

УДК 539.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

А. Г. ЛЕЙКО*, В. Г. САВИН**, В. П. ТКАЧЕНКО*

* Государственный научно-исследовательский институт гидроприборов, Киев

** Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

Получено 10.03.99 ◊ Пересмотрено 27.04.99

Поставлена и решена плоская задача о взаимодействии плоских акустических волн с гидроупругой системой тонкостенных пьезокерамических цилиндрических преобразователей с учетом связанности акустических, механических и электрических полей в каждом преобразователе системы и взаимного влияния многократно отраженных волн всеми элементами системы. Решение сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, разрешимой методом редукции. Соответствие принятых в работе математических моделей основным особенностям реальных физических систем подобного типа подтверждено сопоставлением результатов расчета с экспериментальными данными.

Поставлено та розв'язано плоску задачу про взаємодію плоских акустичних хвиль з гідропружною системою тонкостінних п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів з урахуванням зв'язаності акустичних, механічних та електричних полів у кожному перетворювачі системи та взаємного впливу багаторазово відбитих хвиль усіма елементами системи. Розв'язок зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка вирішується методом редукції. Відповідність прийнятих в роботі математичних моделей основним особливостям реальних фізичних систем такого типу підтверджено співставленням результатів розрахунку з експериментальними даними.

A plane problem on interaction of plane acoustical waves with hydroelectroelastic system of thin-walled piezoelectric ceramical cylindrical transducers was stated and solved. Matching of acoustical, mechanical and electrical fields in each of transducers and mutual influence of waves repeatedly reflected by all elements of the system were taken into account. Solution of the problem is obtained by solving the infinite system of linear algebraic equations by method of reduction. Comparison of numerical results and experimental data confirms the conformity of mathematical models applied in this paper to main features of real physical systems of such kind.

ВВЕДЕНИЕ

Система пьезокерамических преобразователей, излучающих или принимающих акустические волны, является важнейшей составной частью устройств технической акустики. В развитии подходов к изучению задачи приема и излучения акустических волн системами преобразователей наиболее перспективны исследования поведения элементов и систем в целом как электроупругих тел с учетом особенностей их взаимодействия и взаимовлияния акустических, механических и электрических полей в керамике. Эти исследования представляют собой сравнительно новый этап в развитии модельных представлений о системах преобразователей и составляют новый класс сопряженных задач электроакустики – задач так называемого “сквозного типа”, где напряжению на выходе генератора, нагрузкой которого служит элемент системы, ставится в соответствие акустическое давление, развиваемое системой в рабочей среде (режим излучения), или же акустическому давлению в поле падающей на систему преобразователей акустической волны – напряжению на

электрической нагрузке элементов системы (режим приема).

Теоретическую основу таких исследований составляют задачи дифракции акустических волн на пьезокерамических телах, находящихся в жидкости, а также излучение ими акустических волн при электрическом возбуждении. Из публикаций по этой проблематике выделим работы [1–5], в которых рассмотрены задачи излучения и приема акустических волн плоскими или соосными антенными решетками, состоящими из тонкостенных пьезокерамических цилиндрических преобразователей.

Отметим, что во всех этих работах динамическое поведение электроупругих оболочек исследовалось в предположении, что для их описания оправдано привлечение гипотез Кирхгофа – Лява, а также, что поведение электрического поля по толщине оболочки характеризуется линейным законом изменения нормальной составляющей напряженности электрического поля и не зависящим от толщины координаты распределением нормальной составляющей вектора электрической индукции [6]. Что касается исследований поведе-

