

УДК 539.3

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ВЫЗВАННЫЕ МГНОВЕННЫМ ПРИЛОЖЕНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

А. Г. КУЦЕНКО*, В. Н. ОЛИЙНЫК**, А. Ф. УЛИТКО*

* Киевский университет им. Тараса Шевченко, Киев

** Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 8.04.99 ◊ Пересмотрено 30.04.99

Рассматривается общий подход к решению осесимметричных задач мгновенного нагружения упругого полупространства, основанный на применении преобразования Лапласа по временной и преобразования Ханкеля по пространственной координате. Исходя из анализа функций-изображений, удалось представить перемещения на поверхности полупространства в виде кратных интегралов от функций действительных переменных. Детально исследованы частные типы нагрузки: сосредоточенная нагрузка (задача Лэмба), распределение Герца, а также нагрузка, возникающая под гладким плоским штампом в статической контактной задаче. Показано, что для любой нормальной распределенной нагрузки, приложенной мгновенно к границе полупространства, нормальные перемещения принимают свои статические значения сразу после прохождения через точку наблюдения волны Рэлея, порожденной в наиболее удаленной от нее точке приложения нагрузки. Также исследованы особенности, возникающие в поле перемещений на фронтах волн Рэлея, движущихся от края площадки нагружения. Полученные результаты дали возможность сделать выводы, которые будут полезными при рассмотрении нестационарных контактных задач.

Розглядається загальний підхід до розв'язку осесиметричних задач миттєвого навантаження пружного півпростору, який базується на застосуванні перетворення Лапласа по часовій і перетворення Ханкеля по просторовій координаті. Виходячи з аналізу функцій-зображень, вдалося представити переміщення на поверхні півпростору у вигляді кратних інтегралів від функцій дійсних змінних. Детально досліджено окремі типи навантажень: зосереджене навантаження (задача Лемба), розподіл Герца, а також навантаження, що виникає під гладким плоским штампом у статичній контактній задачі. Показано, що для будь-якого нормального розподіленого навантаження, прикладеного миттєво до границі півпростору, нормальні переміщення приймають свої статичні значення одразу після проходження через точку спостереження хвилі Релея, породженої у найбільш віддаленій від неї точці прикладення навантаження. Також досліджено особливості, що виникають у полі переміщень на фронтах хвиль Релея, які рухаються від краю зони навантаження. Одержані результати дали можливість зробити висновки, які будуть корисними при розгляді нестационарних контактних задач.

There is considered a general approach to solution of axisymmetric problems on instant loading of elastic half-space. Mentioned approach is based on use of Laplas transform with respect to time and Hankel transform with respect to spatial coordinate. Originating from analysis of functions-images it became possible to represent the displacements on surface of half-space in form of multiple integrals from functions of real variables. The particular types of loads were investigated: point load (Lamb's problem), Hertz's distribution and the load arising under smooth plane stamp in static contact problem. It has been shown that for any normal distributed load instantly applied to boundary of half-space the normal displacements in the point of observation receive their static values just after the moment when Rayleigh's wave generated by the most distant point of application of the load passes. Also, the singularities arising in field of displacements on the fronts of Rayleigh's waves moving from boundary of area of loading were investigated. Obtained results have given the possibility to make conclusions that will be useful when considering non-stationary contact problems.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование распределений волновых полей напряжений и перемещений, вызванных импульсным нагружением упругих тел, представляет собой исключительно важную проблему механики. Интерес к подобному рода задачам не ослабевает на протяжении вот уже ста лет. Одной из первых задач импульсного нагружения упругих тел, получивших замкнутое решение, является задача мгновенного нагружения упругого полупространства нормальной сосредоточенной силой, рассмотренная Лэмбом в 1904 году [1] и названная впоследствии его именем. Важность работы [1] определяется еще и тем, что в ней впервые в рамках динамической теории упругости был применен метод интегральных преобразований [2]. Отметим,

что решение задачи Лэмба в удобном для анализа виде было получено значительно позже Пеке-рисом [3]. Самому Лэмбу не удалось выполнить обратное преобразование Фурье, хотя он и обозначил возможные пути достижения этой цели.

Говоря о динамическом нагружении полупространства, обратим внимание на работу [4], в которой рассматриваются задачи распространения волн, вызванных мгновенным приложением нормальной к границе полупространства нагрузки, распределенной по всей его поверхности, но имеющей ярко выраженный пик. Таким способом моделируется задача возбуждения полупространства нагрузкой, распределенной на некоторой ограниченной области его поверхности. Решения поставленных задач, найденные методом неполного разделения, были подвергнуты подробному каче-

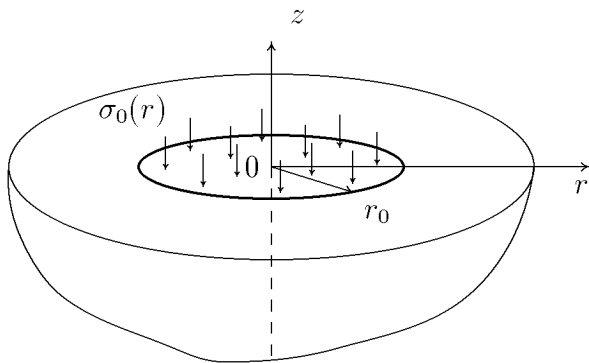


Рис. 1. Упругое полупространство, нагруженное распределенной нагрузкой

ственному анализу. Решение же задачи Лэмба авторами упомянутой работы было получено при помощи предельного перехода по параметрам нагрузки.

Отметим, что в ряде работ, касающихся импульсного нагружения упругого полупространства, основное внимание уделялось изучению особенностей полей перемещений и напряжений вблизи волновых фронтов. Это объясняется, по всей видимости, тем, что исходной предпосылкой большинства исследований в данной области являются запросы геофизики [5]. Между тем, анализ решений задач импульсного нагружения может быть полезным при изучении динамического контактного взаимодействия упругих тел в самых разнообразных динамических системах. Прежде всего, сказанное относится к такой бурно развивающейся области техники, как твердотельные микроволновые двигатели, использующие поверхностные волны Рэлея. Об интересе к их созданию свидетельствует значительное количество публикаций по микродвигателям, вышедших за последние несколько лет [6, 7]. На сегодняшний день благодаря уникальному сочетанию технико-эксплуатационных параметров и малым габаритам микродвигатели нашли широкое применение в прецизионной технике и бытовых приборах. Решение динамических контактных задач позволяет получить необходимые данные о потенциальной эффективности подобных устройств. Исследование нестационарного нагружения твердых тел должно также ответить на вопрос: насколько быстро происходит выход такого двигателя на рабочий (стационарный) режим после включения. Другим возможным приложением задач о динамическом нагружении свободных поверхностей явля-

ется медицинская акустика, в которой, несмотря на уже достаточно продолжительную историю исследований [8], до сих пор остается до конца не решенной важная проблема оценки контактного взаимодействия поверхностных мягких тканей тела с измерительными виброакустическими приборами [9, 10]. Родственность математических постановок и привлекаемого аналитического аппарата позволяет надеяться на то, что полученные результаты могут представлять ценность и для задач, связанных с неразрушающим исследованием физико-механических свойств материалов [11].

