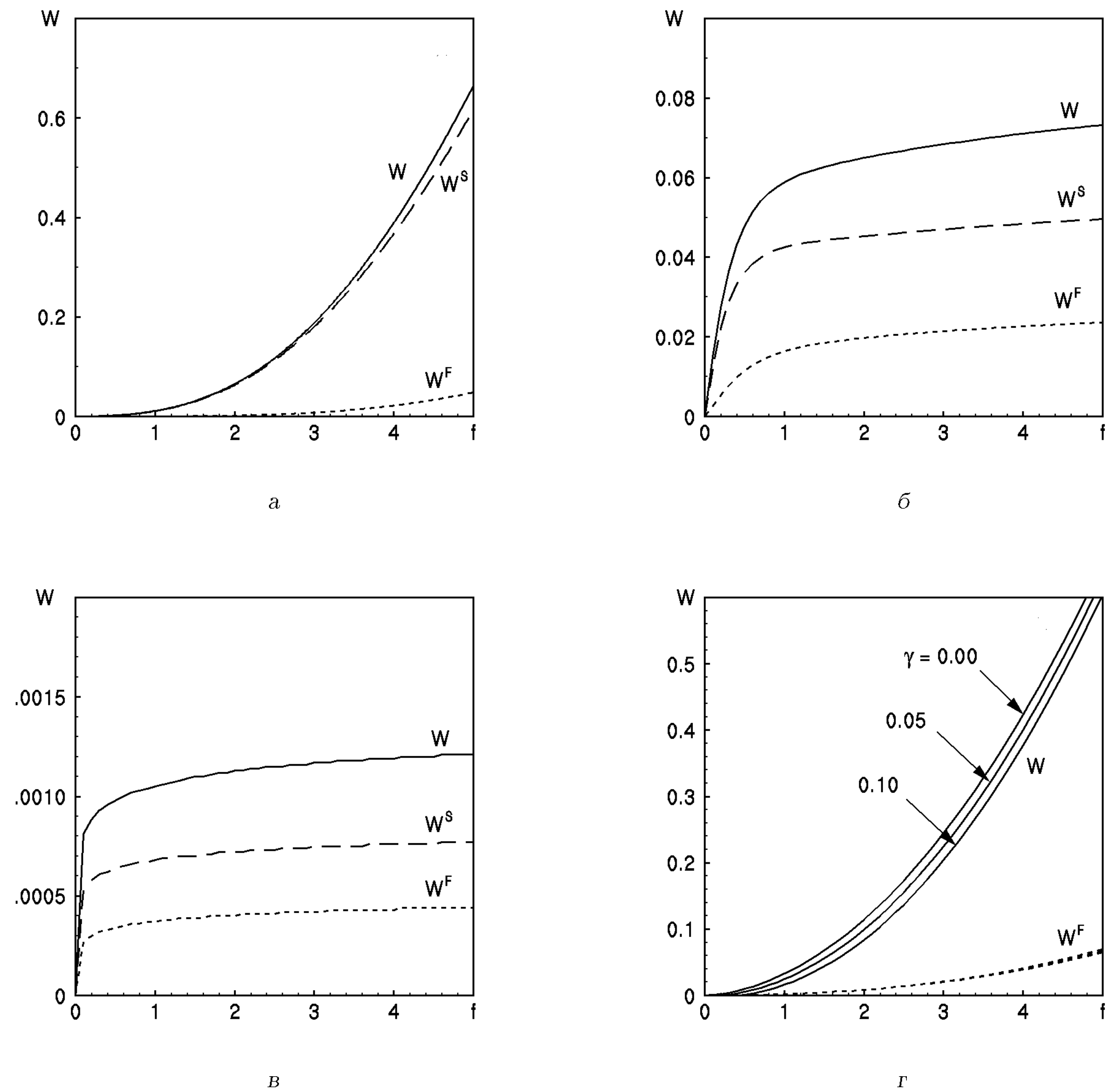
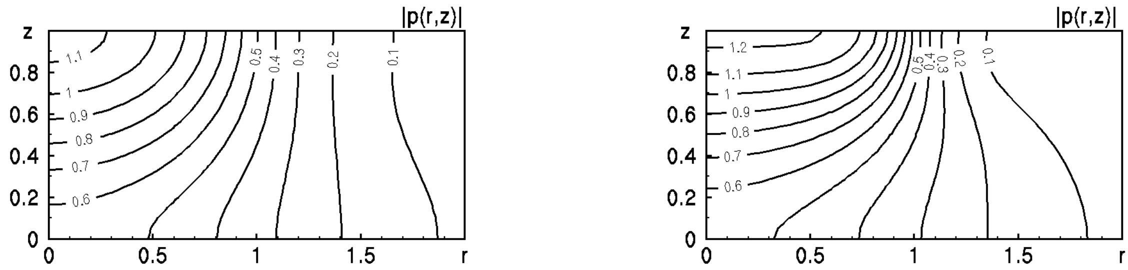


