

УДК 532.59

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ, ПОМЕЩЕННОМ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ЖИДКИМИ СРЕДАМИ

О. В. АВРАМЕНКО, И. Т. СЕЛЕЗОВ,

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.05.99 ◊ Пересмотрено 26.08.99

Исследовано распространение гармонических волн в гидроупругой системе, состоящей из однородного упругого слоя, помещенного между двумя сжимаемыми жидкостями с различными физическими свойствами. Получено дисперсионное уравнение, проведен его численный анализ для случая фазовых скоростей, меньших, чем большая из скоростей звука в жидкостях. Дисперсионное уравнение имеет два действительных корня, близких к симметричным и антисимметричным колебаниям слоя для случая, когда жидкости с обеих сторон одинаковы. Рассмотрен предельный случай наличия двух одинаковых жидкостей, когда задача распадается на две независимых, а также предельные случаи поверхностных волн Рэлея и волн Стоунли. Получены выражения для определения перемещений, касательных и нормальных напряжений в упругом слое, а также для давления в жидкостях. Построены соответствующие волновые моды и проанализированы их свойства.

Досліджено поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі, яка складається з однорідного пружного шару, розміщеного між стисливими рідинами з різними фізичними властивостями. Отримано дисперсійне рівняння, проведено його чисельний аналіз для випадку фазових швидкостей, менших за більшу зі швидкостей звуку в рідинах. Дисперсійне рівняння має два дійсних корені, близькі до симетричних та антисиметричних коливань шару для випадку, коли рідини з обох боків однакові. Розглянуто граничний випадок наявності двох однакових рідин, коли задача розпадається на дві незалежні, а також граничні випадки поверхневих хвиль Релея та хвиль Стоунлі. Отримано вирази для визначення переміщень, дотичних та нормальних напружень у пружному середовищі, а також для тиску в рідинах. Побудовано відповідні хвильові моди та проаналізовано їхні властивості.

Propagation of harmonic waves in hydroelastic system consisting of uniform elastic layer situated between two compressible fluids with different physical properties is investigated. A dispersion equation is derived and analysed numerically for phase velocities lower than the greater sound velocity of two fluids. The dispersion equation has two real roots close to symmetric and asymmetric oscillations of the layer confined from the both sides by the same fluids. Limiting case of the same fluids when the problem is separated into two independent ones, as well as limiting cases of Rayleigh and Stonley waves, are considered. The expressions for displacements, shear and normal stresses are obtained. Corresponding wave modes are determined and their properties are analyzed.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о распространении гармонических волн вдоль упругого слоя между двумя жидкостями представляет большой интерес при проектировании гидросооружений, разделяющих различные жидкие среды, при моделировании динамики ледового покрова как одного из гидрологических элементов замерзающих морей и водохранилищ и др. В связи с актуальностью приложений такого рода в настоящее время проводятся исследования волновых гидроупругих взаимодействий “упругая система – жидкость” [1, 2].

Необходимо отметить, что задача о распространении волн в упругом изотропном слое всесторонне и детально исследовалась, начиная с классических работ Рэлея, Лэмба [3–6], и в дальнейшем была предметом исследований многих ученых [7–11]. Упругий слой, с точки зрения акустики, является классическим волноводом, характеристики которого представляют значительный интерес. В результате детально изучены свойства различного типа волновых движений, таких как волны Лява,

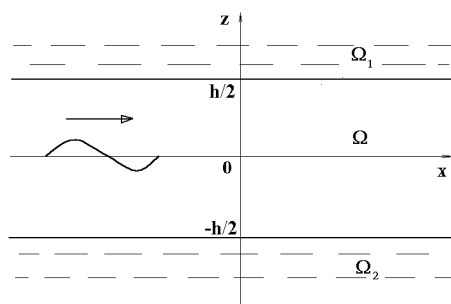


Рис. 1. Гидроупругая система “упругий слой, между жидкими полуграниченными средами”

Рэлея–Лэмба и др. В этой задаче упругое поле разделяется на два независимых: симметричное относительно срединной поверхности и несимметричное. В случае расположения такой системы в жидкости (рис. 1) – это уже гидроупругий волновод, и волновые движения характеризуются более сложными явлениями [12], и, естественно, количество публикаций в этом случае менее обширно.

Рассмотрим некоторые работы, имеющие непо-

средственное отношение к предмету данной статьи. В работе [13] показано, что при распространении волн в пластине, расположенной в жидкости, обнаруживается затухание волн как следствие излучения звука в жидкость. Точная теория предсказывает заметное влияние затухания как для симметричных, так и для антисимметричных колебаний при длинах волн, малых по сравнению с толщиной пластины. Уточненные теории дают результаты, близкие к точной теории при достаточно длинных волнах, но они не воспроизводят эффекты взаимного влияния двух типов волн.