Сложности, возникающие при нахождении решений динамических контактных задач теории упругости, зачастую заставляют прибегать к разного рода упрощающим и мало обоснованным предположениям. Как отмечалось в [12], “решения, аналогичного решению задачи Герца в статике, в случае динамического контактного взаимодействия не было получено до настоящего времени в силу трудностей, возникающих при рассмотрении смешанных граничных условий при подвижных точках их раздела. Поэтому в тех случаях, когда период собственных колебаний тел мал по сравнению с длительностью контакта, пользуются все теми же результатами теории Герца”.

Исходя из вышеизложенного, целью данной работы является исследование поля перемещений точек поверхности упругого полупространства, вызванных мгновенным приложением осесимметричной распределенной нормальной нагрузки. В первую очередь нас будут интересовать нормальные перемещения точек области нагружения, анализ которых является одним из ключевых моментов при рассмотрении целого ряда динамических контактных задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Рассмотрим упругое полупространство $z < 0$, которое при $t < 0$ находилось в покое, причем его граница была свободна от усилий. Предположим, что в момент времени $t = 0$ на поверхности полупространства по некоторому кругу $0 \leq r \leq r_0$ была мгновенно приложена нормальная нагрузка σ_0 , остающаяся в дальнейшем постоянной во времени. При этом будем считать, что $\sigma_0 = \sigma_0(r)$, т.е. нагрузка обладает радиальной симметрией относительно центра круга (рис. 1). Требуется определить перемещения точек поверхности полупространства как функции времени t и расстояния r между точкой и центром приложения нагрузки. В указанных предположениях начальные и гранич-

ные условия соответствующей задачи могут быть где
записаны как

$$\begin{aligned} u_z|_{t=0} = u_r|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_r}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$\begin{aligned} \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \\ \sigma_r|_{z=0} = H(t) \begin{cases} \sigma_0(r), & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где u_z, u_r – нормальные (толщинные) и горизонтальные (радиальные) перемещения точек полупространства; σ_z, τ_{rz} – нормальные и касательные напряжения на поверхности полупространства; $H(t)$ – функция Хевисайда.

В общем случае динамическое поле перемещений материальных точек упругого полупространства $\vec{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ описывается уравнением Ламе [13]:

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Следует отметить, что в силу радиальной симметрии начальных и граничных условий (1), (2) окружная компонента перемещений отсутствует: $u_\theta \equiv 0$. В уравнении (3) введены следующие обозначения: G – модуль упругости при сдвиге; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала, заполняющего полупространство.

При решении поставленной задачи будем следовать общей схеме, изложенной в [14]. Применяя к уравнениям движения Ламе преобразование Лапласа по времени и преобразование Ханкеля по пространственной координате r , можно представить перемещения в виде кратных интегралов обращения Римана – Меллина:

$$\begin{aligned} u_z(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} W e^{st} ds, \\ u_r(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} U e^{st} ds. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом изображения $W(\lambda, z, s)$ и $U(\lambda, z, s)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \kappa \frac{d}{dz} \left(\frac{dW}{dz} + \lambda U \right) - \lambda \left(\frac{dU}{dz} + \lambda W \right) = \frac{s^2}{c_2^2} W, \\ -\kappa \lambda \left(\frac{dW}{dz} + \lambda U \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{dU}{dz} + \lambda W \right) = \frac{s^2}{c_2^2} U, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\kappa = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} > 1;$$

$$c_1 = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{G}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

– скорости распространения волн растяжения – сжатия и волн сдвига соответственно.

Решение системы (5), обладающее достаточным произволом для удовлетворения граничным условиям (2), может быть записано в виде

$$W(\lambda, z, s) = \lambda \left(\frac{c_2}{s} \right)^2 [-\kappa \gamma_1 A e^{\lambda \gamma_1 z} + B e^{\lambda \gamma_2 z}], \quad (6)$$

$$U(\lambda, z, s) = \lambda \left(\frac{c_2}{s} \right)^2 [\kappa A e^{\lambda \gamma_1 z} - \gamma_2 B e^{\lambda \gamma_2 z}],$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + s^2 / (c_1 \lambda)^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 + s^2 / (c_2 \lambda)^2}.$$

Ветви радикалов γ_1 и γ_2 выбираются таким образом, чтобы их значения на действительной оси s совпадали со значениями соответствующих арифметических корней. Подобный выбор позволяет получить представление решения в виде суперпозиции волн, бегущих с поверхности вглубь полупространства, и обеспечивает ограниченность напряжений и перемещений при $z \rightarrow -\infty$. Плотности $A(\lambda, s)$ и $B(\lambda, s)$ в выражениях (6) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{dW}{dz} + \frac{\nu \lambda}{1-2\nu} U \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{s} \Sigma_0(\lambda), \\ \left(\frac{dU}{dz} - \lambda W \right) \Big|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

которые получаются из граничных условий путем применения к ним преобразований Лапласа и Ханкеля. В соотношениях (7)

$$\Sigma_0(\lambda) = \frac{1}{2G} \int_0^{r_0} \sigma_0(r) J_0(\lambda r) r dr. \quad (8)$$

Подставляя найденные из соотношений (7) значения плотностей в выражения (6), однозначно определяем изображения $W(\lambda, z, s)$ и $U(\lambda, z, s)$. Это позволяет, основываясь на представлении (4), находить перемещения как в точках на поверхности полупространства, так и перемещения во внутренних его точках.

Заметим, что иногда возникает необходимость знать решение задачи, обратной к задаче о мгновенном нагружении, а именно, задачи о мгновенной разгрузке полупространства, когда в начальный момент заданы ненулевые перемещения u_z и

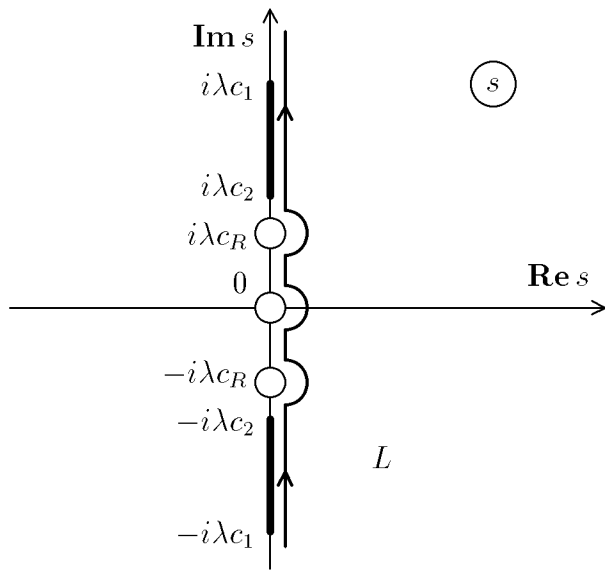


Рис. 2. Контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа

u_r , вызванные статической нагрузкой $\sigma_0(r)$, снимаемой в момент времени $t=0$. В этом случае начальные и граничные условия будут несколько отличаться от условий (1) и (2). Однако, если известно решение задачи о мгновенной нагрузке, решать задачу о разгрузке нет необходимости, так как ее решение можно получить как разность между решением соответствующей статической задачи и решением задачи о нагружении. Эти соображения будут при необходимости использоваться нами без дополнительных пояснений.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Анализ поля перемещений на основании представления его компонент в виде кратных интегралов обращения (4), один из которых берется по контуру, расположенному в комплексной плоскости, представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому обратимся к дальнейшим преобразованиям с целью приведения выражений для перемещений к максимально простому виду, удобному для их последующего анализа. В первую очередь нас будут интересовать перемещения точек на поверхности полупространства. Их изображения могут быть записаны в достаточно компакт-

