ISSN 1028-7507 *Акустичний вiсник. 1999. Том 2, N 2. С. 44 – 56*

УДК 539.376

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ФЕРРОМАГНИТНОГО СЛОЯ

В. Г. КАРНАУХОВ, Ю. И. ЛЕЛЮХ

Институт механики НАН Украины им. С. П. Тимошенко, Киев

Получено 2.04.99 ⋄ Пересмотрено 8.06.99

Дана постановка задачи о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве предварительно намагниченного до насыщения ферромагнитного слоя с учетом неоднородного обмена, гиромагнитных и диссипативных эффектов. Для моделирования диссипации используется концепция комплексных характеристик. Диссипативная функция в уравнении энергии равна усредненной за цикл магнитомеханической мощности. Рассматривается предварительное намагничивание до насыщения в толщинном и перпендикулярном к нему (продольном) направлениях. В случае, когда неоднородным обменом можно пренебречь, получены аналитические решения обеих задач. Представлено простое выражение для температуры диссипативного разогрева при вынужденных колебаниях на резонансных частотах. В качестве критического параметра нагружения принято его значение, при котором температура достигает точки Кюри. С использованием численных методов рассчитаны амплитудные и температурные характеристики при движении вдоль резонансных кривых для указанных двух случаев предварительного намагничивания. Дана оценка влияния гиромагнитного эффекта на эти характеристики.

Дано постановку задачі про вимушені коливання та дисипативний розігрів попередньо намагніченого до насичення феромагнітного шару з урахованням неоднорідного обміну, гіромагнітних та дисипативних ефектів. Для моделювання дисипації використовується концепція комплексних характеристик. Дисипативна функція в рівнянні енергії дорівнює осередненій за цикл магнітомеханічній потужності. Розглядаються два випадки попередньої намагніченості до насичення – в напрямку товщини пластинки та в перпендикулярному до нього (поздовжньому) напрямку. Для випадку, коли неоднорідним обміном можна знехтувати, одержані аналітичні розв'язки обох задач. Представлено простий вираз для температури дисипативного розігріву при вимушених коливаннях на резонансних частотах. В якості критичного параметра навантаження прийнято його значення, при якому температура досягає точки Кюрі. З використанням чисельних методів обчислені амплітудні та температурні характеристики при русі вздовж резонансних кривих для вказаних вище двох випадків попереднього намагнічування. Дано оцінку впливу гіромагнітного ефекта на ці характеристики.

The problem on forced vibrations and dissipative heating of saturated ferromagnetic layer is studied. The interaction exchange, gyromagnetic and dissipative effects are taken into account. The conception of complex characteristics was used for modeling of dissipation. Dissipative function in the equation of energy is equal to magnetoelastic power averaged per cycle. The two cases of saturated magnetization are considered: when the magnetization direction coincides with the thickness direction, and when the magnetization direction is normal to the thickness. For the case of negligible interaction exchange the analytical solutions of mentioned problems were obtained. A simple expression is introduced for temperature of heating. For critical parameter of loading that one is accepted, at which the temperature rises to Kuri's point. By numerical simulation there were obtained the amplitude and temperature-frequency characteristics for the above problems. The estimate of influence of gyromagnetic effect on these characteristics is given.

ВВЕДЕНИЕ

Ферромагнетики, антиферромагнетики и ферриты находят широкое применение в различных областях современной науки и техники [1 – 6]. Зачастую они по своим функциональным возможностям превосходят пьезоэлектрические материалы. В связи с разработкой в последние годы магнетиков с большими магнитострикционными деформациями при комнатных температурах [7] подобные материалы успешно конкурируют с пьезоэлектриками при их использовании в преобразователях энергии. К тому же они имеют ряд традиционных преимуществ перед другими пьезоактивными материалами – большую механическую прочность, антикоррозийность, простоту изготовления, надежность и долговечность. Во многих областях техники, эти материалы находятся вне конкуренции [3, 4]. Главным их недостатком является существенная нелинейность определяющих уравнений и сильная зависимость свойств от температуры.

Основным режимом работы многих элементов конструкций современной техники из магнитных материалов является гармонический и, в частности, резонансный режим. Поэтому магнитомеханическим колебаниям и гармоническим волнам уделяется большое внимание в физике и механике.

Поскольку линейным пьезомагнитным эффектом в естественном состоянии (без предварительного намагничивания) обладает лишь небольшое количество материалов, для формирования пьезоэффекта обычно используется предварительное статическое намагничивание с последующим наложением на него малых магнитомеханических полей, изменяющихся по гармоническому закону. Для этой же цели используются специальные технологии обработки керамических магнетиков (ферритов), аналогичные технологиям обработки сегнетоэлектрических материалов. Явным преимуществом ферромагнетиков перед другими пьезомагнетиками является отсутствие в них токов Фуко, что позволяет изготовлять монолитные ферритовые сердечники.

При непрерывной длительной работе в резонансном режиме в пьезомагнитном теле (сердечнике) возникают интенсивные моногармонические колебания, амплитудные значения которых не могут быть рассчитаны без учета диссипативных потерь. При этом диссипация магнитомеханической энергии может привести к существенному повышению температуры саморазогрева. Уровень этой температуры зависит от амплитуды нагружения, частоты, механических и магнитных гистерезисных характеристик, теплопроводности, условий теплообмена с окружающей средой и др. Теплообразование (диссипативный разогрев) может оказать существенное влияние на работоспособность пьезоэлементов. Во-первых, из-за зависимости магнитомеханических характеристик от температуры может произойти сдвиг резонансной частоты и существенно снизиться излучательная способность преобразователей, если они спроектированы на резонансный режим работы. Во-вторых, при достижении температурой точки Кюри пьезомагнитный материал перестает быть пьезоактивным и преобразователь теряет свое функциональное назначение. В-третьих, при нарушении баланса между теплообразованием и теплоотводом в окружающую среду в элементе может наблюдаться лавинообразный рост температуры со временем – так называемый тепловой взрыв с последующим тепловым разрушением элемента. В-четвертых, возникшее в результате разогрева неоднородное температурное поле может вызвать в теле температурные напряжения, а также перераспределение магнитных и механических полевых величин ввиду зависимости свойств материала от температуры. Поэтому представляет интерес разработка математических моделей колебаний пьезомагнитных тел с учетом диссипативного разогрева.

Для феноменологического описания термомеханических колебаний пьезомагнитных тел можно использовать модели вязкоупругости. Возможны два подхода к разработке таких моделей. Первый из них основан на общей нелинейной теории магнитотермовязкоупругости, которая описывает магнитомеханические и тепловые поля при произвольных историях независимых полевых величин с последующей линеаризацией основных соотношений такой теории около состояния предварительного стационарного намагничивания. При этом наиболее подходящим вариантом теории вязкоупругости для описания такого типа историй, когда на установившееся состояние намагничивания накладывается дополнительное малое гармоническое возмущение, является так называемая конечная теория термовязкоупругости, развитая в монографии [8].

Второй метод, развитый для связанных задач термовязкоупругости в монографии [9], состоит в том, что в качестве независимых полевых величин выбираются характеристики предварительного магнитомеханического состояния и наложенные на него амплитуды гармонических полевых величин. Основой для такого подхода является, во-первых, тот факт, что при резонансных колебаниях моногармонический режим выдерживается с достаточно высокой точностью. Во-вторых, в работах [10 – 12] показано, что при конкретизации общей теории материалов с затухающей памятью с использованием уравнений состояния в виде суммы интегралов возрастающей кратности для описания моногармонического состояния имеет место концепция комплексных модулей и возможность представления определяющих уравнений для амплитуд через потенциалы. Применительно к пьезомагнитным материалам такой подход реализован в [13]. При использовании как первого, так и второго подходов в конечном итоге получаются определяющие комплексные уравнения, параметры которых зависят от предварительного состояния, температуры, частоты и, возможно, от амплитуд наложенных полевых величин в случае физически нелинейного материала.