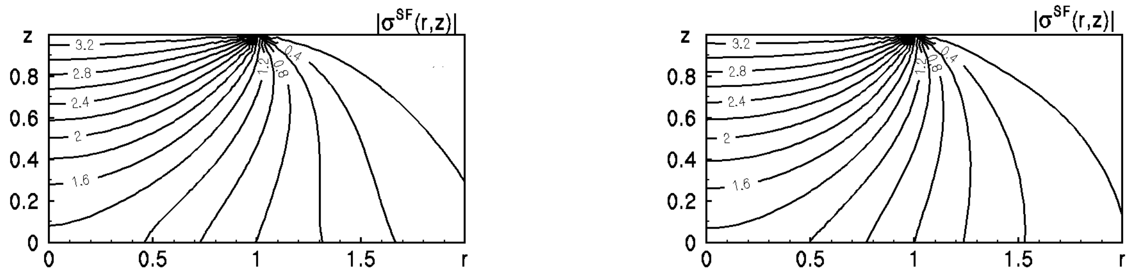
Рис. 1. Нормированная работа сил, действующих на двухфазную среду:
а – $\boldsymbol{b}=9\cdot 10^2$, б – $\boldsymbol{b}=9\cdot 10^6$, в – $\boldsymbol{b}=9\cdot 10^9$,
г – влияние вязкости скелета среды γ при $\boldsymbol{b}=9\cdot 10^2$

На рис. 1 показаны графики нормированной на $2NP_0^2$ величины работы $\overline{W}(\zeta)$ (формула (21)) и ее составляющих (формулы (19)). Видно, что для большой проницаемости среды, отвечающей малому значению коэффициента диссипации $\boldsymbol{b}$, модель двухфазной среды приближается к модели среды "без связи" (упругая модель), и работа сил сосредотачивается в твердой фазе (рис. 1, а). В случае средней величины проницаемости ("среда с несовершенной связью", модель Био) величины диссипации энергии в твердой и жидкой фазах соизмеримы между собой и стабилизируются с ростом частоты (рис. 1, б). При малой проницаемости ("среда с совершенной связью", эквивалентная однофазная упругая модель), как показано на рис. 1, в работа сил значительно уменьшается. Это означает, что перемещения твердой и жидкой фаз практически одинаковы, и двухфазная среда движется как однофазная (см. формулу (18). Из рис. 1, г ($\boldsymbol{b}=9\cdot 10^2$ кг/(м^{3}с)) видно, что увеличение значения коэффициента вязкости скелета среды γ приводит к уменьшению величины работы



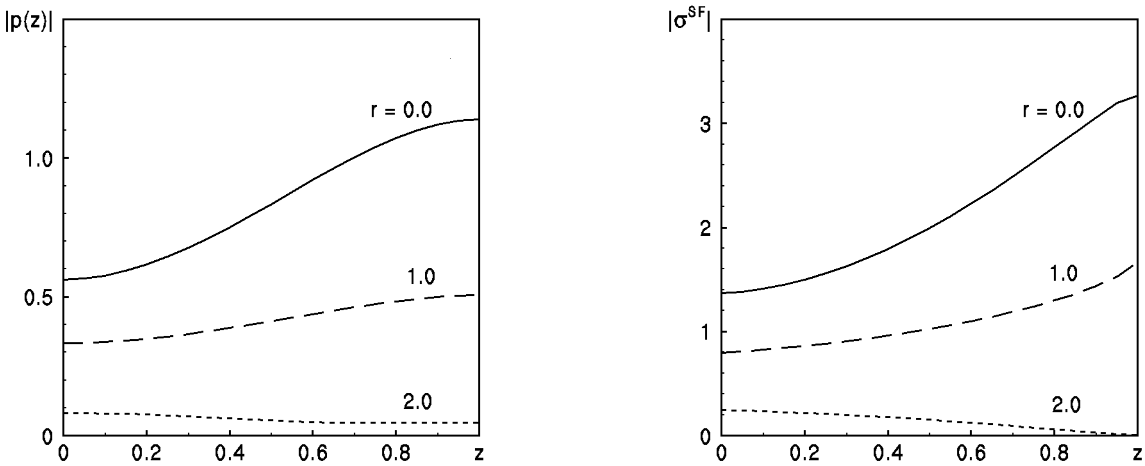
а   б

Рис. 2. Распределение модуля давления в двухфазном слое при частотах колебаний:
а – $f=1$ Гц,   б – $f=5$ Гц



а   б

Рис. 3. Распределение модуля общего напряжения в двухфазном слое при частотах колебаний:
а – $f=1$ Гц,   б – $f=5$ Гц



а   б

Рис. 4. Распределение модулей давления (*а*) и общего напряжения (*б*) по глубине слоя при частоте колебаний $f=1$ Гц всех сил, действующих на двухфазную среду.