ном виде:

$$W(\lambda, 0, s) = -\frac{P}{4\pi G} \frac{1}{s} \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda \Delta(\lambda)} \frac{\gamma_1(\gamma_2^2 - 1)}{2}, \quad (9)$$

$$U(\lambda, 0, s) = \frac{P}{4\pi G} \frac{1}{s} \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda \Delta(\lambda)} \left(\frac{\gamma_2^2 - 1}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \right),$$

где

$$\alpha(\lambda) = -\frac{4\pi G}{P} \lambda \Sigma_0(\lambda);$$

$$P = \left| 2\pi \int_0^{r_0} \sigma_0(r) r dr \right| - \text{равнодействующая нагрузки};$$

$\Delta(\lambda, s) = ((\gamma_2^2 + 1)/2)^2 - \gamma_1 \gamma_2$ - определитель Рэлея.

Нетрудно убедиться, что все особые точки выражений (9) в комплексной плоскости s лежат на мнимой оси, причем, согласно выбору ветвей радикалов γ_1 и γ_2 , полюса соответствуют только точкам $s=0$ и $s=\pm i\lambda c_R$, где c_R - скорость волны Рэлея. Несложно проверить, что для $0 < \nu < 0.5$ справедливо неравенство $0.874 < c_R/c_2 < 0.911$, причем величина c_R/c_2 снижается с ростом ν . Остальные два корня уравнения Рэлея $\Delta(\lambda, s) = 0$ будут находиться на другом листе Римановой поверхности и, следовательно, не могут быть полюсами W и U . Таким образом, функции (9) являются аналитическими функциями переменной s в правой полуплоскости $\text{Re } s > 0$. Это обстоятельство позволяет сместить контур обращения по Лапласу в интегралах (4) на мнимую ось, устремляя $\delta \rightarrow +0$.

Заметим, что при обходе полюсов функций W и U необходимо выделить в явном виде поувычеты, равные интегралам по дугам окружностей (рис. 2). Прделав эту операцию и введя новую переменную интегрирования $x = -s^2/(\lambda c_2)^2$, после попарного объединения интегралов, соответствующих верхней и нижней частям оси $\text{Im } s$, перемещения точек поверхности полупространства можем представить в виде, не содержащем комплексных переменных.

Введем безразмерные переменные $\tau = c_2 t/r$ и $l = r_0/r$. Тогда, с учетом замены $\lambda = \tilde{\lambda}/r$, выражение для плотности становится функцией только безразмерных параметров $\tilde{\lambda}$ и l . В дальнейшем будем обозначать такую преобразованную плотность через $\tilde{\alpha}$. Выразим перемещения точек поверхности полупространства через безразмерные комплексы, являющиеся функциями τ и l :

$$u_z(r, 0, t) = -\frac{P}{4\pi G} \frac{1}{r} f_z(l, \tau), \quad (10)$$

$$u_r(r, 0, t) = -\frac{P}{4\pi G} \frac{1}{r} f_r(l, \tau),$$

где

$$\begin{aligned}
 f_z(l, \tau) = & (1-\nu)I_0(l) + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\pi (1-q/2)^2 \sqrt{1-q/\kappa} I_{c0}(l, \tau\sqrt{q})}{(1-q/2)^3 - (1+\kappa^{-1}-2q/\kappa)/2} - \right. \\
 & - \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x/\kappa}}{(1-x/2)^2 - \sqrt{(1-x/\kappa)(1-x)}} \times \\
 & \quad \times I_{s0}(l, \tau\sqrt{x}) dx - \\
 & - \int_{\kappa}^{\infty} \frac{\sqrt{x/\kappa-1}}{(1-x/2)^2 + \sqrt{(x/\kappa-1)(x-1)}} \times \\
 & \quad \times I_{c0}(l, \tau\sqrt{x}) dx - \\
 & - \int_1^{\kappa} \frac{(1-x/2)^2 \sqrt{1-x/\kappa}}{(1-x/2)^4 - (1-x/\kappa)(1-x)} \times \\
 & \quad \times I_{s0}(l, \tau\sqrt{x}) dx - \\
 & - \left. \int_1^{\kappa} \frac{(1-x/\kappa)\sqrt{x-1}}{(1-x/2)^4 - (1-x/\kappa)(1-x)} \times \right. \\
 & \quad \left. \times I_{c0}(l, \tau\sqrt{x}) dx \right\};
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 f_r(l, \tau) = & (1-2\nu)I_1(l) + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\pi (1-q/2)^3 I_{c1}(l, \tau\sqrt{q})}{2(1-q/2)^3 - (1+\kappa^{-1}-2q/\kappa)/2} - \right. \\
 & - \int_0^1 \frac{(1-x/2) - \sqrt{(1-x/\kappa)(1-x)}}{(1-x/2)^2 - \sqrt{(1-x/\kappa)(1-x)}} \times \\
 & \quad \times \frac{I_{s1}(l, \tau\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx - \\
 & - \int_{\kappa}^{\infty} \frac{(1-x/2) + \sqrt{(x/\kappa-1)(x-1)}}{(1-x/2)^2 + \sqrt{(x/\kappa-1)(x-1)}} \times \\
 & \quad \times \frac{I_{c1}(l, \tau\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx - \\
 & - \int_1^{\kappa} \frac{(1-x/2)^3 - (1-x/\kappa)(1-x)}{(1-x/2)^4 - (1-x/\kappa)(1-x)} \times \\
 & \quad \times \frac{I_{s1}(l, \tau\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx - \\
 & - \left. \int_1^{\kappa} \frac{(1-x/2)\sqrt{(1-x/\kappa)(x-1)}}{(1-x/2)^4 - (1-x/\kappa)(1-x)} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \frac{I_{c1}(l, \tau\sqrt{x})}{2} dx \right\}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Первые интегралы в правых частях соотноше-

ний (11), (12) следует понимать в смысле главного значения по Коши, так как соответствующие подынтегральные функции имеют полюса в точке $x=q$, где $q=c_R^2/c_2^2$ - действительный корень уравнения Рэлея. Ядра, входящие в подынтегральные выражения в (11), (12), имеют вид

$$\begin{aligned}
 I_i(l) &= \int_0^{\infty} \tilde{\alpha}(l, \tilde{\lambda}) J_i(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda}, \quad i = 0, 1, \\
 I_{si}(l, \xi) &= \int_0^{\infty} \tilde{\alpha}(l, \tilde{\lambda}) J_i(\tilde{\lambda}) \sin \tilde{\lambda} \xi d\tilde{\lambda}, \\
 I_{ci}(l, \xi) &= \int_0^{\infty} \tilde{\alpha}(l, \tilde{\lambda}) J_i(\tilde{\lambda}) \cos \tilde{\lambda} \xi d\tilde{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Представление перемещений (10)–(12) может быть эффективно использовано в ходе дальнейшего рассмотрения при задании конкретных законов распределения нагрузки $\sigma_0(r)$.