При моделировании колебательных процессов и диссипативного разогрева важное значение имеет диапазон рассматриваемых частот и уровень предварительного намагничивания. При высоких частотах и намагничивании до насыщения возникает необходимость учета неоднородного обмена и гиромагнитных эффектов. С этой целью уравнения магнитостатики дополняются уравнениями движения для вектора намагничивания, которые в последующем тоже линеаризуются около состояния предварительного стационарного намагничивания. Для учета магнитной диссипации в указанные уравнения вводятся релаксационные члены. Первой работой в этом направлении была классическая работа Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [14]. Обзор исследований по данному вопросу дан в [15, 16]. В низкочастотной области обменными силами и гиромагнитным эффектом можно пренебречь, т. е. магнитный материал можно рассматривать как мягкий ферромагнетик. Такой подход широко используется при расчете магнитомеханических преобразователей энергии [17]. Следует отметить, что в литературе отсутствуют работы по колебаниям ферромагнитных тел с учетом диссипативного разогрева.

Целью данной статьи является общая постановка задачи о колебаниях и диссипативном разогреве ферромагнитного слоя, подверженного предварительному статическому намагничиванию до насыщения в одном из направлений анизотропии, с учетом неоднородного обмена, гиромагнитного эффекта и диссипации. На основе этой постановки рассматривается задача о колебаниях и диссипативном разогреве ферромагнитного слоя, намагниченного до насыщения в толщинном направлении, с наложением на это состояние в перпендикулярном к толщинной координате направлении гармонического магнитомеханического поля малой интенсивности. Аналогичная задача рассмотрена и при намагничивании слоя до насыщения в продольном направлении. Для обоих случаев диссипативные функции равны усредненной за цикл магнитомеханической мощности. Предполагается, что механические, магнитные и тепловые характеристики материала не зависят от температуры. Магнитомеханические и температурные поля рассчитываются в окрестности резонансных частот для случая, когда неоднородным обменом можно пренебречь. Отметим, что задача для слоя имеет важное практическое значение и является основным объектом исследований по колебаниям и распространению магнитоупругих волн. Обзор исследований по этому вопросу представлен, например, в [18, 19].

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО СЛОЯ

Общая феноменологическая теория упругих ферромагнетиков рассмотрена в работах [20, 21], в которых предлагаются и простые модели диссипации, когда независимые переменные представляются в виде суммы упругих и неупругих составляющих, причем неупругие составляющие пропорциональны скоростям изменения независимых переменных. Подробное изложение вопросов, связанных с учетом магнитной диссипации в уравнениях Ландау – Лифшица, дано в упомянутом выше обзоре [11]. Модели вязкоупругих ферромагнетиков с затухающей памятью и с внутренними переменными представлены в [8]. Если ориентироваться на такие истории независимых переменных, когда на установившееся состояние намагниченности налагается малое нестационарное состояние, то наиболее адекватной моделью является модель, полученная на основе так называемой конечной линейной теории вязкоупругости. При построении этой теории предполагается, что независимые переменные состояния изменяются медленно в недавнем прошлом. В качестве независимых переменных в этой теории выбираются разностные истории:

$$\Lambda_d(t-s)=\Lambda(t-s)-\Lambda(t), \qquad 0\le s\le\infty,$$

причем при $s=0$ принимается $\Lambda_d(t)=0$. При этом для указанных выше историй независимых переменных, когда на стационарное состояние накладывается малое возмущение, разностные истории будут всегда малы. Поэтому при разложении потенциалов в ряды по разностным историям можно ограничиться небольшим числом членов. Одной из наиболее популярных моделей в теории магнитоупругих материалов является модель, предложенная в [20]. Здесь же рассмотрены и линеаризованные модели упругих материалов. Дальнейшее развитие этой модели представлено в [16, 19]. При использовании результатов [20] и конечной линейной теории разложение свободной энергии в ряд по разностным историям может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
F = {} & F^{\infty}(E_{ij},N_i,G_{ij},\theta)+\\
&+\frac{1}{2\rho_0}\,\widetilde{c}_{ijkl}*E_{dij}*E_{dkl}+\\
&+\frac{\rho_0}{2}\,{}_2\widetilde{\chi}_{ij}*N_{di}*N_{dj}+\\
&+\frac{\rho_0}{2}\,\widetilde{\alpha}_{ij}*G_{dij}+\\
&+\frac{\rho_0}{2}\,\widetilde{C}*\theta_d*\theta_d+\\
&+\widetilde{\gamma}_{ij}*E_{dij}*\theta_d+\\
&+\frac{1}{2}\,\widetilde{\varepsilon}_{kij}*E_{dij}*N_{dk}+\\
&+\rho_0\,\widetilde{b}_{ijkl}*E_{dij}*N_{dk}*N_{dl}+\\
&+\rho_0\,\widetilde{f}_{kij}*G_{dij}*N_{dk}+\\
&+\rho_0\,{}_4\widetilde{\chi}_{ijkl}*E_{dij}*G_{dkl}.
\end{aligned} \qquad (1)$$

По повторяющимся индексам здесь и далее предполагается суммирование. Кроме того, в выражении (1) введено обозначение

$$\begin{aligned}
M*f_{d_1}*f_{d_2}=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} & M(s_1,s_2,\Lambda)\times\\
&\times f_1(t-s_1)f_2(t-s_2)ds_1ds_2.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Составляющая $F^{\infty}(E_{ij}, N_i, G_{ij}, \theta)$ отвечает за упругое поведение и имеет вид, представленный в [20]; $\widetilde{c}_{ijkl}$, ${}_2\widetilde{\chi}_{ij}$, ${}_4\widetilde{\chi}_{ijkl}$, $\widetilde{\alpha}_{ij}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{\varepsilon}_{kij}$, $\widetilde{b}_{ijkl}$, $\widetilde{f}_{kij}$, $\widetilde{\gamma}_{ij}$ – ядра вязкоупругих модулей, магнитной анизотропии второго и четвертого порядков, обменного взаимодействия, теплоемкости, пьезомагнетизма, магнитострикции, магнитных обменных сил и теплового расширения соответственно; E_{dij}, N_{di}, G_{dij}, θ_d – разностные истории деформации, намагничивания, градиента намагничивания и температуры. Подробный вывод определяющих уравнений конечной линейной теории для вязкоупругих материалов с поляризацией и намагничиванием без учета обменных сил и гиромагнитных эффектов изложен в [8]. Линеаризация соотношений, полученных на основании функционала (1), приводит к уравнениям состояния для гармонических добавок, аналогичным представленным в [20], но с заменой соответствующих упругих параметров на комплексные, которые могут зависеть от частоты и предварительного статического состояния. Если в функционале (1) ядра не зависят от Λ, то соответствующие комплексные параметры в уравнениях состояния работы [20], отмеченные в выражении (1) волной, не будут зависеть от предварительного статического состояния. Этот вариант соотношений и будет рассматриваться в дальнейшем.

Итак, выберем декартову систему координат x_i $i=1,2,3$ так, что $x_3=\pm h$ определяет плоскости слоя при намагничивании в толщинном направлении, а $x_1=\pm h$ – те же плоскости при намагничивании в продольном направлении. Внешнее магнитное поле H_i^a в обоих случаях прикладывается в направлении x_3 и является таким, что в этом направлении имеет место намагничивание до насыщения M_0^i.