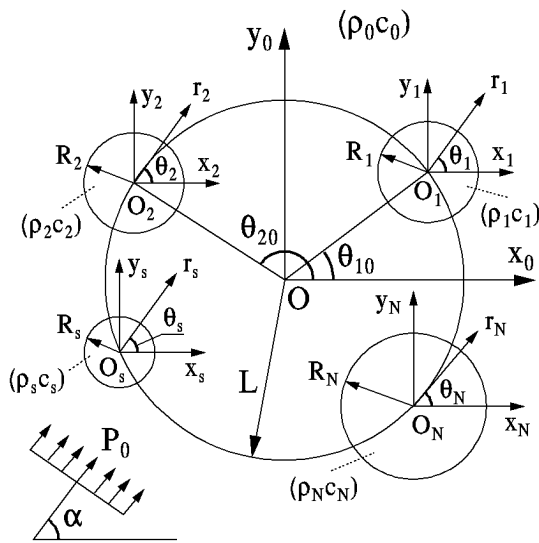


Рис. 1. Нормальное сечение криволинейной системы произвольных пьезокерамических цилиндрических преобразователей и системы координат, введенные для решения задачи

ния пьезокерамических преобразователей, образующих антенные решетки другой конфигурации (отличные от плоской и соосной), то таких работ сравнительно мало.

Целью настоящей работы является постановка и решение плоской сопряженной задачи электроакустики о взаимодействии плоской акустической волны с цилиндрической решеткой, состоящей из тонкостенных пьезокерамических цилиндрических преобразователей, экспериментальное подтверждение применимости используемой математической модели, а также проведение численных исследований, позволяющих установить общие физические закономерности поведения выбранных вариантов электроупругих систем.

Указанный объем исследований разбит на две части. Первая часть посвящена постановке и решению задачи, эксперименту и сопоставлению численных и экспериментальных результатов. Эти исследования отражены в настоящей работе. Во второй части будут приведены результаты вычислений, их анализ и обобщение. Публикация этих результатов планируется в ближайших номерах журнала.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на систему, состоящую из произвольного числа N бесконечно длинных, параллельных, не

обязательно одинаковых по диаметру, тонкостенных цилиндрических пьезообразователей, находящихся в жидкости и содержащих жидкость во внутренних объемах, падает плоская акустическая волна. Жидкости, находящиеся во внутренних объемах преобразователей, могут отличаться от внешней среды. Предполагается, что преобразователи поляризованы в радиальном направлении, имеют сплошные электродированные покрытия на наружной и внутренней поверхностях и образуют круговую антенную решетку, т.е. их оси параллельны и расположены на некоторой воображаемой цилиндрической поверхности радиуса L .

Введем полярные координаты r_0, θ_0 с полюсом в центре окружности радиуса L и координаты r_k, θ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) связанные с каждым из преобразователей (рис. 1). Начало каждой полярной системы O_k в переменных r_0, θ_0 обозначим через $\theta_0 = \theta_{k0}$. Здесь $r_0 = L$.

Рассматриваемый динамический процесс моделируется в рамках допущения, принятых в теории тонких электроупругих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява [6], и теории акустического приближения [8]. Исходными для сформулированной задачи гидроэлектроупругости является следующая система соотношений, включающая уравнения движения тонкостенных пьезокерамических оболочек:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \beta_k^2 \mu^2) \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial \theta_k^2} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \theta_k} - \\
 & - \beta_k^2 \mu^2 \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \theta_k} - \frac{R_k^2}{C_{pk}^2} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial t^2} = 0, \\
 & \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \theta_k} - \beta_k^2 \mu^2 \frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial \theta_k^3} + W^{(k)} + \\
 & + \beta_k^2 \mu^2 \frac{\partial^4 U^{(k)}}{\partial \theta_k^4} + \frac{R_k^2}{C_{pk}^2} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2} - \\
 & - R_k^2 (1 + \nu_k) d_{31,k} E_r^{(k)} = \\
 & = \frac{S_{11,k}^E (1 - \nu_k^2) R_k^2}{h_k} q^{(k)}, \\
 & k = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{1}$$