3. ЧАСТНЫЕ ТИПЫ НАГРУЗОК

3.1. Сосредоточенная нагрузка

Нагрузка в виде нормальной сосредоточенной силы соответствует задаче Лэмба:

$$\sigma_0(r) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r}, \tag{14}$$

где $\delta(r)$ - дельта-функция Дирака. При этом $\alpha(\lambda) \equiv 1$, и интегралы (13) могут быть вычислены в замкнутом виде [15]:

$$\begin{aligned}
 I_i^{\text{Lamb}} &= 1, \quad i = 0, 1, \\
 I_{s0}^{\text{Lamb}}(\xi) &= \frac{H(\xi-1)}{\sqrt{\xi^2-1}}, \\
 I_{c0}^{\text{Lamb}}(\xi) &= \frac{H(1-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \\
 I_{s1}^{\text{Lamb}}(\xi) &= \frac{H(1-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \xi, \\
 I_{c1}^{\text{Lamb}}(\xi) &= 1 - \frac{H(\xi-1)}{\sqrt{\xi^2-1}} \xi.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Легко заметить, что при таком характере распределения нагрузки не задан характерный линейный размер r_0 , и переменная l выпадает из рассмотрения. Следовательно, искомое решение будет представлять собой функцию только безразмерного времени τ . Это означает, что процесс распространения волн, возбужденных сосредоточенной силой, является автомодельным.

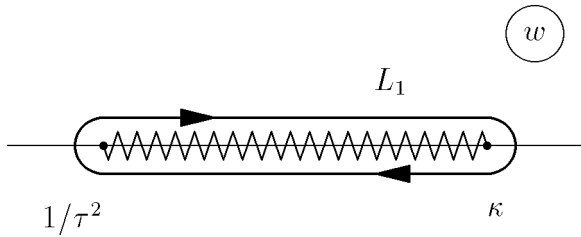


Рис. 3. Контур інтегрування $\varphi(w)$

Подставляя выражения (15) в формулы (11) и (12), после несложных, но довольно громоздких преобразований находим выражения безразмерных комплексов $f_z(\tau)$ и $f_r(\tau)$ в зависимости от того, к какому из характерных временных интервалов принадлежит τ :

а) $\tau < 1/\sqrt{\kappa}$ ($r > c_1 t$):

$$f_z(\tau) = f_r(\tau) \equiv 0, \quad (16)$$

чего и следовало ожидать, так как к точке, в которой вычисляются перемещения, не успела дойти волна растяжения-сжатия;

б) $1/\sqrt{\kappa} < \tau < 1$ – фронт волны растяжения-сжатия уже прошел через точку, а фронт волны сдвига еще не дошел ($c_2 t < r < c_1 t$):

$$f_z(\tau) = (1-\nu) - \frac{1}{2} \frac{(1-q/2)^2}{D'(q)} \sqrt{\frac{1-q/\kappa}{1-\tau^2 q}} - \frac{1}{2} \frac{(1-a/2)^2}{D'(a)} \sqrt{\frac{a/\kappa-1}{\tau^2 a-1}} - \frac{1}{2} \frac{(1-b/2)^2}{D'(b)} \sqrt{\frac{b/\kappa-1}{\tau^2 b-1}}, \quad (17)$$

$$f_r(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \int_{1/\tau^2}^{\kappa} \frac{x(x-1/2)}{D(x)} \times \sqrt{\frac{(1-x/\kappa)(x-1)}{x(x-1/\tau^2)}} dx,$$

Здесь и далее штрихом обозначаем производную по полному аргументу. Кроме того,

$$D(x) = (1-x/2)^4 - (1-x/\kappa)(1-x) = x(x^3/16 - x^2/2 + (3/(2\kappa) - 1)x + (1-1/\kappa)),$$

a и b – корни обобщенного уравнения Рэлея $D(x) = 0$. Заметим, что $|a| > \kappa$, $|b| > \kappa$. Двумя

другими корнями этого уравнения являются нуль и рэлеевский корень q .

в) $1 < \tau < 1/\sqrt{q}$ – точка находится на узком промежутке между фронтами волны сдвига и волны Рэлея ($c_R t < r < c_2 t$):

$$f_z(\tau) = 2(1-\nu) - \frac{(1-q/2)^2}{D'(q)} \sqrt{\frac{1-q/\kappa}{1-\tau^2 q}},$$

$$f_r(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \int_1^{\kappa} \frac{x(x-1/2)}{D(x)} \times \sqrt{\frac{(1-x/\kappa)(x-1)}{x(x-1/\tau^2)}} dx, \quad (18)$$

г) $\tau > 1/\sqrt{q}$ – фронт самой медленной из волн – волны Рэлея уже прошел через точку ($r < c_R t$):

$$f_z(\tau) = 2(1-\nu),$$

$$f_r(\tau) = -\frac{(1-q/2)^3}{D'(q)} \sqrt{\frac{q}{q-1/\tau^2}} - \frac{1}{2\pi} \int_1^{\kappa} \frac{x(x-1/2)}{D(x)} \times \sqrt{\frac{(1-x/\kappa)(x-1)}{x(x-1/\tau^2)}} dx. \quad (19)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что для задачи Лэмба нормальные перемещения удалось записать в элементарных функциях. Ранее аналогичное представление для u_z было получено в [3] для частного случая $\nu = 1/4$ (см. также [16]).