На рис. 2 и 3 соответственно приведены эпюры линий уровня нормированных к $2NP_0$ модулей давления $p(r,z)=-\sigma^f(r,z)/m$ и общего напряжения $\sigma^{sf}(r,z)=\sigma^s_z(r,z)+\sigma^f(r,z)$ при частотах колебаний $f=1$ и 5 Гц. Видно, что максимальные значения модулей давления и общего напряжения сосредоточены в той области сечения слоя, в которой приложена нагрузка. С увеличением частоты нагружения линии уровней модуля давления постепенно сгущаются, уменьшая область, в которой отмечается избыточное давление. В то же время, изменение частоты не приводит к существенному изменению распределения общего напряжения в слое.

Рис. 4 иллюстрирует распределение модуля давления и общего напряжения по глубине слоя при фиксированных значениях r для частоты $f=1$ Гц. Видно, что величины давлений и напряжений достигают максимальных значений в местах приложения нагрузки и уменьшаются с глубиной и расстоянием от источника колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено явное решение осесимметричной задачи о гармонических колебаниях пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании при возбуждении нагрузкой (непроницаемый поршень) на верхней части границы. Найденное решение представляет самостоятельный интерес и может служить тестовым примером и аналитической базой при численно-аналитическом исследовании различных, в том числе и смешанных, граничных задач для пористо-упругих слоистых сред. Полученное в статье выражение для определителя $D(\xi)$ (формула (15)) дает возможность в дальнейшем проанализировать характер распространения волн в пористо-упругом водонасыщенном слое.

На основании проведенного численного анализа полученного решения рассмотрена энергетика волнового процесса в зависимости от частоты (в том числе, предельные случаи). Показано, что при большой проницаемости среды поведение двухфазной среды приближается к упругой модели и работа сил сосредотачивается в твердой фазе. Для случая средней величины проницаемости величины диссипации энергии в твердой и жидкой фазах соизмеримы между собой и стабилизируются с ростом частоты. В предельном случае малой проницаемости работа сил значительно уменьшается, что позволяет сделать вывод о том, что среда движется практически как однофазная.

1. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– **28**, N 2.– P. 168–191.
2. *В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов и др.* Механика насыщенных пористых сред.– М.: Недра, 1970.– 336 с.
3. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания волны в слоистых средах.– К.: Наук. думка, 1990.– 222 с.
4. *Ляховицкий Ф. М.* Сейсмические волны в гетерогенных средах.– М.: Межвед. геофиз. комитет при Президиуме АН СССР, 1988.– 162 с.
5. *Косачевский Л. Я.* Об отражении звуковых волн от слоистых двухкомпонентных сред // Прикл. мат. и мех.– 1961.– **25**, N 6.– P. 1076–1082.
6. *Yamamoto T.* Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom // J. Acoust. Soc. Amer.– 1983.– **73**, N 5.– P. 1578–1596.
7. *Марков М. Г., Юматов А. Ю.* Акустические свойства слоистой пористой среды // ЖПМТФ.– 1988.– **167**, N 1.– С. 115–119.
8. *Albert G. D.* A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials // J. Appl. Phys.– 1993.– **73**, N 1.– P. 28–36.
9. *Городецкая Н. С.* Затухание симметричных волн при распространении в пористо-упругом слое со свободными поверхностями // Акуст. вiсн.– 1998.– **1**, N 4.– С. 4–18.
10. *Пономаренко В. Г., Метлов Л. С., Сургай Н. С.* Возбуждение упругих волн в двухкомпонентном полупространстве // Теор. и прикл. мех.– 1976.– Вып. 7.– С. 20–25.
11. *Саатов Я. У.* Плоские задачи механики упругопористых сред.– Ташкент: Фан, 1975.– 252 с.
12. *Halpern R. M., Christiano P.* Response of poroelastic halfspace to steady-state harmonic surface tractions // Inter. J. Num. Analyt. Methods in Geomech.– 1986.– **10**.– P. 609–632.
13. *Halpern R. M., Christiano P.* Steady-state harmonic responce of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic halfspace // Earthq. Eng. Str. Dynam.– 1986.– **14**.– P. 439–454.
14. *Трофимчук А. Н.* Динамическое взаимодействие жесткой плиты с водонасыщенным пористоупругим основанием // Прикл. мех.– 1996.– **32**, N 1.– С. 69–74.
15. *Stoll R. D., Bryan G. M.* Wave attenuation in saturated sediments // J. Acoust. Soc. Amer.– 1970.– **47**, N 5, Pt. 2.– P. 1440–1447.
16. *Косачевский Л. Я.* О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ.– 1959.– **23**, N 6.– С. 1115–1123.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I.– М.: Изд-во иностр. лит, 1949.– 798 с.
18. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
19. *Deresiewicz H., Skalak R.* On uniqueness in dynamic poroelasticity // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1963.– **53**, N 4.– P. 783–788.