В статье [14] исследуется распространение волн в упругой пластине, контактирующей с полуграниченными жидкими средами на основе точной постановки для упругого изотропного слоя и приближенных теорий пластин. Проводится сопоставление и анализ импедансов, полученных на основе этих теорий.

В работе [15] изучается распространение гармонических волн в упругом слое, контактирующем с жидкой полуграниченной средой. Статья [16] также посвящена изучению волновых движений системы “упругая пластина – полуграниченная жидкость”.

В книге Хейсина [17] анализируются стационарные и нестационарные задачи, связанные с распространением волн в плавающем ледяном покрове. В большинстве теоретических исследований ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной.

Распространение волн с учетом нелокального взаимодействия частиц в упругом бесконечном слое, погруженном в жидкость, исследовалось в [18]. В результате получено дисперсионное уравнение, включающее члены, соответствующие нелокальным рэлеевским волнам, и члены, учитывающие влияние жидкости.

В статье [19] исследуется распространение свободных гармонических волн вдоль поверхности раздела сжимаемой невязкой жидкости и упругой полуграниченной среды. Показано, что все искомые функции могут быть выражены через одну скалярную функцию, а характеристическое уравнение идентично уравнению волн Стоунли.

Статьи [20–24] посвящены изучению распространения волн в гидроупругой системе типа “упругий слой – жидкость”, где однородный слой контактирует с жидкими полуграниченными средами, имеющими одинаковые физические свойства. При этом, дисперсионное уравнение распадается на два уравнения, описывающих симметричные и антисимметричные колебания. В [25] в аналогичной гидроупругой системе исследовано

влияние физической неоднородности слоя на распространение волн. В работе [26] рассмотрено распространение волн в упругом слое с пустотами, погруженном в жидкость. Выведено и исследовано асимптотически и численно дисперсионное уравнение, описывающее распространение волн общего вида.

Взаимодействие упругого слоя с жидкими или упругими средами может приводить к появлению новых эффектов при распространении волн [27–31].

В настоящей статье представлены результаты исследования гидроупругой системы “упругий слой, помещенный между жидкими полуграниченными средами”, причем жидкости имеют различные физические свойства. Анализируется влияние различных жидких сред на распространение волн в волноводе и проводится сравнение с ранее полученными результатами для упругого слоя, контактирующего с одинаковыми полуграниченными жидкими средами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Уравнения движения и условия сопряжения в гидроупругой системе

Уравнение движения изотропной упругой среды записывается в виде

$$G\nabla^2\vec{u} + (\lambda + G)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

выражение для компонент тензора напряжений –

$$\sigma_{ik} = G(u_{i,k} + u_{k,i}) + \lambda u_{n,n} \delta_{i,k}. \quad (2)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения: t – время; \vec{u} – вектор перемещения; σ_{13}, σ_{33} – компоненты тензора напряжений; \vec{v} – вектор скорости; p – давление; K_1, K_2 – модули упругости жидких сред; $\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$, $G = E/2(1+\nu)$ – упругие постоянные Ламе; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; ρ, ρ_1, ρ_2 – плотности упругой и жидкой сред соответственно; c_e, c_s – скорости распространения волн расширения и волн сдвига упругой среды, $c_e = \sqrt{(\lambda+2G)/\rho}$, $c_s = \sqrt{G/\rho}$; c_1^{St}, c_2^{St} – скорости распространения волн Стоунли в жидких средах; $c_{0i} = \sqrt{K_i/\rho_i}$, $i=1,2$ – скорости звука в жидких средах; c – фазовая скорость; l – длина волны; $k = 2\pi/l$ – волновое число; $\omega = 2\pi c/l$ – круговая частота.

Представим векторное поле смещения \vec{u} в виде суммы градиента скалярного потенциала ϕ и ро-

тора векторного потенциала \vec{A} :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в (1), приходим к независимым волновым уравнениям, описывающим движение упругой среды:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) описывает распространение дилатационной волны, характеризуемой изменением объема без изменения формы и скоростью $c_e = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$, а уравнение (5) описывает распространение эквиволюминальной волны, характеризуемой искажением формы и скоростью $c_s = \sqrt{g/\rho}$.