Продемонстрируем технику нахождения комплекса f_z на примере его вычисления при $\tau > 1/\sqrt{q}$. В этом случае, избавляясь от иррациональности в знаменателях подынтегральных выражений, согласно формулам (11), (13), (15), получаем

$$f_z(\tau) = (1-\nu) - \frac{1}{2} \frac{(1-q/2)^2}{D'(q)} \sqrt{\frac{1-q/\kappa}{1-q\tau^2}} - \frac{1}{4\pi} \int_{1/\tau^2}^{\kappa} \frac{(1-x/2)^2}{D(x)} \sqrt{\frac{1-x/\kappa}{\tau^2 x-1}} dx - \frac{1}{4\pi} \int_{1/\tau^2}^1 \frac{1-x/\kappa}{D(x)} \sqrt{\frac{1-x}{\tau^2 x-1}} dx. \quad (20)$$

Обозначим через \mathcal{I} первый интеграл в формуле (20). Для его нахождения введем в рассмотрение

функцию комплексной переменной w :

$$\varphi(w) = \frac{(1-w/2)^2}{D(w)} \sqrt{\frac{w/\kappa-1}{\tau^2 w-1}}. \quad (21)$$

Эта функция является однозначной аналитической функцией w в плоскости с разрезом, соединяющим точки $w=1/\tau^2$ и $w=\kappa$, которые являются точками ее ветвления. Выделяя соответствующую ветвь $\varphi(w)$, приходим к выводу, что интеграл от нее по контуру L_1 , охватывающему отрезок действительной оси $[1/\tau^2, \kappa]$ (рис. 3), с точностью до постоянного множителя равен интегралу \mathcal{I} :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(w) dw = \frac{\mathcal{I}}{\pi}. \quad (22)$$

С другой стороны, контурный интеграл равняется сумме вычетов $\varphi(w)$ в ее полюсах, множество которых Ω совпадает с множеством корней обобщенного уравнения Рэлея $\{0, q, a, b\}$. Следовательно,

$$\mathcal{I} = \pi \sum_{w \in \Omega} \frac{(1-w/2)^2}{D'(w)} \sqrt{\frac{w/\kappa-1}{\tau^2 w-1}}. \quad (23)$$

Совершенно аналогично находим, что второй интеграл в формуле (20) равен

$$\pi \sum_{w \in \Omega} \frac{1-w/\kappa}{D'(w)} \sqrt{\frac{1-w}{\tau^2 w-1}}. \quad (24)$$

Подставляя выражения (23) и (24) в формулу (20), после очевидных алгебраических преобразований получаем $f_z = 2(1-\nu)$, что соответствует первому соотношению в (19). Подробно данная методика была описана в [17].

Вообще говоря, представление функции f_z в виде (16)–(19) можно получить и без применения техники контурного интегрирования ее аналитического продолжения. Для этого воспользуемся известным соотношением для дробно-рациональных функций [18]:

$$\frac{x^m}{\bar{D}(x)} = \sum_{x_j \in \Omega} \frac{x_j^m}{(x-x_j)\bar{D}'(x)}, \quad (25)$$

где $\bar{D}(x)$ – многочлен степени, большей, чем m ; Ω – множество корней $\bar{D}(x)$, причем все x_j являются простыми. Многочлен $D(x)$ не имеет кратных корней при всех $\nu \neq \nu_* \approx 0.263$, а следовательно, разложение (25) допустимо. Легко заметить, что расписанные таким образом интегралы, входящие в f_z , имеют квадратуры в элементарных функциях. После интегрирования и приведения подобных вновь приходим к соотношениям вида (16)–(19).

Отметим один нюанс, касающийся записи f_z на интервале $1/\sqrt{\kappa} < \tau < 1$. Исследование обобщенного уравнения Рэлея показывает, что для малых значений коэффициента Пуассона $\nu < \nu_*$ все его корни будут действительными. При $\nu > \nu_*$ два корня a и b становятся комплексно-сопряженными. Как показывает более детальный анализ, в этом случае выражение (17) для нормальных перемещений остается формально правильным и может быть непосредственно получено с применением методики разложения на элементарные вещественные интегралы. При этом третье и четвертое слагаемое в выражении (17) также будут комплексно-сопряженными, а сама f_z остается действительной. В предельном случае $\nu = \nu_*$ имеем $a = b$, и форма записи (17) для f_z , строго говоря, становится некорректной. Однако с учетом существования и равенства конечных односторонних пределов для f_z при $\nu \rightarrow \nu_* - 0$ и $\nu \rightarrow \nu_* + 0$ функцию нормальных перемещений удастся непрерывным образом доопределить на всем множестве значений ν .

В отличие от нормальных, горизонтальные перемещения не могут быть представлены через элементарные функции, что связано с наличием у соответствующих подынтегральных функций четырех точек ветвления, если их рассматривать как комплексные функции своего аргумента. В этом случае использование техники контурного интегрирования аналитического продолжения $\varphi(w)$ позволяет лишь избавиться от особого интеграла. Оставшиеся в формулах (17)–(19) интегралы можно выразить через эллиптические интегралы первого и третьего рода, что было сделано Пекерисом [3] для частного случая $\nu = 1/4$. Однако в этом нет необходимости ни с точки зрения качественного анализа поведения перемещений, ни с точки зрения получения количественных результатов с применением вычислительных средств.

3.2. Плоский штамп

Имеется в виду нагрузка, соответствующая статической задаче о вдавливании гладкого плоского штампа в упругое полупространство, т. е.

$$\sigma_0(r) = -\frac{p_0}{\sqrt{1-r^2/r_0^2}}, \quad P = 2\pi r_0^2 p_0. \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в соотношение (8) находим, что

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sin r_0 \lambda}{r_0 \lambda} = \tilde{\alpha}(l, \tilde{\lambda}) = \frac{\sin l \tilde{\lambda}}{l \tilde{\lambda}}. \quad (27)$$

Ограничимся рассмотрением нормальных перемещений точек поверхности полупространства, так

как при рассмотрении контактных задач они привлекают внимание в первую очередь. Не представляет труда выполнить обратное преобразование Ханкеля для ядер (13), входящих в выражение для u_z :

$$I_0^{\text{stamp}}(l) = \frac{1}{l} \begin{cases} \pi/2, & l \geq 1, \\ \arcsin l, & l \leq 1, \end{cases}$$

$$I_{s_0}^{\text{stamp}}(l, \xi) = \frac{1}{2l} \begin{cases} \ln(l+\xi + \sqrt{(l+\xi)^2 - 1}) - \\ - \ln(|l-\xi| + \sqrt{(l-\xi)^2 - 1}), & |l-\xi| \geq 1, \\ \ln(l+\xi + \sqrt{(l+\xi)^2 - 1}), & |l-\xi| \leq 1 \leq l+\xi, \\ 0, & l+\xi \leq 1, \end{cases} \quad (28)$$

$$I_{c_0}^{\text{stamp}}(l, \xi) = \frac{1}{2l} \begin{cases} \pi H(l-\xi), & |l-\xi| \geq 1, \\ \pi/2 + \arcsin(l-\xi), & |l-\xi| \leq 1 \leq l+\xi, \\ \arcsin(l+\xi) + \arcsin(l-\xi), & l+\xi \leq 1. \end{cases}$$

Наличие в выражениях (28) логарифмических и обратных тригонометрических функций вносит дополнительные точки ветвления в подынтегральную функцию обращения Лапласа. Это делает неэффективным применение подхода, использованного нами в задаче Лэмба. Для получения количественных результатов проще всего прибегнуть к процедуре численного интегрирования.