зависимость между акустическими нагрузками, действующими на оболочки, и давлениями в акустических средах

$$q^{(k)} = [-p^{(0)} + p^{(k)}]_{r_k=R_k}, \tag{2}$$

уравнения описывающие волновые процессы в жидкостях, вне и во внутренних объемах преобра-

зователей

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где

$$p^{(0)} = -\rho_0 \frac{\partial(\varphi^{(0)} - \psi)}{\partial t};$$

$$p^{(k)} = -\rho_k \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial t}.$$

Здесь $W^{(k)}$, $U^{(k)}$ – нормальные и тангенциальные составляющие вектора перемещений точек срединной поверхности каждой оболочки; $E_r^{(k)}$ – напряженность возникающего в ней электрического поля; $q^{(k)}$ – действующая на каждую оболочку акустическая нагрузка; $\varphi^{(0)}$ – потенциал скоростей отраженных и излученных во внешнюю среду волн; $\varphi^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, N$) потенциалы скоростей волн, распространяющихся во внутренних объемах; ψ – потенциал скоростей падающей волны; p_0 , $p^{(0)}$, $p^{(k)}$ – давления в акустических средах; β_k , μ_k , C_{pk} – постоянные, равные соответственно

$$\beta_k^2 = \frac{h_k^2}{12R_k^2};$$

$$\mu_k = 1 + \frac{1 + \nu_k}{2} \frac{\kappa_{p,k}^2}{1 - \kappa_{p,k}^2};$$

$$C_{pk}^2 = \frac{1}{\gamma_k S_{11,k}^E (1 - \nu_k^2)};$$

$$\kappa_{p,k} = \frac{2}{1 - \nu_k} \frac{d_{31,k}^2}{s_{11,k}^E \varepsilon_{33,k}^T};$$

$S_{11,k}^E$, ν_k , $d_{31,k}$, $\varepsilon_{33,k}^T$ – модуль упругости, пьезомодуль и электрическая проницаемость материала k -го преобразователя; $\kappa_{p,k}$ – его планарный коэффициент электромеханической связи; γ_k – плотность керамики; h_k , R_k – толщина и радиус срединной поверхности соответствующей оболочки; c_0 , ρ_0 , c_k , ρ_k – параметры внешней и внутренних акустических сред (скорость звука и плотность); t – время.

Различным вариантам коммутации электродов пьезопреобразователей соответствуют следующие зависимости:

- при закороченных электродах –

$$E_r^{(k)} = 0, \quad (5)$$

- при разомкнутых электродах –

$$I^{(k)} = 0, \quad (6)$$

- при замкнутых через нагрузочное сопротивление $Z_n^{(k)}$ электродах –

$$I^{(k)} = E_r^{(k)} h_k / Z_n^{(k)}, \quad (7)$$

где $I^{(k)}$ – динамический ток смещения в пьезокерамике, приходящийся на поверхность оболочки единичной высоты (погонный ток) и равный [6]

$$I^{(k)} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \frac{d_{31,k}}{S_{11,k}^E (1 - \nu_k^2)} \times \times \frac{1}{R_k} \left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \theta_k} + \frac{W^{(k)}}{R_k} \right) \Bigg\} R_k d\theta_k. \quad (8)$$

Исходную систему уравнений (1) – (8) дополним граничными условиями, обеспечивающими безотрывный контакт преобразователей с акустическими средами:

$$\frac{\partial W^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial[\varphi^{(0)} + \psi]}{\partial r_k} \Bigg|_{r_k=R_k}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial W^{(k)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r_k} \Bigg|_{r_k=R_k}.$$

Потенциал скоростей ψ , описывающий падающую плоскую акустическую волну p_0 , распространяющуюся под углом α к декартовой координате x_0 (или x_k), в переменных r_k , θ_k выражается формулой

$$\psi = Q \exp \left\{ -i\omega t + i \frac{\omega}{c_0} \times \times [L \cos(\theta_{k0} - \alpha) + r_k \cos(\theta_k - \alpha)] \right\}, \quad (10)$$