Будем считать жидкость невязкой сжимаемой, движение потенциальным, безвихревым. В этом случае система уравнений гидродинамики приводится к волновому уравнению

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

$$\vec{v} = -\vec{\nabla}\psi, \quad p = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Искомые функции должны удовлетворять условиям сопряжения на поверхностях контакта

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = -p, \quad v_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t}. \quad (7)$$

В полубесконечных областях функция ψ должна удовлетворять условиям излучения и ограниченности на бесконечности. Безразмерные величины введены по формулам (далее звездочки опускаются)

$$(x_1^*, x_3^*) = (x_1, x_3)/h, \quad t^* = tc_s/h,$$

$$(u_1^*, u_3^*) = (u_1, u_3)/h, \quad (v_1^*, v_3^*) = (v_1, v_3)/c_s,$$

$$p^* = p/\rho_1 c_s^2, \quad c^* = c/c_s.$$

Здесь h – толщина упругого слоя.

1.2. Гидроупругая система типа “упругий слой между жидкими полуограниченными средами”

В прямоугольной декартовой системе координат $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ с учетом соотношения для лапласиана векторной функции

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (8)$$

при условии, что $\vec{A} = \varkappa \vec{e}_2$, уравнения движения (4)–(6) распространения волн в упругом слое Ω и в неограниченных жидких средах Ω_1 и Ω_2 принимают вид

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (9)$$

$$\nabla^2 \varkappa - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (10)$$

$$\nabla^2 \psi_1 - \frac{1}{c_{01}^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (11)$$

$$\nabla^2 \psi_2 - \frac{1}{c_{02}^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad (12)$$

где

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3;$$

$$\Omega = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, |z| \leq h/2\};$$

$$\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z > h/2\};$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, z < -h/2\}.$$

Условия сопряжения (7) на поверхностях контакта $x = h/2$ ($j=1$) и $x = -h/2$ ($j=2$) с учетом соотношения (2) приводятся к виду

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\lambda}{G} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x \partial z} \right) = -\rho_{0j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} = 0. \quad (15)$$

В полубесконечных областях $\Omega_{1,2}$ функции $\psi_{1,2}$ должны удовлетворять условиям излучения и ограниченности на бесконечности

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(\psi_j - i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \psi_j = 0.$$

Решения ищем в классе бегущих волн вида

$$f(x, z, t) = F(z) \exp(i(kx - \omega t)). \quad (17)$$

Колебания упругого слоя, погруженного в жидкость, генерируют волны давления в жидкости с амплитудами, убывающими экспоненциально с расстоянием от поверхности пластины.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Вывод дисперсионного уравнения и анализ решений

Подставляя выражение (17) в уравнения движения (9) – (12), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - (k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2})\Phi = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2K}{dz^2} - (k^2 - \frac{\omega^2}{c_e^2})K = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dz^2} - (k^2 - \frac{\omega^2}{c_{01}^2})\Psi_1 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dz^2} - (k^2 - \frac{\omega^2}{c_{02}^2})\Psi_2 = 0 \quad (21)$$

и соответствующие условия сопряжения на поверхностях контакта $x = \pm h/2$ ($j=1, 2$ соответствует $x = h/2$ и $x = -h/2$)

$$2ik \frac{d\Phi}{dz} - k^2 K - \frac{d^2K}{dz^2} = 0, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\lambda}{G} + 2\right) \frac{d^2\Phi}{dz^2} - \frac{\lambda}{G} k^2 \Phi + 2ik \frac{dK}{dz} - i\omega \rho_{0j} \Psi_j = 0, \quad (23)$$

$$i\omega \frac{d\Phi}{dz} - k\omega K - \frac{d\Psi_j}{dz} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Решения дифференциальных уравнений (18) – (21) с учетом условий затухания (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= C_1 \exp(\lambda_1 z) + C_2 \exp(-\lambda_1 z), \\ K(z) &= C_3 \exp(\lambda_2 z) + C_4 \exp(-\lambda_2 z), \\ \Psi_1(z) &= C_5 \exp(-\lambda_{31} z), \\ \Psi_2(z) &= C_6 \exp(\lambda_{32} z), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_e}\right)^2}; \\ \lambda_2 &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_s}\right)^2}; \\ \lambda_{3j} &= \frac{2\pi}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{0j}}\right)^2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя решения (25) в условия сопряжения (22), (23), получаем систему алгебраических