3.3. Распределение Герца

В этом случае

$$\sigma_0(r) = -p_0 \sqrt{1 - r^2/r_0^2}, \quad P = \frac{2\pi}{3} r_0^2 p_0 \quad (29)$$

и

$$\tilde{\alpha}(l, \tilde{\lambda}) = \frac{\sin l\tilde{\lambda} - l\tilde{\lambda} \cos l\tilde{\lambda}}{(l\tilde{\lambda})^3}. \quad (30)$$

Необходимости брать интегралы (13) можно избежать, если использовать то обстоятельство, что производная числителя выражения (30) по l подобна числителю дроби в выражении (27). Таким образом, значение данных интегралов можно получить, основываясь на представлениях (28) и прибегая к интегрированию по переменной l . В

результате получаем

$$I_0^{\text{Hertz}}(l) = \frac{3}{2l^2} \left[\left(l^2 - \frac{1}{2} \right) I_0^{\text{stamp}} + \frac{I_0^{\text{add}}}{2} \right],$$

$$I_{s_0}^{\text{Hertz}}(l, \xi) = \frac{3}{2l^2} \left[\left(l^2 - \xi^2 - \frac{1}{2} \right) I_{s_0}^{\text{stamp}} + \frac{I_{s_0}^{\text{add}}}{4l} \right], \quad (31)$$

$$I_{c_0}^{\text{Hertz}}(l, \xi) = \frac{3}{2l^2} \left[\left(l^2 - \xi^2 - \frac{1}{2} \right) I_{c_0}^{\text{stamp}} + \frac{I_{c_0}^{\text{add}}}{4l} \right].$$

где

$$I_0^{\text{add}}(l) = \begin{cases} 0, & l \geq 1, \\ \sqrt{1-l^2}, & l \leq 1, \end{cases}$$

$$I_{c_0}^{\text{add}}(l, \xi) = \begin{cases} 0, & |l-\xi| \geq 1, \\ (l+3\xi)\sqrt{1-(l-\xi)^2}, & |l-\xi| \leq 1 \leq l+\xi, \\ (l+3\xi)\sqrt{1-(l-\xi)^2} + \\ + (l-3\xi)\sqrt{1-(l+\xi)^2}, & l+\xi \leq 1, \end{cases} \quad (32)$$

$$I_{s_0}^{\text{add}}(l, \xi) = \begin{cases} \text{sign}(l-\xi)(l+3\xi)\sqrt{(l-\xi)^2-1} - \\ - (l-3\xi)\sqrt{(l+\xi)^2-1}, & |l-\xi| \geq 1, \\ -(l-3\xi)\sqrt{(l+\xi)^2-1}, & |l-\xi| \leq 1 \leq l+\xi, \\ 0, & l+\xi \leq 1. \end{cases}$$

4. АНАЛИЗ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ДАННЫХ

Обратимся к анализу численных данных, полученных для задач о нестационарном нагружении и разгрузке упругого полупространства. На рис. 4 и 5 изображены нормальные и касательные перемещения в задаче Лэмба при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 1/5$ и $2/5$ соответственно. Вертикальными стрелками с маркировкой P, S и R на графиках отмечены моменты времени, соответствующие приходу в точку наблюдения фронтов волн растяжения-сжатия, сдвига и волны Рэлея соответственно. Видно, что до прихода волны растяжения-сжатия точки поверхности полупространства остаются неподвижными. После прихода волны растяжения-сжатия точки сначала смещаются вверх и от центра, а потом - в обратном направлении. В процессе этого обратного хода нормальные перемещения всегда остаются поло-

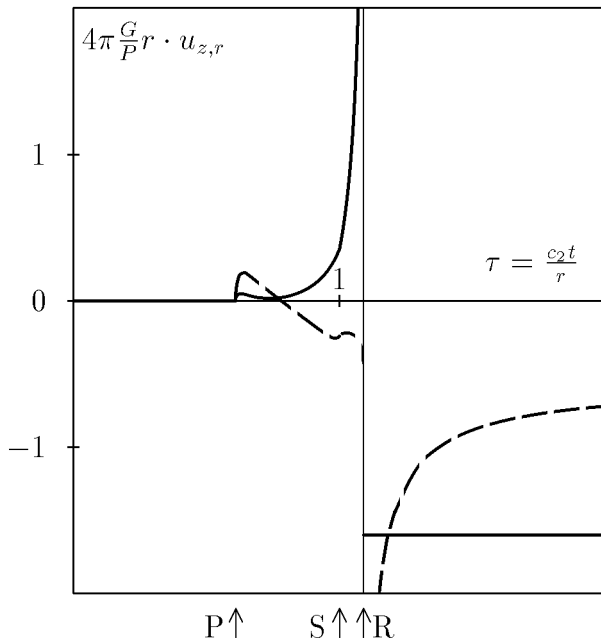


Рис. 4. Смещения точек поверхности полупространства в задаче Лэмба ($\nu=1/5$):
 сплошная – нормальные перемещения;
 штриховая – горизонтальные перемещения

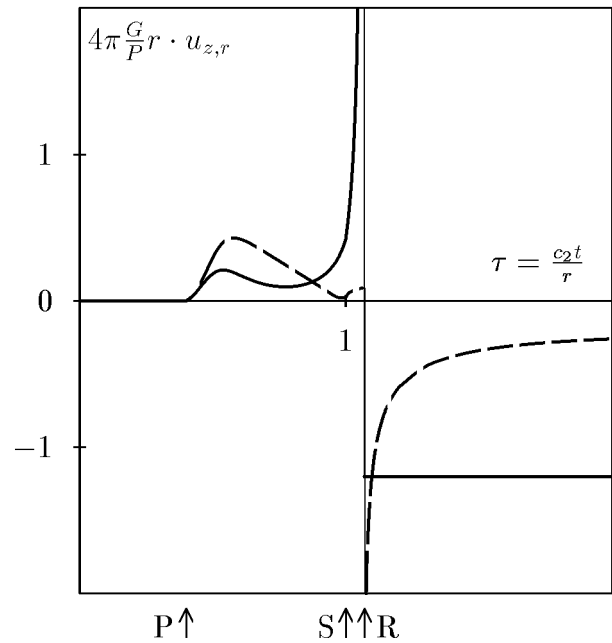


Рис. 5. Смещения точек поверхности полупространства в задаче Лэмба ($\nu=2/5$):
 сплошная – нормальные перемещения;
 штриховая – горизонтальные перемещения

жительными, в то время как касательные для малых значений ν становятся отрицательными. На фронте волны сдвига перемещения демонстрируют слабо заметный излом, после чего нормальные перемещения начинают стремительно возрастать обратно пропорционально корню от расстояния до фронта волны Рэлея, а касательные остаются ограниченными до самого ее прихода. Этот вывод следует непосредственно из формул (18). На фронте волны Рэлея и нормальные, и касательные перемещения обращаются в бесконечность, после чего нормальные перемещения скачкообразно принимают свое статическое значение, а касательные постепенно релаксируют к статическим значениям обратно пропорционально квадрату времени.