При намагничивании в толщинном направлении внутреннее магнитное поле составляет $H_i^0=H_i^a-4\pi M_i^0$, а при намагничивании в перпендикулярном к толщине направлении – $H_i^0=H_i^a$. Таким образом,

$$H_k^0 = H_0\delta_{3k}, \qquad M_k^0 = M_0\delta_{3k}, \tag{3}$$

где через H_0 и M_0 обозначены величины напряженности внутреннего статического магнитного поля и намагниченность насыщения соответственно. Представим напряженность магнитного поля и намагничивание в деформированном теле в виде суммы двух составляющих:

$$H_i = \overline{H}_i + h_i, \qquad M_i = \overline{M}_i + m_i, \tag{4}$$

где чертой отмечены установившиеся магнитные величины в недеформированном теле, а величины, обозначенные малыми буквами, определяют поправки, возникающие за счет деформации и вязкоупругого характера поведения материала. Предполагая, что внешнее магнитостатическое поле однородно, внутреннее локальное магнитное поле равно нулю $({}_0H_i^L=0)$ и $(\widetilde{u}_l, \widetilde{m}_l, \widetilde{h}_l) = (u_l, m_l, h_l)\exp(i\omega t)$ $(i=\sqrt{-1})$, основные соотношения механики и электродинамики можно записать в виде, предложенном в [22]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,i} + M_0 h_{j,3}^M + \rho\omega^2 u_j = 0,\\
&\sigma_{ij}^A = \frac{1}{2} M_0(\delta_{3i} h_j^L \delta_{3j} h_i^L),\\
&\sigma_{ij}^S = \overline{c}_{ijkm} u_{k,m} + \overline{\varepsilon}_{kij} m_k,\\
&e_{i3k} M_0(h_k^M - a_{lk,l} h_k^L) - e_{i3k} m_k H_0 = \frac{i\omega}{\gamma} m_i,\\
&h_i^M = -\overline{\varphi}_{,i} - H_0 u_{3,i} \equiv -\varphi_{,i},\\
&h_{i,i}^M + 4\pi m_{i,i} - 4\pi M_0 u_{i,3i} = 0,\\
&a_{ij} = \overline{\beta}_{ijkl} m_{l,k},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^A$ и σ_{ij}, a_{lk}, u_j, h_j^M, h_j^L, m_k – компоненты тензоров напряжений и обменного взаимодействия, компоненты векторов перемещения, напряженности максвелловского магнитного поля и локального магнитного поля, вектора намагниченности соответственно; ρ, φ и γ – плотность, магнитный потенциал и гиромагнитный коэффициент; $\overline{c}_{ijkm}$, $\overline{\chi}_{ik}$, $\overline{\beta}_{ijkl}$, $\overline{\varepsilon}_{kij}$, $\overline{g}_{ikm}$ – комплексные компоненты тензоров вязкоупругих модулей, магнитной анизотропии, обменного взаимодействия, пьезомагнетизма соответственно; e_{ijk} – тензор Леви – Чивита.

Комплексные характеристики получаются из представления (1) с последующей линеаризацией определяющих уравнений и имеют вид

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{ijkm} &= c_{ijkm}- \\
&- (\varepsilon_{3ij} + b_{ij33}M_0)M_0\delta_{km}+ \\
&+ (\varepsilon_{3im} + b_{im33}M_0)M_0\delta_{jk}+ \\
&+ (\varepsilon_{3mj} + b_{jm33}M_0)M_0\delta_{ik}+ \\
&+ \frac{1}{2}(\varepsilon_{ikm} + 2b_{km3i}M_0)M_0\delta_{3j}+ \\
&+ \frac{1}{2}(\varepsilon_{jkm} + 2b_{km3j}M_0)M_0\delta_{3i}+ \\
&+ (\varepsilon_{mij} + 2b_{ij3m}M_0)M_0\delta_{3k}- \\
&- \frac{1}{2}({}_2\chi_{i3}\delta_{3j} + {}_2\chi_{j3}\delta_{3i})M_0^2\delta_{km}+ \\
&+ \frac{1}{2}({}_2\chi_{mi}\delta_{3j} + {}_2\chi_{mj}\delta_{3i})M_0^2\delta_{3k}+ \\
&+ \frac{1}{2}{}_2\chi_{m3}(\delta_{3j}\delta_{ik} + {}_2\delta_{3i}\delta_{jk})M_0^2+ \\
&- \frac{1}{2}({}_4\chi_{333i}\delta_{3j} + {}_4\chi_{333j}\delta_{3i})M_0^4\delta_{km}+ \\
&+ \frac{3}{2}({}_4\chi_{33mi}\delta_{3j} + {}_4\chi_{33mj}\delta_{3i})M_0^4\delta_{3k}+ \\
&+ \frac{1}{2}{}_4\chi_{333m}(\delta_{3j}\delta_{ik} + {}_2\delta_{3i}\delta_{jk})M_0^4,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon}_{kij} &= \varepsilon_{kij} + 2b_{ij3k}M_0+ \\
&+ \frac{1}{2}({}_2\chi_{i3}\delta_{jk} + {}_2\chi_{j3}\delta_{ik})M_0+ \\
&+ \frac{1}{2}({}_2\chi_{ik}\delta_{3j} + {}_2\chi_{jk}\delta_{3i})M_0+ \\
&+ \frac{3}{2}({}_4\chi_{33ki}\delta_{3j} + {}_4\chi_{33kj}\delta_{3i})M_0^3+ \\
&+ \frac{1}{2}({}_4\chi_{333i}\delta_{jk} + {}_4\chi_{333j}\delta_{ik})M_0^3,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\chi}_{ik} &= ({}_2\chi_{33}\delta_{ik} + 2{}_2\chi_{k3}\delta_{3i} - {}_2\chi_{ik})+ \\
&+ M_0^2({}_4\chi_{3333}\delta_{ik} - 3{}_4\chi_{33ki} + 4{}_4\chi_{333k}\delta_{3i}),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\overline{g}_{ikm} &= -\varepsilon_{ikm} - 2b_{km3i}M_0+ \\
&+ (\varepsilon_{3km} + 2b_{km33}M_0)\delta_{3i}- \\
&- {}_2\chi_{im}M_0\delta_{3k} - {}_2\chi_{m3}M_0\delta_{ki}+ \\
&+ 2{}_2\chi_{m3}M_0\delta_{i3}\delta_{k3},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\overline{\beta}_{ijkl} = -2\left(\frac{1}{2}\alpha_{ik} + f_{3ik}M_0\right)\delta_{jl}. \tag{10}$$

В приведенных соотношениях c_{ijkl}, ${}_2\chi_{ik}$, ${}_4\chi_{ijkl}$, α_{ij}, ε_{kij}, b_{ijkl}, f_{kij} – комплексные компоненты тензоров вязкоупругих модулей, магнитной анизотропии второго и четвертого порядков, обменного взаимодействия, пьезомагнетизма, магнитострикции, магнитных обменных сил соответственно. Все величины, за исключением M_0 и символа Кронекера δ_{ij}, являются комплексными.

Учитывая то, что поверхность пластинки свободна от напряжений и пластинка намагничена до насыщения, внешняя среда – немагнитная (пластинка находится в вакууме), а статическое состояние однородно, для случая пластинки, намагниченной вдоль нормали к поверхности, граничные условия запишем в виде [22]

$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma_{3j} = -4\pi M_0^2 u_{k,k}\delta_{3j}, \\
&a_{3b} = 0, \\
&h_b^M = h_0\delta_{1b},
\end{aligned}\right. \qquad \text{при} \quad x_3 = \pm h, \tag{11}$$

а для пластинки, намагниченной в продольном направлении, при

$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma_{3j} = 0, \\
&a_{1b} = 0, \\
&h_1^M + 4\pi m_1 - 4\pi M_0 u_{k,k} = h_0,
\end{aligned}\right. \qquad \text{при} \quad x_1 = \pm h, \tag{12}$$

В соотношениях (11), (12) $b=1,2$, h_0 – действительная постоянная. Для материала типа железоиттриевых гранатов (ЖИГ) кристаллического класса $m3m$, которые намагничены вдоль оси кубического кристалла, справедливо $\varepsilon_{ijk}=0$, $g_{ijk}=0$, $f_{ijk}=0$. Для других типов симметрии эти величины отличны от нуля. Вводя обозначения, представленные в [22], и пренебрегая соответствующими членами, получим уравнения магнитомеханики, аналогичные представленным в [22], но с ком-

ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 1999. Том 2, N 2. С. 44–56

плексными коэффициентами:

$$c_{11}u_{1,11}+c_{12}(u_{2,21}+u_{3,31})+$$
$$+c_{44}(u_{1,22}+u_{2,12}+u_{1,33}+u_{3,13})+$$
$$+2b_{44}M_0m_{1,3}-M_0\varphi_{,13}+\rho\omega^2u_1=0,$$
$$c_{11}u_{2,22}+c_{12}(u_{1,12}+u_{3,32})+$$
$$+c_{44}(u_{1,21}+u_{2,11}+u_{2,33}+u_{3,23})+$$
$$+2b_{44}M_0m_{2,3}-M_0\varphi_{,23}+\rho\omega^2u_2=0,$$
$$c_{11}u_{3,33}+c_{12}(u_{1,13}+u_{2,23})+$$
$$+c_{44}(u_{1,31}+u_{3,11}+u_{2,32}+u_{3,22})+ \qquad (13)$$
$$+2b_{44}M_0(m_{1,1}+m_{2,2})-M_0\varphi_{,23}+\rho\omega^2u_2=0,$$
$$M_0\varphi_{,2}+\alpha_{11}M_0m_{2,ll}+(3_4\chi_{12}-_4\chi_{11})M_0^3m_2+$$
$$+2b_{44}M_0^2(u_{2,3}+u_{3,2})+H_0m_2=\frac{i\omega}{\gamma}m_1,$$
$$-M_0\varphi_{,1}+\alpha_{11}M_0m_{1,ll}-(3_4\chi_{12}-_4\chi_{11})M_0^3m_1-$$
$$-2b_{44}M_0^2(u_{1,3}+u_{3,1})-H_0m_1=\frac{i\omega}{\gamma}m_2,$$
$$\varphi_{,kk}-4\pi m_{b,b}+4\pi M_0u_{k,3k}=0.$$

Для компонентов тензоров четвертого ранга здесь принято обозначение Λ_{pq} вместо Λ_{ijkl}, где p или q последовательно принимает значения от 1 до 6 при следующих комбинациях ij и kl: 11, 22, 33, 23 или 32, 31 или 13, 12 или 21. Действительные составляющие комплексных коэффициентов для ЖИГ равны $c_{11}=26.9\cdot10^{11}$ дин/см^2, $c_{12}=10.77\cdot10^{11}$ дин/см^2, $c_{44}=7.64\cdot10^{11}$ дин/см^2, $b_{44}=1.66\cdot10^2$, $3\,_4\chi_{12}-_4\chi_{11}=3.36\cdot10^{-5}$ э$^{-2}$, $\alpha_{11}=$ $=1.87\cdot10^{-11}$ см^2, $\gamma=-1.76\cdot10^7$ э·см^2/(дин·с), $M_0=1750/(4\pi)$ Гс. Граничные условия (11), (12) запишем соответственно в виде

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{31}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=a_{31}=a_{32}=0,\\ h_1=h_0,\end{array}\right. \qquad (14)$$
$$\text{при}\quad x_3=\pm h,$$
$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_{11}=\sigma_{13}=\sigma_{13}=a_{11}=a_{12}=0,\\ h_1^M+4\pi m_1-4\pi M_0u_{k,k}=h_0,\end{array}\right. \qquad (15)$$
$$\text{при}\quad x_1=\pm h,$$

К этим уравнениям необходимо добавить усредненное за цикл уравнение энергии для температуры

$$c\dot\theta=\lambda\theta_{,ij}+W, \qquad (16)$$

где усредненная за цикл диссипативная функция равна

$$W=\frac{\omega}{2}(\sigma''_{kl}\varepsilon'_kl-\sigma'_{kl}\varepsilon''_kl+h''_km'_k-h'_km''_k), \qquad (17)$$

а граничные условия для температуры имеют вид

$$\begin{array}{c}\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i}\pm\alpha(\theta-\theta_0)=0\\ \text{при}\quad x_i=\pm h\quad(i=1,3).\end{array} \qquad (18)$$

В дальнейшем полагаем, что единственной отличной от нуля мнимой составляющей комплексных характеристик является c''_{ijkl}.

2. ПЛАСТИНКА, НАМАГНИЧЕННАЯ В ПОПЕРЕЧНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим пластинку, намагниченную в направлении x_3. Она предполагается неограниченной по осям x_1 и x_2 и ограниченной в направлении x_3 плоскостями $x_i=\pm h$. Так как пластинка не имеет границ в направлениях x_1 и x_2, а намагничивающее поле предполагается независящим от этих координат, то решение системы зависит только от x_3, за исключением выражения для φ, которое может быть линейной функцией поперечных координат x_1 и x_2. В этом случае система (13) приводится к виду

$$c_{44}u_{1,33}+2b_{44}M_0m_{1,3}+\rho\omega^2u_1=0,$$
$$c_{44}u_{2,33}+2b_{44}M_0m_{2,3}+\rho\omega^2u_2=0,$$
$$-\alpha_{11}m_{2,33}+\left(K+\frac{H_0}{M_0}\right)m_2+$$
$$+2b_{44}M_0u_{2,3}=\frac{i\omega}{\gamma M_0}m_1, \qquad (19)$$
$$-\varphi_{,1}+\alpha_{11}m_{1,33}-\left(K+\frac{H_0}{M_0}\right)m_1-$$
$$-2b_{44}M_0u_{3,1}=\frac{i\omega}{\gamma M_0}m_2,$$
$$\varphi_{33}-4\pi M_0u_{3,33}=0,$$

где $K=3\,{}_4\chi_{12}-{}_4\chi_{11}$. Граничные условия (14) принимают форму

$$\begin{cases} c_{44}u_{1,33}+2b_{44}M_0m_1=0, \\ c_{44}u_{2,33}+2b_{44}M_0m_2=0, \\ -\alpha_{11}m_{1,33}-\alpha_{11}m_{2,33}=0 \\ -\varphi_{,1}=h_1^M=h_0 \end{cases} \qquad (20)$$

$$\text{при} \quad x_3=\pm h.$$

Пренебрегая обменным взаимодействием ($\alpha_{11}= =0$), краевую задачу (19), (20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &c_{44}u_{1,33}+em_{1,3}+\rho\omega^2u_1=0, \\ &c_{44}u_{2,33}+em_{2,3}+\rho\omega^2u_2=0, \\ &Pm_2+eu_{2,3}=\frac{i\omega}{\gamma M_0}m_1, \\ &h_0-Pm_1+eu_{3,1}=\frac{i\omega}{\gamma M_0}m_2, \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} c_{44}u_{1,3}+em_1=0, \\ c_{44}u_{2,3}+em_2=0, \end{cases} \qquad (22)$$

$$\text{при} \quad x_3=\pm h,$$

где $P=H_0/M_0+K$; $e=2b_{44}M_0$. Если перейти к новым переменным

$$\begin{aligned} u^{\pm}&=u_1\pm iu_2, \\ m^{\pm}&=m_1\pm im_2, \end{aligned} \qquad (23)$$

то задача (21), (22) распадается на две граничные задачи относительно $u^{\pm}$ и $m^{\pm}$:

$$\begin{aligned} &c_{44}u^{\pm}_{,33}+em^{\pm}_{,3}+\rho\omega^2u^{\pm}=0, \\ &\left(P\pm\frac{\omega}{\gamma M_0}\right)m^{\pm}+eu^{\pm}_{,3}=h_0, \end{aligned} \qquad (24)$$

$$c_{44}u^{\pm}_{,3}+em^{\pm}=0 \quad \text{при} \quad x_3=\pm h, \qquad (25)$$

где $c_{44}=c'_{44}+ic''_{44}$. Выразив из второго уравнения системы (24) $m^{\pm}$ через $u^{\pm}$, h_0 и подставив в первое, получим следующую задачу:

$$(c_{44}-y^{\pm})u^{\pm}_{,33}+\rho\omega^2u^{\pm}=0, \qquad (26)$$

$$(c_{44}-y^{\pm})u^{\pm}_{,3}=c_0^{\pm} \quad \text{при} \quad x_3=\pm h. \qquad (27)$$