уравнений

$$\begin{aligned} &2ik\lambda_1(e_1^+ C_1 - e_1^- C_2) - (k^2 + \lambda_2^2)(e_2^+ C_3 + e_2^- C_4) = 0, \\ &2ik\lambda_1(e_1^- C_1 - e_1^+ C_2) - (k^2 + \lambda_2^2)(e_2^- C_3 + e_2^+ C_4) = 0, \\ &b_1\lambda_1(e_1^+ C_1 + e_1^- C_2) - 2ik\lambda_2(e_2^- C_3 - e_2^+ C_4) - i\omega\rho_1 e_3^- C_5 = 0, \\ &b_1\lambda_1(e_1^- C_1 + e_1^+ C_2) - 2ik\lambda_2(e_2^+ C_3 - e_2^- C_4) - i\omega\rho_2 e_3^- C_6 = 0, \\ &i\omega\lambda_1(e_1^+ C_1 - e_1^- C_2) - k\omega(e_2^+ C_3 + e_2^- C_4) + \lambda_3 e_3^- C_5 = 0, \\ &i\omega\lambda_1(e_1^- C_1 - e_1^+ C_2) - k\omega(e_2^- C_3 + e_2^+ C_4) - \lambda_3 e_3^- C_6 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $b_1 = (\lambda/G + 2)\lambda_1^2 - k^2\lambda/G$; $e_i^\pm = \exp(\pm\lambda_i h/2)$. Условие совместности этой системы есть равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 2ia_1 e_1^+ & 2ia_1 e_1^- & -b_2 e_2^+ & b_2 e_2^- & 0 & 0 \\ 2ia_1 e_1^- & 2ia_1 e_1^+ & -b_2 e_2^- & b_2 e_2^+ & 0 & 0 \\ b_1 e_1^+ & -b_1 e_1^- & 2ia_2 e_2^+ & 2ia_2 e_2^- - ic\rho_1 & 0 & 0 \\ b_1 e_1^- & -b_1 e_1^+ & 2ia_2 e_2^- & 2ia_2 e_2^+ & 0 & ic\rho_2 \\ ica_1 e_1^+ & ica_1 e_1^- & -ce_2^+ & ce_2^- & a_{31} & 0 \\ ca_1 e_1^- & ica_1 e_1^+ & -ce_2^- & ce_2^+ & 0 & a_{32} \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

где $b_2 = (2 - c^2)$; $a_i = \lambda_i/k$.

Соотношение (27) представляет собой дисперсионное уравнение, соответствующее распространению гармонических волн (17) вдоль упругого слоя, помещенного между жидкими средами. Преобразуем его к следующей форме:

$$\begin{vmatrix} 2ia_1 \text{ch}_1 & 0 & 0 & -b_2 \text{ch}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2ia_1 \text{sh}_1 & -b_2 \text{sh}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 \text{ch}_1 & 2ia_2 \text{ch}_2 & 0 & ic\rho_+ & ic\rho_- \\ b_1 \text{sh}_1 & 0 & 0 & 2ia_2 \text{sh}_2 & ic\rho_- & ic\rho_+ \\ ica_1 \text{ch}_1 & 0 & 0 & -c \text{ch}_2 & 0 & -2a_{32} \\ 0 & 2ica_1 \text{sh}_1 & -\text{sh}_2 & 0 & -2a_{31} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (28)$$

где $\text{sh}_i = \text{sh}(\lambda_i h/2)$; $\text{ch}_i = \text{ch}(\lambda_i h/2)$, $i = 1, 2$.

Из (28) видно, что если жидкости имеют одинаковые плотности $\rho_1 = \rho_2$, то дисперсионное уравнение распадается на два независимых уравне-

ния [21], одно из которых соответствует тричным колебаниям:

$$a_0 \left[-4a_1 a_2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_2 h}{2} + (2 - c^2)^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_2 h}{2} + c^4 \rho_1 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_2 h}{2} \right] = 0,$$

а второе – антисимметричным колебания

$$a_0 \left[-4a_1 a_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 h}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_2 h}{2} + (2 - c^2)^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_2 h}{2} + c^4 \rho_1 \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 h}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_2 h}{2} \right] = 0,$$

где $a_0 = a_{31} = a_{32}$.

Уравнения (29) и (30) при $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$, $l \rightarrow \infty$ рождаются в дисперсионное уравнение, описывающее волны Стоунли:

$$a_0 [4a_1 a_2 - (2 - c^2)^2] - \rho_1 c^4 a_2 = 0.$$

При $\rho_1 = \rho_2 \rightarrow 0$ и $l \rightarrow 0$ уравнения (29), (30) вырождаются в уравнение поверхностных волн Рэлея:

$$-4a_1 a_2 + (2 - c^2)^2 = 0.$$

Уравнение (28) было решено численно для случая $c_{02} < c_{01} < c_s < c_e$ для значений фазовых скоростей $c < c_{01}$. Значения параметров были рассмотрены следующие: $E/K_i = 36$, ($i = 1, 2$), $\nu = 0.3$, $\rho_1 \rho = 0.09$, $\rho_2 / \rho = 0.18$, что соответствует системе “вода – сталь – бензин”.