Очевидно, что полученное решение имеет разрывы второго рода в функциях перемещений и напряжений на фронте волны Рэлея. Наличие этих особенностей напрямую связано с упрощенным характером начально-граничных условий, в которых фигурирует такой не вполне физический объект как сосредоточенная сила. Однако исследование даже такой упрощенной модельной задачи позволяет сделать ряд важных выводов о характере поведения упругих объектов при их контактном взаимодействии. Так, из анализа поведения нормальных перемещений в задаче Лэмба становится

очевидным, что для любой нормальной распределенной нагрузки, приложенной мгновенно к границе полупространства, нормальные перемещения будут принимать свои статические значения сразу после того, как через данную точку пройдет волна Рэлея, порожденная в наиболее удаленной от нее точке приложения нагрузки. Этот вывод подтверждается графиками, изображенными на рис. 6 и 7, где приведены зависимости нормальных перемещений точек площадки нагружения от расстояния до ее центра и времени, возникающие в задачах о мгновенной разгрузке полупространства от плоского штампа и нагрузки Герца соответственно. Видно, что по прошествии времени $\tau=l/\sqrt{q}$, начиная с центра площадки, со скоростью волны Рэлея разрастается круг, на котором отсутствуют нормальные перемещения точек.

Исследуем особенности перемещений вблизи фронтов волн Рэлея, возникающие при разгрузке полупространства от плоского штампа и нагрузки Герца. Основываясь на том, что

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\ln(x - \sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

закключаем, что производные функций $I_{s_0}^{\text{stamp}}(l, \xi)$

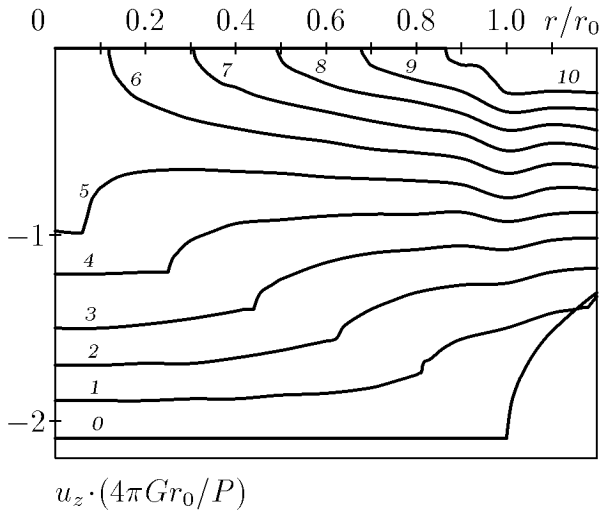


Рис. 6. Обезразмеренные нормальные перемещения $u_z \cdot (4\pi Gr_0/P)$ точек полупространства для $\nu=1/3$, вызванные мгновенным снятием нагрузки, соответствующей давлению гладкого штампа в статической задаче. Перемещения изображены для значений безразмерного времени $\tau=0.2nl$ (n – номер кривой)

и $I_{c0}^{stamp}(l, \xi)$ по ξ имеют корневые особенности в точках $\xi=|1\pm l|$, аналогичные особенностям присутствующих в выражениях $I_{s0}^{Lamb}(\xi)$ и $I_{c0}^{Lamb}(\xi)$ в точке $\xi=1$. Приняв во внимание особенности нормальных перемещений в задаче Лэмба (формулы (16)–(19)), можно утверждать, что скорости точек поверхности полупространства в задаче с нагрузкой (26) будут иметь корневые особенности на фронтах волн Рэлея, движущихся от края площадки нагружения. При этом сами перемещения остаются непрерывными. В случае нагрузки Герца корневые особенности в точках $\xi=|1\pm l|$ имеют уже только вторые производные функций $I_{s0}^{Hertz}(l, \xi)$ и $I_{c0}^{Hertz}(l, \xi)$ по ξ , а сами нормальные перемещения и скорости точек поверхности являются непрерывными функциями своих аргументов, а бесконечные значения приобретают только ускорения на фронтах волн Рэлея.

5. АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Поведение нормальных перемещений на площадке нагружения, особенно в случае нагрузки Герца, дают основания надеяться на возможность применения результатов данного анализа к исследованию нестационарных контактных задач динамической теории упругости. Как следует из рис. 7, чем

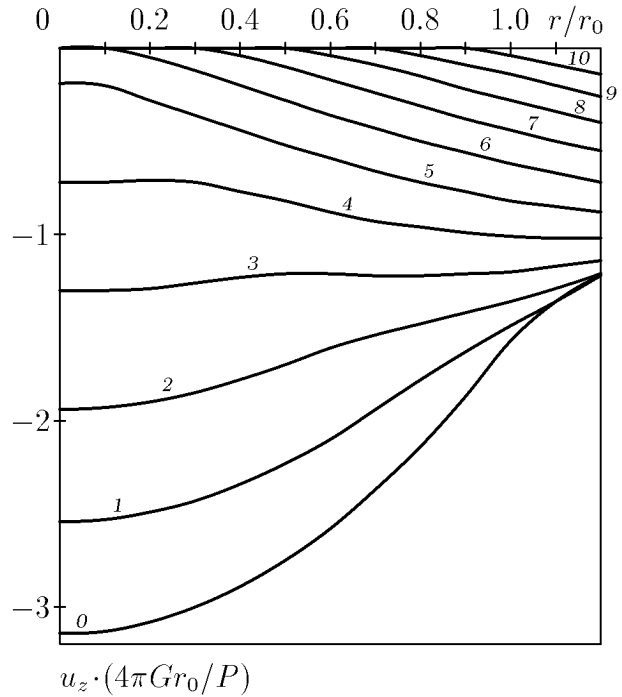


Рис. 7. Обезразмеренные нормальные перемещения $u_z \cdot (4\pi Gr_0/P)$ точек полупространства для $\nu=1/3$, вызванные мгновенным снятием нагрузки Герца. Перемещения изображены для значений безразмерного времени $\tau=0.2nl$ (n – номер кривой)

глубже была втоплена нагрузкой точка в полупространство, тем с большей скоростью она стремится возвратиться на нулевой уровень после снятия нагрузки. При этом вне зависимости от расстояния до центра площадки при подходе к нулевому уровню вертикальная скорость точки также стремится к нулю. Таким образом, вышедшая на нулевой уровень точка поверхности полупространства впоследствии на нем и остается.