Здесь

$$y^{\pm}=\frac{e^2}{P\pm\dfrac{\omega}{\gamma M_0}};$$

$$c_0^{\pm}=\frac{eh_0}{P\pm\dfrac{\omega}{\gamma M_0}}.$$

Перепишем систему (26), (27) в виде

$$u^{\pm}_{,33}+\rho\omega^2a^{\pm}u^{\pm}=0, \qquad (28)$$

$$u^{\pm}_{,3}=u_0^{\pm} \quad \text{при} \quad x_3=\pm h, \qquad (29)$$

где

$$a^{\pm}=\frac{e^2}{c_{44}\left(P\pm\dfrac{\omega}{\gamma M_0}\right)-e^2};$$

$$u_0^{\pm}=\frac{eh_0}{c_{44}\left(P\pm\dfrac{\omega}{\gamma M_0}\right)-e^2}.$$

Ее решение будем искать в форме

$$u^{\pm}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{\pm}\sin k_nx_3, \qquad k_n=\frac{(2n-1)\pi}{2h}. \qquad (30)$$

Пусть $u^{\pm}=u^{s\pm}+u^{d\pm}$, $u^{s\pm}=n_0^{\pm}x_3$, а $u^{d\pm}_{,3}=0$ при $x_3=\pm h$. Тогда граничная задача (28), (29) примет вид

$$u^{d\pm}_{,33}+\rho\omega^2a^{\pm}u^{d\pm}=-\rho\omega^2a^{\pm}u^{s\pm}, \qquad (31)$$

$$u^{d\pm}_{,3}=0 \quad \text{при} \quad x_3=\pm h. \qquad (32)$$

Разлагая правую часть (32) в ряд по $\sin k_nx_3$, получаем выражение для определения $A_n^{d\pm}$:

$$A_n^{d\pm}=-\frac{(-1)^{n+1}2\rho\omega^2a^{\pm}u_0^{\pm}}{hk_n(\rho\omega^2a^{\pm}-k_n^2)}. \qquad (33)$$

Так как $A_n^{\pm}=A_n^{d\pm}+A_n^{s\pm}$, то

$$\begin{aligned} u_n^{\pm}=A_n^{d\pm}=&\frac{(-1)^{n+1}2eh_0}{h}\times \\ \times&\frac{1}{\left((\rho\omega^2-c_{44}k_n^2)\left(P\pm\dfrac{\omega}{\gamma M_0}\right)+e^2k_n^2\right)}. \end{aligned} \qquad (34)$$

К действительным значениям перемещений можно прийти, используя формулы, обратные (23).

3. ПЛАСТИНКА, НАМАГНИЧЕННАЯ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Аналогично предыдущему случаю запишем систему (13), (15) в виде

$$\begin{aligned} & c_{44} u_{3,11} + e m_{1,1} + \rho\omega^2 u_3 = 0, \\ & -\alpha_{11} m_{2,11} + P m_2 = \frac{i\omega}{\gamma M_0} m_1, \\ & -\varphi_{,1} + \alpha_{11} m_{1,11} - P m_1 - e u_{3,1} = \frac{i\omega}{\gamma M_0} m_2, \\ & \varphi_{,11} - 4\pi m_{1,1} = 0. \end{aligned} \qquad (35)$$

Граничные условия (12) примут вид

$$\left\{ \begin{aligned} & c_{44} u_{3,1} + e m_1 = 0, \\ & -\alpha_{11} m_{1,1} = -\alpha_{11} m_{2,1} = 0, \\ & -\varphi_{,1} + 4\pi m_1 = h_0 \end{aligned} \right. \qquad (36)$$
$$\text{при} \quad x_1 = \pm h.$$

С учетом последнего уравнения в соотношениях (35) в пренебрежении неоднородным обменом ($\alpha_{11}=0$) краевую задачу (35), (36) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} & c_{44} u_{3,11} + e m_{1,1} + \rho\omega^2 u_3 = 0, \\ & P m_2 = \frac{i\omega}{\gamma M_0} m_1, \\ & h_0 - (P + 4\pi) m_1 - e u_{3,1} = \frac{i\omega}{\gamma M_0} m_2, \end{aligned} \qquad (37)$$

$$c_{44} u_{3,1} + e m_1 = 0, \quad \text{при} \quad x_1 = \pm h, \qquad (38)$$

где $c_{44} = c'_{44} + i c''_{44}$. Исключив m_1 и m_2 из уравнений (37), придем к следующей граничной задаче:

$$(c_{44} - y) u_{3,11} + \rho\omega^2 u_3 = 0, \qquad (39)$$

$$(c_{44} - y) u_{3,1} = c_0 \quad \text{при} \quad x_1 = \pm h, \qquad (40)$$

где

$$y = \frac{e^2 P}{P(P+4\pi) - \dfrac{\omega^2}{(\gamma M_0)^2}};$$

$$c_0 = \frac{e P h_0}{P(P+4\pi) - \dfrac{\omega^2}{(\gamma M_0)^2}}.$$

Эту задачу удобно записать в другой форме:

$$u_{3,11} + \rho\omega^2 a u_3 = 0, \qquad (41)$$

$$u_{3,1} = u_0 \quad \text{при} \quad x_1 = \pm h. \qquad (42)$$

Здесь

$$a = \frac{P(P+4\pi) - \dfrac{\omega^2}{(\gamma M_0)^2}}{c_{44}\left(P(P+4\pi) - \dfrac{\omega^2}{(\gamma M_0)^2} \right) - e^2 P};$$

$$u_0 = \frac{e P h_0}{c_{44}\left(P(P+4\pi) - \dfrac{\omega^2}{(\gamma M_0)^2} \right) - e^2 P}.$$

Задача (41), (42) аналогична задаче (28), (29) из раздела 2. Ее решение ищем в виде

$$u_3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x_1, \qquad k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2h}. \qquad (43)$$

Введя обозначение

$$\Delta(\omega^2) = (\rho\omega^2 - c_{44} k_n^2) \times \\ \times \left(P(P+4\pi) - \frac{\omega^2}{(\gamma M_0)^2} \right) + e^2 k_n^2 P,$$

коэффициенты, входящие в ряд (43), запишем как

$$u_{3n} = A_n = -\frac{(-1)^{n+1} 2 e P h_0}{h \Delta(\omega^2)}. \qquad (44)$$

Возвращаясь к системе (37), найдем значения намагниченности

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} \cos k_n x_1, \\ m_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos k_n x_1, \end{aligned} \qquad (45)$$

где

$$\begin{aligned} B_{1n} &= \frac{(-1)^{n+1} 2 P h_0 (\rho\omega^2 - c_{44} k_n^2)}{k_n h \Delta(\omega^2)}; \\ B_{2n} &= \frac{i\omega}{\gamma M_0 P} B_{1n}. \end{aligned} \qquad (46)$$

Из выражения (44) легко получить значение собственной частоты магнитоупругого резонанса (ω_{rn}). Она должна удовлетворять уравнению

$$\Delta(\omega_{rn}^2) = (\rho\omega_{rn}^2 - c_{44} k_n^2) \times \\ \times \left(P(P+4\pi) - \frac{\omega_{rn}^2}{(\gamma M_0)^2} \right) + e^2 k_n^2 P = 0. \qquad (47)$$

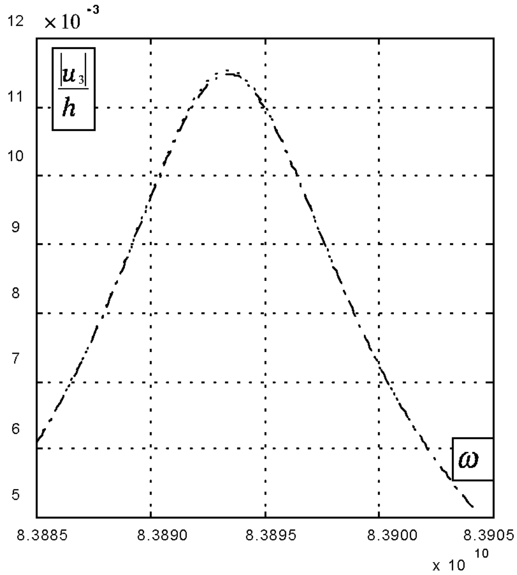

Рис. 1. Амплитудно-частотная зависимость для случая продольного намагничивания:
пунктир – численное решение;
штрих-пунктир – аналитическое решение