На рис. 2 представлены зависимости безразмерных значений фазовой скорости от длины волны для случая, когда плотности различны $\rho_1 = 0.09$, $\rho_2 = 0.18$ (сплошные линии), а также для двух случаев, когда плотности жидкостей одинаковы $\rho_1 = \rho_2 = 0.09$ (штриховая, индекс 1), $\rho_1 = \rho_2 = 0.18$ (штриховая, индекс 2).

Как и было установлено ранее, в случае равных плотностей ветвь, соответствующая симметричным колебаниям, устремляется к $c = c_{0i}$ при $l \rightarrow \infty$, а ветвь, соответствующая антисимметричным колебаниям, – к нулю при $l \rightarrow \infty$. При $l \rightarrow 0$ обе ветви стремятся к одному значению – скорости распространения волн Стоунли, которая несколько меньше скорости распространения звука в жидкости $c_i^{St} < c_{0i}$, ($i = 1, 2$).

Для жидкостей с различными плотностями дисперсионное уравнение (28) не распадается на два независимых, однако также имеет два различных корня, удовлетворяющих условию $c < c_{01}$. В этом случае первая дисперсионная кривая при $l \rightarrow \infty$ устремляется к скорости звука в менее плотной жидкости, а при $l \rightarrow 0$ – к скорости распространения волн Стоунли для этой же жидкости

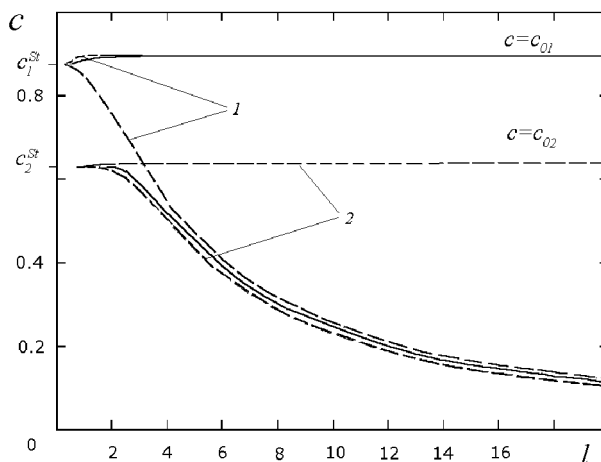


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от длины волны

c_1^{St} . Как видно из графика, эта ветвь расположена несколько ниже дисперсионной кривой, описывающей симметричные колебания упругого слоя, помещенного в менее плотную жидкость. Учитывая это, колебания упругого слоя между различными жидкостями, соответствующие этим корням, назовем квазисимметричными.

Вторая дисперсионная кривая при $l \rightarrow \infty$ устремляется к нулю, а при $l \rightarrow 0$ устремляется к скорости распространения волн Стоунли для более плотной жидкости c_2^{St} . Из графика видно, что эта ветвь несколько выше дисперсионной кривой, описывающей антисимметричные колебания упругого слоя, помещенного в более плотную жидкость. Колебания упругого слоя между различными жидкостями, которые соответствуют корням этой ветви, назовем квазиантисимметричными.

Отметим также, что полный анализ дисперсионного уравнения (28) в случае различных жидкостей показал, что при $c_{02} < c_{01} < c_s < c_e$ не существует гармонических волн вида (17), которые бы имели фазовую скорость $c_1^{St} < c < c_2^{St}$.

2.2. Волновые моды

Для определения касательных и нормальных напряжений, составляющих вектора смещения \vec{u} , а также давления в жидкости подставим значения потенциалов ϕ , \vec{A} , ψ_1 и ψ_2 с учетом условий сопряжения (7) в соотношения (2) и (3). Выражения для σ_{13} , σ_{33} , u_1 , u_3 и p_j , ($j = 1, 2$) с точностью до