где постоянная Q определяет амплитуду действующей волновой нагрузки. Для установившихся процессов зависимость физических характеристик от времени t учитывается множителем $\exp(-i\omega t)$. Здесь и далее ω – частота возбуждения гидроэлектроруэгой системы. В этом случае функция $\varphi^{(0)}$ должна удовлетворять условию излучения Зоммерфельда, а функции $\varphi^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, N$) – ограниченности в начале координат $r_k=0$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для процессов, установившихся во времени, неизвестные величины будем искать в виде рядов с разделенными переменными:

$$W^{(k)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^{(k)} \times \exp(in\theta_k), \quad (11)$$

$$U^{(k)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^{(k)} \times \exp(in\theta_k), \quad (12)$$

$$\varphi^{(0)} = \exp(-i\omega t) \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{nk}^{(0)}(r_k) \times \exp(in\theta_k), \quad (13)$$

$$\varphi^{(k)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(r_k) \times \exp(in\theta_k). \quad (14)$$

Отметим, что потенциал $\varphi^{(0)}$ представлен как суперпозиция волн, отраженных и излученных каждой из оболочек.

У преобразователей со сплошными электродами напряженность $E^{(k)}$ не зависит от пространственных координат r_k, θ_k :

$$E^{(k)} = \exp(-i\omega t) E_0^{(k)}. \quad (15)$$

Подстановка выражений (13), (14) в соотношения (3), (4) позволяет получить уравнение Бесселя относительно $\varphi_{nk}^{(0)}, \varphi_n^{(k)}$. В результате общие решения искомых потенциалов $\varphi_{nk}^{(0)}, \varphi_n^{(k)}$ с учетом условий излучения Зоммерфельда и ограниченности возмущений при $r_k=0$ выражаются через функции Ханкеля $H_n^{(1)}$ и Бесселя J_n целых порядков:

$$\varphi^{(0)} = \exp(-i\omega t) \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(k)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) \times \exp(in\theta_k), \quad (16)$$

$$\varphi^{(k)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(k)} J_n \left(\frac{\omega}{c_k} r_k \right) \times \exp(in\theta_k), \quad (17)$$

где $A_n^{(k)}, B_n^{(k)}$ – постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Для представления потенциала $\varphi^{(0)}$ в одной (связанной с каждым из цилиндров) системе координат воспользуемся теоремой сложения для цилиндрических волновых функций

$$H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_j \right) \exp(in\theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n-m}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L_{kj} \right) J_m \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) \times \exp[i(n-m)\theta_{kj}] \exp(im\theta_k). \quad (18)$$

Здесь θ_{kj}, L_{kj} – координаты полюса Ok полярной системы (r_k, θ_k) в j -ой системе. Отметим, что равенство (18) справедливо при $r_k < L_{kj}$. Переразложения выражения (18) позволяют записать искомый потенциал в переменных r_k, θ_k :

$$\varphi^{(0)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n^{(k)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)} H_{m-n}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L_{kj} \right) J_n \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) \times \exp[i(n-m)\theta_{kj}] \right\} \exp(in\theta_k). \quad (19)$$

где штрих здесь и далее над суммой по j означает, что слагаемое $j=k$ отсутствует. В случае, когда пьезопреобразователи образуют круговую антенную решетку, т.е. когда оси всех цилиндров отстоят от точки O_0 на расстоянии L (см. рис. 1), θ_{kj} и L_{kj} принимают значения

$$\theta_{kj} = \frac{\theta_{k0} + \theta_{j0} \pm \pi}{2}, \quad (20)$$

$$L_{kj} = 2L \cos \frac{\pi - \theta_{k0} + \theta_{j0}}{2}.$$

В формулах (20) верхний знак соответствует случаю $k > j$, а нижний – $k < j$. Потенциал падающей волны ψ также представим рядом по собственным формам колебаний в координатах каждой из полярных систем (r_k, θ_k) :

$$\psi = Q \exp(-i\omega t) \exp \left[i \frac{\omega}{c_0} L \cos(\theta_{k0} - \alpha) \right] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) \exp(-in\alpha) \exp(in\theta_k). \quad (21)$$