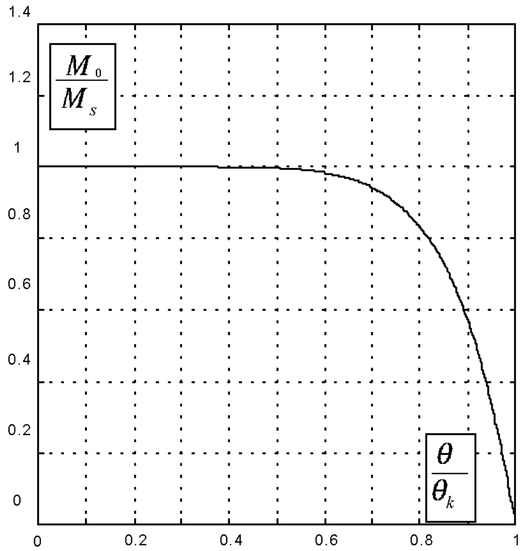

Рис. 2. Зависимость намагниченности насыщения от температуры (M_s – намагниченность насыщения при 0° C)

На рис. 1 представлены амплитудно-частотные характеристики при намагничивании в продольном направлении, рассчитанные методом Адамса–Моултона. Расчет был проведен также по аналитическим решениям. Как видно из графиков, результаты расчетов хорошо согласуются между собой (кривые практически накладываются одна на другую).

4. ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ

Для моделирования магнитной диссипации используем уравнение движения намагниченности с релаксационным членом в форме Гильберта. В случае пластинки, намагниченной в продольном направлении, учет магнитных потерь эквивалентен замене в уравнениях движения намагниченности действительной постоянной P на ее комплексный аналог [19] $P_c=P'-iP''$, где $P'=P$; $P''=\beta\omega/(\gamma M_0)$; $\beta=5\cdot 10^{-5}$. Усредненную за цикл диссипативную функцию запишем в виде суммы двух составляющих – механической и магнитной:

$$W = W^{el} + W^m. \tag{48}$$

Здесь

$$W^{el} = \frac{\omega c''_{44}}{2}({u'_{3,1}}^2 + {u''_{3,1}}^2), \tag{49}$$

а

$$W^m = \frac{\omega}{2}(h''_k m'_k - h'_k m''_k). \tag{50}$$

В соотношениях (49), (50)

$$\begin{aligned} u'_3 &= \mathbf{Re}\, u_3, \quad & u''_3 &= \mathbf{Im}\, u_3; \\ m'_k &= \mathbf{Re}\, m_k, \quad & m''_k &= \mathbf{Im}\, m_k; \\ h'_k &= \mathbf{Re}\, h_k, \quad & h''_k &= \mathbf{Im}\, h_k. \end{aligned} \tag{51}$$

Из выражений (46) находим, что

$$\begin{aligned} m'_{1n} &= \mathbf{Re}\, B_{1n}, \quad & m''_{1n} &= \mathbf{Im}\, B_{1n}; \\ m'_{2n} &= \mathbf{Re}\, B_{2n}, \quad & m''_{2n} &= \mathbf{Im}\, B_{2n}. \end{aligned} \tag{52}$$

Использовав соотношения (5), определим действительные и мнимые составляющие h_k, заметив что

$$\begin{aligned} h_1 &= h'_1 + ih''_1 = -(K+4\pi)m_1 - eu_{3,1} + h_0, \\ h_2 &= h'_2 + ih''_2 = -Km_2. \end{aligned} \tag{53}$$

Максимальный уровень температуры диссипативного разогрева будет иметь место, естественно, на резонансной частоте. Пренебрегая неоднородным обменом, легко получить аналитические решения как задачи (21), (22), так и задачи (37), (38) на резонансной частоте. Уравнение энергии запишется в виде

$$c\dot{\theta} = \lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + W, \tag{54}$$

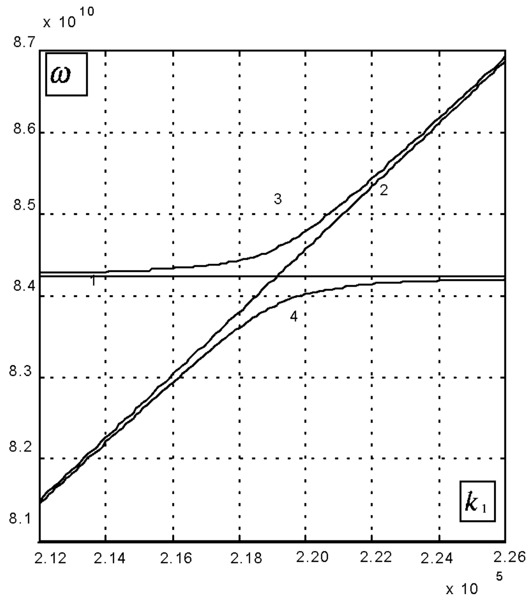

Рис. 3. Резонансный спектр для случая продольного намагничивания:
1 – несвязанные магнитные колебания;
2 – несвязанные механические колебания;
3, 4 – связанные магнитоупругие колебания

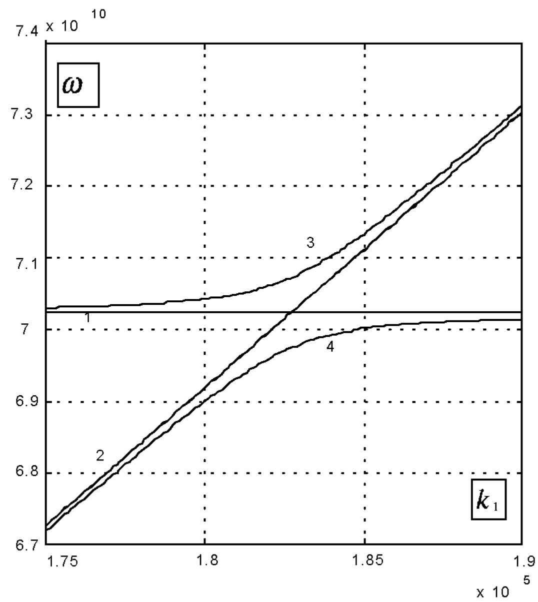

Рис. 4. Резонансный спектр для случая намагничивания в толщинном направлении:
1 – несвязанные магнитные колебания;
2 – несвязанные механические колебания;
3, 4 – связанные магнитоупругие колебания

где усредненная за цикл диссипативная функция

$$W = (W_n^{el} + W_n^m)\cos^2 k_n x_1 = \\ = \frac{W_n}{2}(1 + \cos 2k_n x_1). \tag{55}$$

Пусть на граничных поверхностях поддерживается постоянная температура θ_c. Тогда для определения усредненной за цикл температуры получим следующую граничную задачу:

$$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + W = 0, \tag{56}$$

$$\theta = \theta_c \quad \text{при} \quad x_1 = \pm h. \tag{57}$$

Учитывая симметрию задачи, ее решение можно записать в виде

$$\theta = -\frac{W_n}{2\lambda}\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{\cos 2k_n x_1}{4k_n^2}\right) + C, \tag{58}$$

где

$$C = \theta_c + \frac{W_n}{2\lambda}\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{\cos 2k_n h}{4k_n^2}\right) = \\ = \theta_c + \frac{W_n}{2\lambda}\left(\frac{h^2}{2} + \frac{1}{4k_n^2}\right).$$

Так как граничные условия симметричны, то максимальное значение температуры будет наблюдаться в плоскости $x_1 = 0$, т. е.

$$\theta_{\max} = \theta_c + \frac{W_n}{4\lambda}\left(h^2 + \frac{1}{k_n^2}\right). \tag{59}$$

Зависимость намагниченности насыщения от температуры выглядит так, как показано на рис. 2. Поэтому с достаточной точностью можно считать M_s постоянной до точки Кюри θ_k, а в самой точке Кюри положить $M_s = 0$, т. е. заменить реальный закон изменения $M_s(\theta)$ ступенчатым. При достижении температурой точки Кюри исчезает связь между механическими и магнитными полями и пьезомагнетик теряет свое функциональное назначение. В связи с этим достижение температурой диссипативного разогрева точки Кюри можно принять за критерий "разрушения" пьезоэлемента. Из формулы (59) находим, что $\theta - \theta_c = a$,

$$a = \theta_c + \frac{W_n}{2\lambda}\left(\frac{h^2}{2} + \frac{1}{4k_n^2}\right). \tag{60}$$

Значение параметра, при котором $\theta = \theta_k$, естественно принять за критическое значение, при котором магнитный материал перестает быть пьезоактивным: $a_{kr} = \theta_k - \theta_c$.