множителя $\exp i(kx - \omega t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= 2ik\lambda_1 (\exp(\lambda_1 z)C_1 - \exp(-\lambda_1 z)C_2) - \\ &\quad - (k^2 + \lambda_2^2) (\exp(\lambda_2 z)C_3 + \exp(-\lambda_2 z)C_4), \\ \sigma_{33} &= \left((\lambda/G + 2)\lambda_1^2 - \lambda/Gk^2 \right) \times \\ &\quad \times (\exp(\lambda_1 z)C_1 + \exp(-\lambda_1 z)C_2) + \\ &\quad + 2ik\lambda_2 (\exp(\lambda_2 z)C_3 - \exp(-\lambda_2 z)C_4), \\ u_1 &= ik (\exp(\lambda_1 z)C_1 + \exp(-\lambda_1 z)C_2) - \\ &\quad - \lambda_2 (\exp(\lambda_2 z)C_3 + \exp(-\lambda_2 z)C_4), \\ u_3 &= \lambda_1 (\exp(\lambda_1 z)C_1 - \exp(-\lambda_1 z)C_2) + \\ &\quad + ik (\exp(\lambda_2 z)C_3 + \exp(-\lambda_2 z)C_4), \\ p_j &= -i\omega\rho_j \exp(\mp\lambda_{3j}z)C_{4+j}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (31)$$

На рис. 3 представлены волновые моды в упругом слое для u_1 , u_3 , σ_{13} , σ_{33} при следующих безразмерных значениях параметров: $E/K_i = 36$, $\nu = 0.3$, $l = 2.5$, значения плотностей жидкости $\rho_1 = 0.09$, $\rho_2 = 0.18$ (сплошная линия), $\rho_1 = \rho_2 = 0.09$ (штриховая, индекс 1), $\rho_1 = \rho_2 = 0.18$ (штриховая, индекс 2). Симметричные и квазисимметричные моды изображены на рис. 3, а, антисимметричные и квазиантисимметричные – на рис. 3, б. Из приведенных графиков видно существенное нарушение симметричных или антисимметричных зависимостей при различных плотностях жидких сред, окружающих упругий слой. Так, при квазисимметричных и квазиантисимметричных колебаниях абсолютные значения на границах контакта упругой и жидкой сред $z = -h/2$ и $z = h/2$ различны, в то время как при симметричных и антисимметричных одинаковы. Исключение составляет только зависимость σ_{13} , значение которой на поверхностях контакта равно нулю согласно граничному условию (7).

На рис. 4 представлены волновые моды в упругом слое для σ_{33} и жидких прилегающих средах для p при $|z| \leq 2$. При этом были приняты следующие значения безразмерных параметров: $E/K = 36$, $\nu = 0.3$, $l = 2.5$, значения плотностей жидкости $\rho_1 = 0.09$, $\rho_2 = 0.18$ (сплошная линия): $\rho_1 = \rho_2 = 0.09$ (штриховая: индекс 1), $\rho_1 = \rho_2 = 0.18$ (штриховая: индекс 2). Симметричные и квазисимметричные моды изображены на рис. 4, а, антисимметричные и квазиантисимметричные – на рис. 4, б.

Все зависимости давления в жидкостях $p(z)$ при $|z| \rightarrow \pm\infty$ представляют собой экспоненциально убывающие функции за исключением од-

ной – тригонометрической. Периодическая зависимость возникает при значениях фазовой скорости, больших скорости распространения звука в жидкости, что в исследуемых нами случаях имеет место при квазисимметричных колебаниях в более плотной жидкости $\rho_2 = 0.18$ (см. рис. 4, а).

Сравнивая скорости убывания экспоненциальных зависимостей $p(z)$, отметим, что скорость убывания при одинаковых плотностях жидких сред возрастает с убыванием плотностей жидкости. Наличие же в противоположном полупространстве более легкой жидкости несколько уменьшает скорость убывания в рассматриваемом полупространстве и наоборот.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведен анализ влияния жидкостей различной плотности на распространение волн в упругом слое, контактирующем с ними. Установлены и анализируются новые эффекты, обусловленные разностью плотностей, в области низких фазовых скоростей, где существуют два действительных корня дисперсионного уравнения.

Показано, что первая дисперсионная ветвь расположена несколько ниже дисперсионной кривой, описывающей симметричные колебания упругого слоя, помещенного в менее плотную жидкость. Вторая дисперсионная ветвь расположена несколько выше дисперсионной кривой, описывающей симметричные колебания упругого слоя, помещенного в более плотную жидкость. Колебания, соответствующие корням дисперсионного уравнения первой и второй ветви, названы квазисимметричными и квазиантисимметричными.

Показано, что волновые моды, соответствующие квазисимметричным и квазиантисимметричным колебаниям, существенно отличаются от соответствующих волновых мод симметричных и антисимметричных колебаний при контакте упругого слоя с одинаковыми жидкостями. Наличие в противоположном от рассматриваемого жидком полупространстве более легкой жидкости несколько уменьшает скорость убывания возмущений с увеличением расстояния от упругого слоя в рассматриваемом полупространстве и наоборот.