Согласно выражениям (2), (4) и (17), (19), (21), действующая на каждую оболочку акустическая нагрузка $q^{(k)}$ может быть записана в виде

$$q^{(k)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^{(k)} \exp(in\theta_k). \quad (22)$$

В равенстве (22) через $q_n^{(k)}$ обозначены функции

$$\begin{aligned}
 q_n^{(k)} = & -i\omega \left\{ \rho_0 \left[A_n^{(k)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) + \right. \right. \\
 & + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)} H_{m-n}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L_{kj} \right) J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \times \\
 & \times \exp [i(n-m)\theta_{kj}] \left. \right] - \rho_k B_n^{(k)} J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) + \\
 & + Q \exp \left(i \frac{\omega}{c_0} L \cos(\theta_0 - \alpha) \right) i^n J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \left. \right\}.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Используя зависимости (5) – (7) и выражения (15), получаем формулу для $E_0^{(k)}$:

$$E_0^{(k)} = a_k W_0^{(k)}, \quad (24)$$

где постоянная a_k принимает следующие значения:

- при закороченных электродах –

$$a_k = 0, \quad (25)$$

- при разомкнутых электродах –

$$a_k = -\frac{1}{2d_{31,k} R_k} \frac{\kappa_{p,k}^2}{1 - \kappa_{p,k}^2}, \quad (26)$$

- при замкнутых через нагрузочное сопротивление $Z_n^{(k)}$ электродах –

$$\begin{aligned}
 a_k = & -\frac{1}{S_{11,k}^E (1 - \nu_k)} \times \\
 & \times \frac{i2\pi\omega d_{31,k} Z_n^{(k)}}{[h_k - i2\pi\omega \varepsilon_{33,k}^T (1 - \kappa_{p,k}^2) Z_n^{(k)} R_k]}.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, привлекая уравнения движения оболочек и выражения (11), (12), (22) и (24), находим зависимости между $W_n^{(k)}$, $U_n^{(k)}$, $q_n^{(k)}$:

$$W_n^{(k)} = \frac{\lambda_{nk}^{(1)} \lambda_{nk}^{(5)}}{\lambda_{nk}^{(1)} \lambda_{nk}^{(4)} + \lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(3)}} q_n^{(k)}, \quad (28)$$

$$U_n^{(k)} = -i \frac{\lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(5)}}{\lambda_{nk}^{(1)} \lambda_{nk}^{(4)} + \lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(3)}} q_n^{(k)}. \quad (29)$$

Здесь

$$\lambda_{nk}^{(1)} = \frac{R_k^2}{C_{pk}^2} \omega^2 - (1 + \beta_k^2 \mu_k) n^2;$$

$$\lambda_{nk}^{(2)} = \lambda_{nk}^{(3)} = n + \beta_k^2 \mu_k n^3;$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{nk}^{(4)} = & -\left[\frac{R_k^2}{C_{pk}^2} \omega^2 - (1 + \beta_k^2 \mu_k n^4) + \right. \\
 & \left. + R_k (1 + \nu_k) d_{31,k} \delta_{n0} a_k \right];
 \end{aligned}$$

$$\lambda_{nk}^{(5)} = \frac{S_{11,k}^E (1 - \nu_k^2) R_k^2}{h_k};$$

δ_{n0} – символ Кронекера.