Обнадеживает и тот факт, что процесс разгрузки протекает достаточно быстро. Уже по прошествии времени, равного времени прохождения волной Рэлея диаметра площадки нагружения, точки площадки не будут иметь нормальных смещений. Так как в реальных микродвигателях площадка контакта имеет радиус максимально порядка нескольких миллиметров, то с учетом физических параметров материалов, из которых изготавливаются их роторы и статоры, можно заключить, что штамп будет входить в неискривленную поверхность полупространства, даже если частота соударений будет составлять несколько сотен кГц. Конечно это не означает, что для данных частот можно применять теорию Герца, однако такой большой порядок частоты позволяет

надеясь, что теория Герца будет давать хорошее приближение на частотах на два порядка, а то и на порядок меньших. Безусловно, этот вопрос требует дополнительного исследования. В определенной степени ответить на него может решение задачи о постепенном снятии нагрузки с поверхности полупространства, следуя соотношению теории Герца между радиусом площадки контакта и величиной силы прижатия. Заметим, что нормальные перемещения точек поверхности полупространства в такой задаче могут быть получены в виде интегро-дифференциального оператора от перемещений (11), (31) с использованием инкрементного подхода.

Несколько по-иному обстоят дела с применением результатов вибрационной оценки механического импеданса поверхностных биологических тканей человеческого тела для оценивания искажений, вносимых контактными измерительными датчиками. В системах измерения локального механического импеданса поверхности последнюю возбуждают нормальными гармоническими возвратно-поступательными движениями вибратора, по-сути представляющего собой круглый гладкий плоский недеформируемый штамп. При этом импеданс определяется как отношение механической реакции и колебательной скорости, измеренных на контактной поверхности вибратора. Радиус вибратора в таких системах обычно составляет от 1 до 10 мм [9]. Согласно современным представлениям, скорость поперечных волн в мягких биотканях по разным оценкам находится в пределах 1–20 м/с [8, 9, 19] при ν весьма близких к 0.5. Очевидно, что уже при работе на частотах порядка сотен Гц¹ рэлеевская волна, распространяющаяся на поверхности тела, не будет успевать уходить из-под контактной поверхности вибратора, а сама поверхность – возвращаться к недеформированному состоянию. В то же время, контактные датчики для измерения виброакустических полей биологического объекта обычно неподвижно закрепляются (как правило, приклеиваются) на его поверхности [9] а, следовательно, никакая рэлеевская волна из-под датчика распространяться не может. Таким образом, в двух указанных ситуациях контактное взаимодействие на поверхности объекта измерений имеет существенно различный характер. Из этого может быть сделан вывод о том, что значения механических параметров биоткани, полученные путем вибрационного измерения, могут значительно отличаться

¹Отметим, что при регистрации звуков сердца информативным является диапазон частот от 20 Гц до 150–400 Гц, а при регистрации звуков дыхания – до 1–2 кГц.

от тех, которые следует закладывать при оценке эффективности контактных датчиков. Отметим также, что в эти рассуждения может внести коррективы учет механической вязкости, достигающей для мягких биотканей значительных величин [8, 9, 19]. Безусловно, окончательные выводы на этот счет можно будет сделать только по результатам решения задач о гармоническом нагружении поверхности вязко-упругого тела жестким штампом в условиях гладкого контакта и полного сцепления с поверхностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем важнейшие выводы, сделанные в результате проведенного решения задачи о мгновенном осесимметричном нагружении (разгрузке) упругого полупространства по “ступенчатому” закону на круговой площадке конечных размеров:

1. Уже по прошествии времени, равного времени прохождения волной Рэлея диаметра площадки нагружения, нормальные перемещения точек площадки приобретают свои статические (при нагружении) либо нулевые (при разгрузке) значения. Более того, в каждой точке поверхности независимо от месторасположения эти значения устанавливаются сразу после прохождения через нее волны Рэлея от наиболее удаленной точки площадки. При этом касательные перемещения постепенно релаксируют к статическим значениям.
2. Характер особенности на фронте волны Рэлея определяется характером “гладкости” закона нагружения. Так, при нагружении сосредоточенной силой нормальные и касательные перемещения терпят разрыв второго рода. В задаче для плоского штампа корневые особенности на фронтах волн Рэлея имеют скорости точек поверхности полупространства, а сами перемещения остаются непрерывными. В случае нагрузки Герца и нормальные перемещения, и скорости точек поверхности являются непрерывными, а бесконечные значения приобретают только ускорения на фронтах волн Рэлея.
3. Исходя из полученных данных, можно с большим основанием говорить и корректности применения теории контактного взаимодействия Герца для описания динамики микроволновых двигателей в области их реальных параметров.

4. Количественные оценки особенностей контактного взаимодействия виброакустических устройств со свободной поверхностью мягких биологических тканей показывают, что механические параметры последней, полученные путем вибрационных измерений, могут не вполне адекватно описывать взаимодействие биоткани с жестко закрепленным датчиком в полосе частот, являющейся информационно значимой при регистрации звуков жизнедеятельности человеческого организма.
1. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solids // *Phil. Trans. Roy. Soc.*– 1904.– **A203**.– P. 1–42.
2. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости.– М.: Наука, 1986.– 328 с.
3. *Pekeris A. T.* The seismic surface pulse // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*– 1955.– **41**.– P. 469–480.
4. *Огурцов К. И., Петрашень Г. И.* Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии // *Уч. зап. ЛГУ, сер. мат.*– N 149, вып. 24.– 1951.– С. 3–117.
5. *Аки К., Ричардс П. Дж.* Количественная сейсмология: теория и методы.– Т. 1.– М.: Мир, 1983.– 502 с.
6. *References to contemporary papers on acoustics.* 43.38.– Transduction; acoustical devices for the generation and reproduction of sound // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1997.– **102**, N 5, Pt. 2.– P. R220–R224.
7. *References to contemporary papers on acoustics.* 43.38.– Transduction; acoustical devices for the generation and reproduction of sound // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1998.– **104**, N 5, Pt. 2.– P. R192–R196.
8. *Oestreicher H. L.* Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1951.– **23**, N 6.– P. 707–714.
9. *Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.*– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– 156 с.
10. *Олійник В. Н.* Рациональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // *Акуст. вісн.*– 1998.– **1**, N 3.– С. 54–65.
11. *Tewary V. K., Mahapatra M., Fortunko C. M.* Green's function for anisotropic half-space solids in frequency space and calculation of mechanical admittance // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **100**, N 5.– P. 2960–2963.
12. *Рао Y. H.* Elastic waves in solids // *Trans. ASME J. Appl. Mech.*– 1983.– **50**.– P. 1152–1164.
13. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.– К.: Наук. думка, 1979.– 261 с.
14. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи.– К.: Наук. думка, 1976.– 284 с.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Наука, 1971.– 1108 с.
16. *Achenbach J. D.* Wave propagation in elastic solids.– Amsterdam: North Holland Publ. Co, 1973.– 425 p.
17. *Zharii O. Yu.* Frictional contact between the surface wave and a rigid strip // *Trans. ASME J. Appl. Mech.*– 1996.– **63**, N 3.– P. 1–6.
18. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Наука, 1977.– 288 с.
19. *Самойлов В. О., Пономаренко Г. Н., Енин Л. Д.* Низкочастотная биоакустика.– С.-Пб.: Ревверс, 1994.– 215 с.