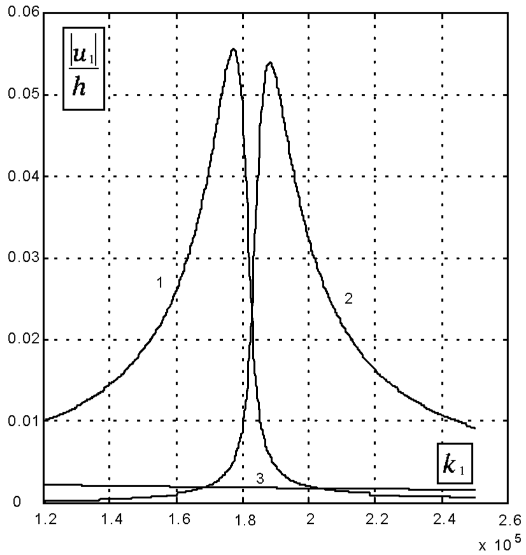

Рис. 5. Зависимость модуля комплексной обезразмеренной амплитуды смещения для случая толщинного намагничивания при движении по резонансным кривым:
1 – по кривой *4* рис. 4; *2* – по кривой *3* рис. 4; *3* – по кривой *2* рис. 4

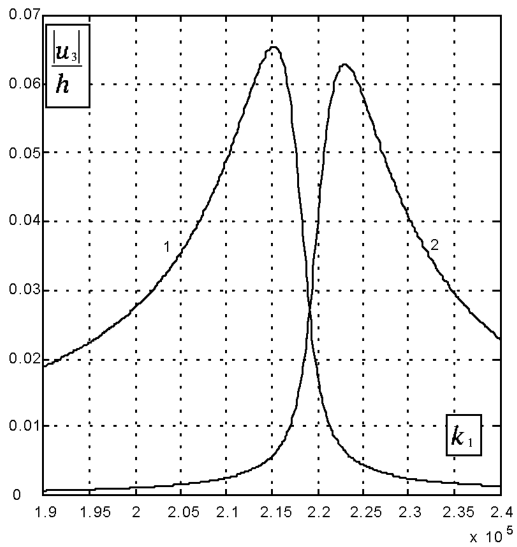

Рис. 6. Зависимость модуля комплексной обезразмеренной амплитуды смещения для случая продольного намагничивания при движении по резонансным кривым:
1 – по кривой *4* рис. 3; *2* – по кривой *3* рис. 3

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 3, 4 представлен резонансный спектр для пластинки, намагниченной в продольном направлении, и пластинки, намагниченной в толщинном направлении, соответственно. Резонансные частоты связанных магнитоупругих колебаний являются положительными действительными корнями частотного уравнения для случая продольного намагничивания:

$$(\omega^2-\omega_k^2)(\omega^2-c_t^2k^2)-\gamma_2 e^2k^2=0,$$

где $\gamma_2=\gamma^2M_0^2e^2Pk^2/\rho$, $\omega_k=\gamma M_0\sqrt{P(P+4\pi)}$. Для случая намагничивания в толщинном направлении соответствующее частотное уравнение запишется в виде

$$(\omega\mp\omega_s)(\omega^2-c_t^2k^2)\mp\gamma_2c_t^2k^2=0,$$

где верхний знак соответствует положительной поляризации, а нижний – отрицательной, $c_t=\sqrt{c'_{44}/\rho}$; $\omega_s=\gamma PM_0$, $\gamma_1=\gamma eM_0/c'_{44}$. Резонансный спектр рассчитывался в районе точки перекрытия – точки пересечения резонансных кривых несвязанных магнитной и механической подсистем (на рисунках обозначены цифрами *1* и *2* соответственно). Для случая продольного намагничивания каждому значению $k_1=\pi/(2h)$ соответствуют две резонансных частоты. Точка перекрытия делит каждую резонансную кривую на две полуветви, которые можно условно назвать полуветвями квазиспинового и квазиупругого резонанса соответственно. Естественно ожидать, что по мере приближения резонансной кривой к одной из линий, соответствующих несвязанному упругому или магнитному резонансу, будет увеличиваться вклад той или иной подсистемы на значения определяемых полевых величин. Резонансная частота несвязанных спиновых колебаний, обозначенная на графиках кривой *1*, для случая продольного намагничивания примерно в 1.2 раза больше, чем для случая намагничивания в толщинном направлении ($\omega_s=8.3893\cdot10^{10}$ Гц и $\omega_s=7.0237\cdot10^{10}$ Гц). Частотный интервал $\Delta\omega$ между ветвями в окрестности точки перекрытия для касательного намагничивания составляет $6.9402\cdot10^8$ Гц, а для поперечного намагничивания – $9.8150\cdot10^8$ Гц. На рис. 4 резонансная кривая *3* соответствует колебаниям с отрицательной поляризацией. Она практически совпадает с прямой упругого резонанса. На рис. 5 представлена зависимость амплитуды смещения для случая намагничивания в толщинном направлении в окрестности точки перекрытия. Как следует из графика, амплитуда напряжения на частотах, соответствующих колебаниям с отрицательной поляризацией, мала по сравнению с другими. Максимальное влияние взаимодействия вяз-

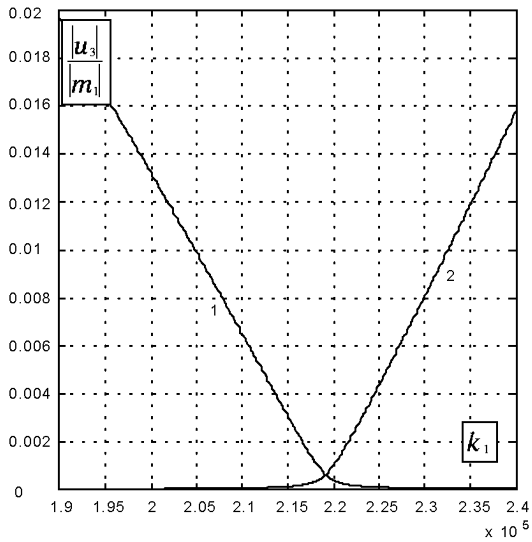

Рис. 7. Отношение модулей комплексных смещений и намагниченности для случая продольного намагничивания при движении по резонансным кривым:
1 – по кривой *4* рис. 3; *2* – по кривой *3* рис. 3

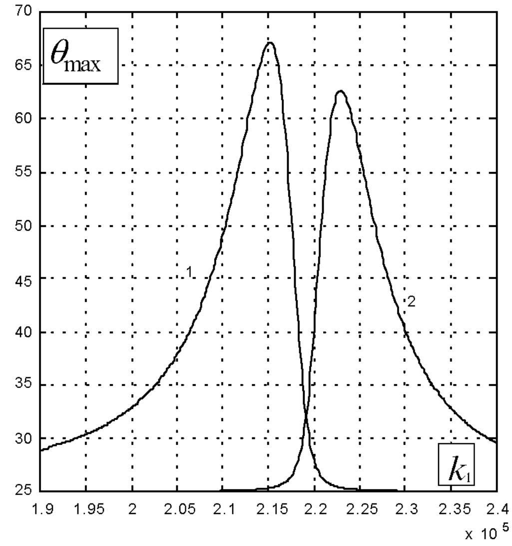

Рис. 8. Максимальная температура для случая продольного намагничивания при движении по резонансным кривым:
1 – по кривой *4* рис. 3; *2* – по кривой *3* рис. 3

коупругой и спиновой составляющих наблюдается в районе точки перекрытия, когда значения амплитуды для обеих резонансных частот становятся практически равными. На рис. 6 представлена зависимость модуля комплексной амплитуды смещения от собственного числа k_1 при движении по резонансным кривым для случая продольного намагничивания (кривая *1* соответствует движению по нижней ветви, кривая *2* – движению по верхней ветви, см. рис. 3). На рис. 7 показана зависимость отношения абсолютных значений амплитуд перемещения и намагничивания для рассматриваемого случая. Как и ожидалось, по мере приближения к соответствующей полуветви растет влияние магнитной или механической подсистем на связанные колебания.