1. Seemann W., Wauer J. Fluid-structural coupling of vibration bodies in a surrounding confined liquid // Z. für angewandte Math. Mech. – 1996. – 76, N 2. – P. 67–79.
2. Hawwa M. A., Nayfeh A. H. Flexural wave propagation in a fluid loaded plate with periodically varying rigidity // Trans. ASME. J. Vib. Acoust. – 1997. – 119, N 3. – P. 415–419.

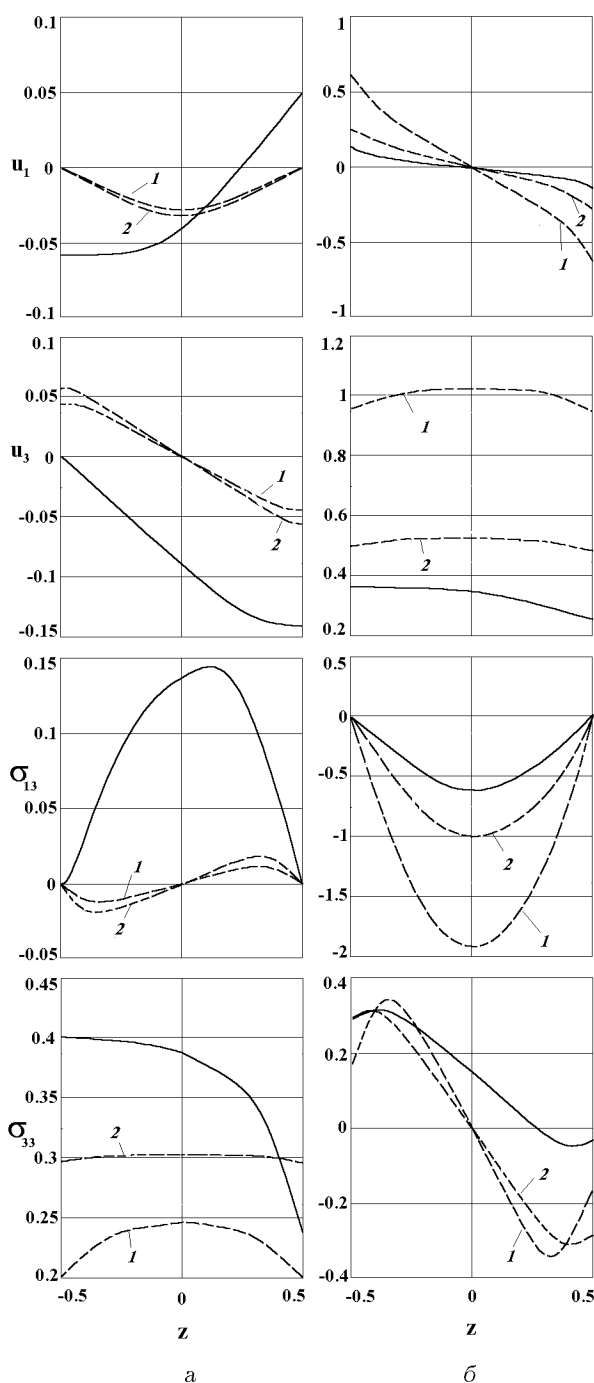


Рис. 3. Волновые моды в упругом слое

3. Rayleigh J. W. S. On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // Proc. London Math. Soc.- 1889.- **20**, N 357.- P. 225-234.
4. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука (в 2-х томах).- М.: ГИТТЛ, 1955.- 503+475 с.
5. Lamb H. On the flexure of elastic plate (Appendix) // Proc. Lond. Math. Soc.- 1889/1890.- **21**.- P. 88-