Постоянные интегрирования $A_n^{(k)}$ и $B_n^{(k)}$, входящие в общие решения (16) и (17), находятся при удовлетворении граничным условиям (9), из которых с учетом выражений (22), (23), (28) следует бесконечная система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_n^{(k)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm1}^{(kj)} A_m^{(j)} + G_{n1}^{(k)} B_n^{(k)} = Q U_{n1}^{(k)}, \\ G_{n2}^{(k)} A_n^{(k)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm2}^{(kj)} A_m^{(j)} + B_n^{(k)} = Q U_{n2}^{(k)}. \end{cases} \quad (30)$$

Ее элементы $F_{nms}^{(kj)}$, $G_{ns}^{(k)}$, $U_{ns}^{(k)}$ ($s=1, 2$) имеют вид

$$F_{nm1}^{(kj)} = \frac{H_{n-m}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L_{kj} \right) \exp [i(m-n)\theta_{kj}] N_{n1}^{(k)}}{T_n^{(k)}},$$

$$G_{n1}^{(k)} = \frac{i\omega \rho_k b_n^{(k)} J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right)}{T_n^{(k)}},$$

$$U_{n1}^{(k)} = -\frac{i^n \exp \left[i \frac{\omega}{c_0} L \cos(\theta_{k0} - \alpha) \right] N_{n1}^{(k)}}{T_n^{(k)}},$$

$$\begin{aligned}
 F_{nm2}^{(kj)} = & -\frac{i\omega \rho_0 b_n^{(k)} H_{n-m}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L_{kj} \right)}{N_{n2}^{(k)}}, \times \\
 & \times J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \exp [i(m-n)\theta_{kj}],
 \end{aligned}$$

$$G_{n2}^{(k)} = -\frac{i\omega \rho_0 b_n^{(k)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right)}{N_{n2}^{(k)}},$$

$$\begin{aligned}
 U_{n1}^{(k)} = & \frac{i^{n+1} \omega \rho_0 b_n^{(k)} \exp \left[i \frac{\omega}{c_0} L \cos(\theta_{k0} - \alpha) \right]}{N_{n2}^{(k)}} \times \\
 & \times J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \exp(-in\alpha).
 \end{aligned}$$

где

$$T_n^{(k)} = \left[-i\omega\rho_0 b_n^{(k)} - \frac{n}{R_k} \right] H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) + \frac{\omega}{c_0} \times \\ \times H_{n+1}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right);$$

$$N_{n2}^{(k)} = \left[i\omega\rho_k b_n^{(k)} - \frac{n}{R_k} \right] J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) + \frac{\omega}{c_0} \times \\ \times J_{n+1} \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right);$$

$$b_n^{(k)} = -i\omega \frac{\lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(5)}}{\lambda_{nk}^{(1)} \lambda_{nk}^{(4)} + \lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(3)}} q_n^{(k)}.$$

Можно показать [8], что определитель бесконечной системы (30) является определителем нормального типа, а сама система имеет единственное решение, которое может быть получено методом редукции. С увеличением порядка усеченной системы можно добиться практической сходимости получаемых результатов, т.е. выполнять расчеты с контролируемой точностью.

После вычисления постоянных $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$ определяются физические характеристики динамического процесса: акустические нагрузки $q^{(k)}$ по формулам (22), (23), перемещения оболочек $W^{(k)}$, $U^{(k)}$ по формулам (11), (12), (28), (29), напряженности электрических полей $E^{(k)}$ по формуле (24) и другие величины, представляющие интерес. Давления в акустических средах, заполняющих внешнее пространство $p^{(0)}$ и внутренние объемы $p^{(k)}$, находятся по формулам

$$p^{(0)} = \exp(-i\omega t) \left\{ i\omega\rho_k \times \right. \\ \times \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) \exp(in\theta_k) + \\ \left. + Q \exp \left(i\frac{\omega}{c_0} [L \cos \alpha + r_0 \cos(\theta_0 - \alpha)] \right) \right\}, \quad (31)$$

$$p^{(k)} = \exp(-i\omega t) i\omega\rho_k \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(k)} J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \exp(in\theta_k). \quad (32)$$

На поверхности каждого из пьезоприемников выражение (31) с использованием теоремы сложения