На рис. 8 показана зависимость максимальной температуры от размеров пластинки при движении по резонансным кривым для случая продольного намагничивания. Максимальное значение температуры наблюдается в окрестности точки перекрытия, где в наибольшей степени проявляется взаимодействие магнитной и механической подсистем.

На рис. 9 представлено сравнение абсолютного значения амплитуды напряжения в случае, когда гиромагнитным эффектом можно пренебречь, и случая продольного намагничивания. Как следует из графика, по мере удаления от точки перекрытия значения полевых величин, вычисленные как с учетом гиромагнитного эффекта, так и без него, практически совпадают. Все вычисления проводились при значениях $H_0=3.9$ Кэ, $h_0=20$ э, $\operatorname{tg}\delta=2.5\cdot10^{-5}$, $\lambda=0.074$ Вт/(см·К), $\theta_c=25°$С. Для численного анализа использовался метод Адамса–Моултона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена постановка задачи о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве предварительно намагниченного до насыщения ферромагнитного слоя с учетом неоднородного обмена, гиромагнитных и диссипативных эффектов. Рассматриваются два варианта предварительного намагничивания до насыщения – в толщинном и продольном направлениях. Магнитные и механические свойства материала предполагаются независящими от температуры. Мощность источников тепла в уравнении энергии равна усредненной за цикл магнитомеханической мощности.

Для случая, когда неоднородным обменом можно пренебречь, получены аналитические и численные решения обеих задач. Рассчитаны амплитудно- и температурно-частотные характеристики термомеханических колебаний ферромагнитного слоя.

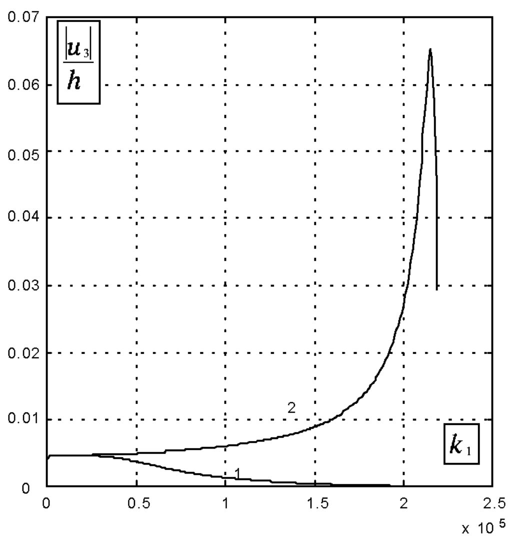

Рис. 9. Зависимость модуля комплексной обезразмеренной амплитуды смещения для случая продольного намагничивания при движении по резонансной кривой *4* рис. 3:

1 – без учета гиромагнитного эффекта;
2 – с учетом гиромагнитного эффекта

Дана оценка влияния гиромагнитного эффекта на эти характеристики. Анализ конкретных числовых результатов показывает, что взаимодействие магнитных и механических полей оказывается существенным лишь в окрестности так называемых точек перекрытия, в которых несвязанные спиновые и упругие ветви резонансных кривых пересекаются, т.е. магнитные и упругие колебания имеют одинаковые частоты и толщины. Вне области точек перекрытия механические и магнитные поля можно рассматривать без учета магнитомеханического взаимодействия, а источник тепла в уравнении энергии считать равным сумме источников, порожденных магнитными и механическими потерями.

Предложено простое выражение для температуры диссипативного разогрева при вынужденных колебаниях на резонансных частотах. В качестве критического параметра нагружения принято ее значение, при котором температура достигает точки Кюри.

1. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелитминский С. Т.* Спиновые волны.– М.: Наука, 1967.– 304 с.
2. *Барьяхтар В. Г., Сукстанский А. Л., Мелихов Е. Ю.* Релаксация солитонов в антиферромагнетиках // Ж. эксперимент. и теор. физ.– 1997.– **111**, N 5.– С. 1633–1650.
3. *Бучельников В. Д., Васильев А. И.* Электромагнитное возбуждение ультразвука в ферромагнетиках // Успехи физич. наук.– 1992.– **162**, N 3.– С. 89–126.
4. *Tani J., Takagi T., Qin J.* Intelligent material systems // Appl. Mech. Rev.– 1998.– **51**, N 8.– P. 505–521.
5. *Такер Дж., Ремптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела.– М.: Мир, 1975.– 450 с.
6. *Rogers G. A.* Intelligent material systems.– The Dawn of a New Materials Age // J Intel. Mater. Syst. and Struct..– 1993.– **4**, January.– P. 4–12.
7. *Clark A. E.* Magnetostrictive materials.– Elsevier Sci., North-Holland, 1992.
8. *Карнаухов В. Г.,Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость / Механика связанных полей в элементах конструкций (в 5-ти томах).– Т. 4.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с.
9. *Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П.* Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел.– К.: Наук. думка, 1990.– 394 с.
10. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В., Франовский А. Ц.* Развитие теории определяющих уравнений физически нелинейных вязкоупругих тел при циклической деформации // Прикл. мех.– 1996.– **32**, N 10.– С. 46–51.
11. *Михайленко В. В.* Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических процессах // Прикл. мех.– 1996.– **32**, N 12.– С. 37–42.
12. *Михайленко В. В.* К теории амплитудных определяющих уравнений физически нелинейных неупругих пьезоэлектрических тел при моногармоническом нагружении // Прикл. мех.– 1997.– **33**, M 8.– С. 46–48.
13. *Карнаухов В. Г., Лелюх Ю. И.* К постановке задачи о резонансных колебаниях и диссипативном разогреве пьезомагнитных керамических тел // Прикл. мех.– 1998.– **34**, N 9.– С. 3–8.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред / Теоретическая физика (в 10-ти томах).– Т. 8.– М.: Наука, 1992.– 460 с.
15. *Baryakhtar I. V., Baryakhtar V. G.* A motion equation for magnetization: Dynamics and relaxation // Укр. фiз. ж.– 1998.– **43**, N 11.– С. 1433–1448.
16. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред.– М.: Мир, 1991.– 560 с.
17. *Сыркин Л. Н.* Пьезомагнитная керамика.– Л.: Энергия, 1980.– 208 с.
18. *Гуляев Л. Г., Зильберман П. Е.* Магнитоупругие волны в пластинах и пленках ферромагнетиков // Изв. вузов. Физика.– 1984.– N 11.– С. 6–23.
19. *Гуревич Л. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны.– М.: Наука, 1994.– 462 с.
20. *Tiersten H. F.* Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators // J. Math. phys.– 1964.– **5**, N 9.– P. 1298–1318.
21. *Штраусс В.* Магнитоупругие свойства иттриевого феррита-граната // Физическая акустика.– Т. 4, часть Б.– М.: Мир, 1970.– С. 247–316.
22. *Tiersten H. F.* Thickness vibrations of saturated magnetoelastic plates // J. Appl. phys.– 1965.– **36**, N 7.– P. 2250–2259.