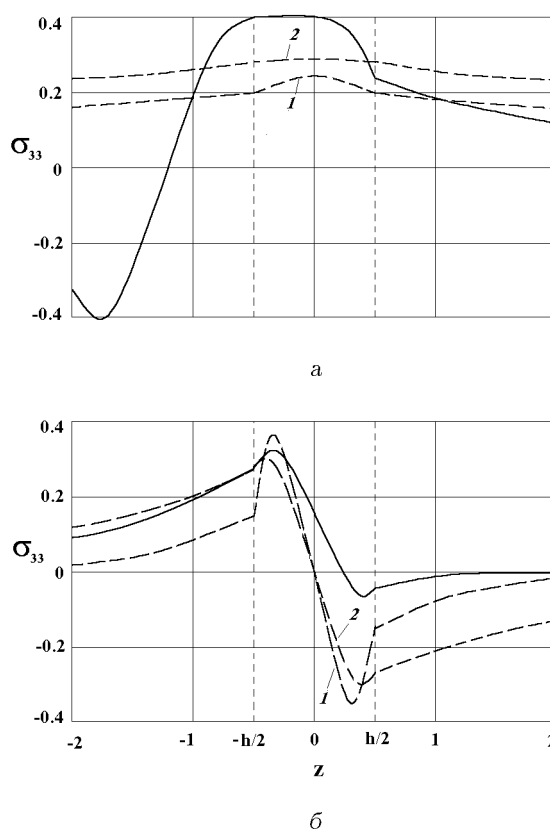


Рис. 4. Волновые моды в гидроупругой системе

- 90.
6. Lamb H. On waves of an elastic plate // Proc. Roy. Soc. London.- 1917.- Ser. A, **93**, N A648.- P. 114-128.
7. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике.- М.: Наука, 1966.- 168 с.
8. Григорюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические колебания стержней, пластин и оболочек.- М.: Наука, 1973.- 272 с.
9. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids.- Amsterdam: Noth-Holland, 1973.- 425 p.
10. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.- К.: Наук. думка, 1981.- 283 p.
11. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.- К.: Наук. думка, 1989.- 204 с.
12. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.- М.: Наука, 1973.- 344 с.
13. Dubbleday P. S. Application of a new complex root-finding technique to the dispersion relations for elastic waves in a fluid-loaded plate // SIAM J. Appl. Math.- 1983.- **43**, N5.- P. 1127-1139.
14. Langley A. J. Exact and approximate theories for fluid-loaded, infinite, elastic plates // J. Acoust. Soc. Amer.- 1988.- **83**, N 4.- P. 1366-1376.
15. Grabowska A. Propagation of elastic wave in solid layer-liquid system // Arch. Acoust.- 1979.- **4**, N 1.- P. 57-63.

16. *Crighton D. G.* Approximations to the admittances and wavenumbers of fluid-loaded panels // *J. Sound and Vibr.*— 1980.— **68**, N 1.— P. 15–33.
17. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.— 216 с.
18. *Nowinsky J. L.* On the propagation of nonlocal elastic waves in plate immersed in a fluid // *Mech. Res. Commun.*— 1985.— **12**, N 6.— P. 333–338.
19. *Chandrasecharaiah D. S.* On waves of general type propagation at the interface between an elastic half space and a liquid // *J. of Elast.*— 1983.— **13**, N 1.— P. 83–86.
20. *Pekeris C. L.* Theory of propagation of explosive sound in shallow water // *Memoir 27. Geolog. Soc. Amer.*— 1948.— P. 12–32.
21. *Farnell C. L., Adler E. L.* Elastic wave propagation in thin layers // *Phys. Acoust.*— 1972.— **9**.— P. 35–127.
22. *Селезов И. Т., Сорокина В. В.* Распространение волн вдоль упругого слоя в жидкости // *Гидромеханика.*— 1975.— Вып. 32.— С. 9–14.
23. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Распространение гидроупругих волн в упругом или жидком слое, контактирующем с внешней средой // *Гидромеханика.*— 1993.— Вып. 68.— С. 15–20.
24. *Rochlin S. I., Chimenti D. E., Nayfeh A. H.* On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer // *J. Acoust. Soc. Amer.*— 1989.— **34**, N 1.— P. 90–117.
25. *Авраменко О. В., Селезов И. Т.* Распространение волн вдоль упругого неоднородного слоя в жидкости // *Изв. РАН. МТТ.*— 1996.— N 6.— С. 172–182.
26. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Распространение волн в помещенном в жидкость в упругом слое с пустотами // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.*— 1997.— N 1.— С. 90–96.
27. *Tang Wenyong, Chen Tieyun* Analysis for fluid-structure interaction vibration of laminated composite ship panels // *J. Shanghai Jiaotong Univ.*— 1997.— **31**, N 11.— P. 112–115.
28. *Habault D., Filippi P. G. T.* Light fluid approximation for sound radiation and diffraction by thin elastic plates // *J. Sound. and Vibr.*— 1998.— **213**, N 2.— P. 333–374.
29. *Yu Soumian, Yang Pihua, Yu Tian* Resonance theory of elastic head waves propagating in a solid layer in tight contact with a thick solid base // *J. Vibr. and Control.*— 1998.— **4**, N 3.— P. 219–236.
30. *Zheming Zhu, Xiaoliang Zhao, Gonghuan Du* Theory of acoustic streaming generated by ultrasonic Lamb waves // *J. Acoust. Soc. Amer.*— 1998.— **104**, N 1.— P. 89–90.
31. *Selezov I. T.* Some hyperbolic models for wave propagation // *7th Int. Conf. "Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications"*. Vol. 2.— Zurich, 1998.— P. 833–842.