(18) и разложения (21) можно представить в виде

$$p^{(0)} \Big|_{r_k=R_k} = \exp(-i\omega t) i\omega\rho_0 \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n^{(k)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)} H_{m-n}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L \right) J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \times \right. \\ \left. \times \exp[i(n-m)\theta_{kj}] + \right. \\ \left. + Q \exp \left(i\frac{\omega}{c_0} L \cos(\theta_0 - \alpha) \right) i^n J_n \left(\frac{\omega}{c_0} R_k \right) \right\} \times \\ \times \exp(in\theta_k). \quad (33)$$

Электрическое напряжение на выходе системы преобразователей вычисляется по следующим формулам:

- в случае разомкнутых электродов –

$$U = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(5)}}{\lambda_{nk}^{(1)} \lambda_{nk}^{(4)} + \lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(3)}} \times \\ \times \frac{h_k \kappa_{p,k}^2 q_0^{(k)}}{2d_{31,k} (1 - \kappa_{p,k}^2) R_k}. \quad (34)$$

- в случае электродов, замкнутых через нагрузочное сопротивление $Z_n^{(k)}$ –

$$U = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(5)}}{\lambda_{nk}^{(1)} \lambda_{nk}^{(4)} + \lambda_{nk}^{(2)} \lambda_{nk}^{(3)}} \times \\ \times \frac{2\pi i h_k d_{31,k} Z_n^{(k)} q_0^{(k)}}{h_k - 2\pi i \omega \varepsilon_{33,k} (1 - \kappa_{p,k}^2) Z_n^{(k)} R_k}. \quad (35)$$

Формулы (34), (35) получены путем подстановки выражений (24), (26)–(28) при $n=0$ в соотношения

$$U = \sum_{k=1}^N E_0^{(k)} h_k.$$

Расчет дальнего поля давлений отраженных и излученных волн, где оправдано привлечение асимптотических представлений для функций $H_n^{(1)}$ при больших значениях аргумента [8], может быть выполнен по формуле

$$p^{*(0)} = \exp(-i\omega t) i\omega\rho_0 \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A_n^{(j)}}{\sqrt{\pi \frac{\omega}{c_0} r_j}} \times \\ \times \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c_0} r_j - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp(in\theta_k), \quad (36)$$

где

$$r_k = \sqrt{L^2 + r_0^2 + 2Lr_0 \cos(\theta_0 - \theta_{k0})};$$

$$\theta_k = \pi - \theta_{k0} - \arctg \frac{r_0 \sin(\theta_0 - \theta_{k0})}{L - r_0 \cos(\theta_0 - \theta_{k0})}.$$

Отметим, что расчет дальнего поля выполнен в координатах r_0, θ_0 .

Если в приведенных выше соотношениях (31)–(36) опустить суммирование от 1 до N , придавая k одно из фиксированных значений в этом диапазоне, получим формулы для расчета гидроэлектродупругих характеристик процесса без учета взаимовлияния элементов системы, т.е. для случая дифракции падающей волны на каждой из единичных оболочек рассматриваемой антенной решетки.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Применим полученные соотношения для численной оценки ряда характеристик акустических полей круговой цилиндрической системы и экспериментального подтверждения на их основе соответствия принятой математической модели реальным физическим характеристикам рассматриваемых систем.

В качестве примера выберем круговую цилиндрическую систему, образованную из четырех ($N=4$) воздухозаполненных круговых тонкостенных цилиндрических преобразователей с радиальной поляризацией и сплошными электродами, нанесенными на внешнюю и внутреннюю поверхности оболочек преобразователей. Все преобразователи в системе имеют одинаковый радиус $R_s = R = 0.0675$ м, толщину $h_s = h = 0.006$ м, высоту $l = 0.38$ м и выполнялись из пьезокерамики состава ЦТБС-3 [7]. Центры преобразователей располагались равномерно по поверхности радиуса $L = 5R$. Система преобразователей находилась в водной среде с параметрами $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $c_0 = 1500$ м/с. Падающие на нее плоские волны имели частоту $\omega = 8\pi$ кГц, которая совпадает с частотой пульсирующих радиальных колебаний преобразователя в воздухе. Электрические выводы всех преобразователей были разомкнуты (режим холостого хода). Измерениям подвергались электрические сигналы, возникающие на выходе системы из 4-х параллельно соединенных преобразователей и одиночного преобразователя в составе системы. Круговая цилиндрическая система размещалась в условиях открытого водоёма.

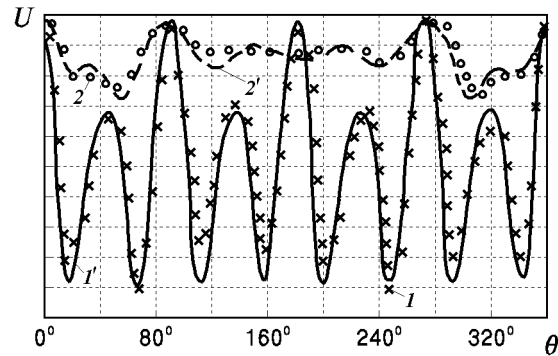


Рис. 2. Зависимости нормализованных электрических напряжений на выходе круговой системы пьезокерамических цилиндрических преобразователей (данные 1) и одного преобразователя в составе системы (данные 2) от угла прихода на систему плоских акустических волн
1, 2 – эксперимент; 1', 2' – расчет

Структурная схема измерительного стенда стандартна и включает тракт формирователя плоских акустических волн и тракт регистрации электрических сигналов, преобразованных рассматриваемой гидроэлектродупругой системой.

Результаты измерений (рис. 2) нормированных зависимостей электрических напряжений на выходе круговой цилиндрической системы (кривая 1) и одиночного преобразователя в составе системы (кривая 2) от угла прихода плоских волн на систему сравниваются с результатами расчетов (кривые 1', 2') этих же характеристик, выполненных по приведенным выше формулам для значений параметров системы, соответствующих принятым в эксперименте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошее совпадение полученных экспериментальных и теоретических результатов свидетельствует о том, что для преобразователей, у которых $l/R \geq 5.6$ и $h/R \leq 0.09$, работающих вблизи нижней резонансной частоты, принятая в работе математическая модель цилиндрической решетки, состоящей из цилиндрических тонкостенных пьезокерамических преобразователей, отражает основные особенности реальных физических систем подобного типа.

1. Бабаев А. Э., Савина И. В. Дифракция акустических волн на параллельно расположенных цилиндрических пьезокерамических системах коаксиальных оболочек, заполненных вязкой жидкостью // Прикл. мех. – 1993. – 29, N 6. – С. 45–52.

2. Басовский В. Г. Излучение звука конечной решеткой из открытых пьезокерамических колец // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 2.– С. 3–20.
3. Коржик А. В., Лейко А. Г. Метод “сквозной” задачи и его приложение к определению напряжения на выходе антенной решетки при наклонном падении плоской звуковой волны // Судостр. промышл. Сер.: Акустика.– 1991.– Вып. 9.– С. 21–27.
4. Мацыпура В. Т. Излучение звука набором цилиндрических пьезокерамических излучателей // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 1.– С. 58–64.
5. Вовк И. В., Гринченко В. Т. Излучение звука набором цилиндрических пьезокерамических излучателей // Акуст. ж.– 1991.– 37, N 2.– С. 259–269.
6. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга А. Н. Электоупругость / Механика связанных полей в элементах конструкций (в 5-ти томах).– Т. 5.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с.
7. Пьезокерамические преобразователи. Справочник / Ред. С. И. Пугачева.– Л.: Судостроение, 1984.– 256 с.
8. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики.– Л.: Судостроение, 1972.– 348 с.