

УДК 539.3

СОПРЯЖЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛАХ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ

А. Ф. УЛИТКО

Национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев

Получено 18.03.99

На основе обобщения теории разряда конденсаторов Ромпе–Вайцеля сформулированы краевые задачи нестационарного деформирования пьезокерамических тел при электрическом разряде. Проведен детальный анализ волнового поля в цилиндрическом искровом генераторе при разряде. Изучены закономерности изменения импульсного тока и разности электрических потенциалов в процессе разряда и в последующие моменты времени. Дано сопоставление результатов, полученных на основе обобщения теории разряда конденсаторов, с результатами, полученными ранее при использовании теории мгновенного разряда.

На основі узагальнення теорії розряду конденсаторів Ромпе–Вайцеля сформульовано крайові задачі нестационарного деформування п'єзокерамічних тіл при електричному розряді. Проведено детальний аналіз хвильового поля у циліндричному іскровому генераторі при розряді. Вивчено закономірності зміни імпульсного струму та різниці електричних потенціалів у процесі розряду і в наступні моменти часу. Дано співставлення результатів, які отримані на основі узагальнення теорії розряду конденсаторів, з результатами, що були отримані раніше при застосуванні теорії миттєвого розряду.

Boundary problems on the nonstationary deformation of piezoceramic bodies at the electric discharge have been formulated on base of generalization of the theory of condensor's discharge by Rompe–Weizel. The detailed analysis of wave field in the cylindrical spark generator has been held out. The trends have been investigated that depict the changes in the pulse current and difference of electric potentials under the discharge process and afterwards. There has been presented the comparison of the results obtained on base of generalization of the theory of condensor's discharge and the earlier results obtained using the theory of instant discharge.

ВВЕДЕНИЕ

Высокий уровень электромеханического преобразования энергии в современных составах пьезоэлектрических керамик открывает возможность использования элементов из них в качестве импульсных (искровых) генераторов энергии [1]. При этом подвод энергии от внешнего источника для возбуждения электрического разряда можно проводить как путем квазистатического, так и динамического (ударного) механического нагружения. В случае многоэлектродных пьезокерамических структур подвод энергии может осуществляться также электрическим путем. Для всех указанных способов нагружения пьезокерамического тела при достижении разностью потенциалов на поверхностных (внутренних) электродах пробойного значения в подключенной к ним внешней электрической цепи происходит электрический разряд. Малая длительность разряда, измеряемая наносекундами, приводит к весьма существенной динамической реакции керамического тела, а иногда и к его разрушению [2]. Такая реакция керамического тела на электрический разряд объясняется практически мгновенным высвобождением почти половины внутренней энергии, запасенной в объеме тела перед разрядом. Динамическое состояние

керамического тела вслед за разрядом характеризуется сложной картиной возникновения и распространения сопряженных электроупругих волн в объеме тела. По сравнению с классическими задачами динамической теории упругости, в данном случае волновое поле существенно усложняется вследствие более сложных зависимостей взаимного превращения различных типов волн при отражении от границы тела.

В работах автора и его учеников [3–5] были изучены отдельные задачи такого класса на основе теории мгновенного электрического разряда. При этом внимание концентрировалось на вычислении энергии разряда и формировании сопряженного волнового поля при разряде. Ясно, что в рамках предположения о мгновенном разряде всегда будут иметь место конечные скачки механических напряжений и напряженности поля на фронтах волн. Если же учесть сколь угодно малую по сравнению со временем прохождения волнами характерных размеров тела ненулевую продолжительность разряда, то волновые импульсы будут иметь конечную крутизну. Поскольку динамическая прочность хрупких тел с дефектами, в том числе и пьезокерамических тел, при ударном нагружении зависит не только от интенсивности импульсов нагружения, но и от их крутизны [6], то необходимо

внести уточнения в разработанную ранее теорию мгновенного разряда. Такая попытка с использованием теории электрического разряда конденсаторов Ромпе – Вайцеля [7] была предпринята в монографии [8]. Однако завершённое решение с детальным анализом в монографии [8] не было представлено. Ниже приводится полный анализ задачи о разряде пьезокерамического цилиндрического генератора по теории Ромпе – Вайцеля. Дается полная формулировка краевых задач динамической электроупругости для тел произвольной геометрии, отражающая реальные условия электрического разряда.

1. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В продолжение исследований, представленных в [8], изучим процесс разряда пьезокерамического цилиндра при статическом сжатии монотонно возрастающими равномерно распределенными на торцах осевыми напряжениями σ_z (рис. 1). Предполагается, что $a/h \ll 1$, и расчет сопряженного поля в цилиндре с высокой степенью точности можно проводить по одномерной элементарной стержневой теории, а сопротивление во внешней электрической цепи определяется лишь сопротивлением разрядника R_i . По достижении сжимающими напряжениями критического значения $\sigma_z = -\sigma_0$ разность электрических потенциалов между электродами $2V_0$ становится равной пробойному значению для разрядника во внешней цепи. Принимая $t=0$ за начальный момент разряда, процесс разряда и волновое поле в цилиндре можно точно описать, если будет известен закон изменения разности потенциалов между электродами $2V(t)$ или же закон накопления зарядов на электродах $\pm Q(t)$ при $t \geq 0$. Следует заметить, что для простых конденсаторов с постоянной емкостью C_0 суммарный заряд на каждой из обкладок конденсатора пропорционален разности потенциалов [9]:

$$Q(t) = 2C_0 V(t). \quad (1)$$

Ток смещения между обкладками конденсатора, равный току проводимости во внешней цепи разрядника, согласно выражению (1), определяется равенством

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -2C_0 \frac{dV(t)}{dt}. \quad (2)$$

Ясно, что при разработке любой теории разряда конденсаторов с постоянной емкостью C_0 необ-

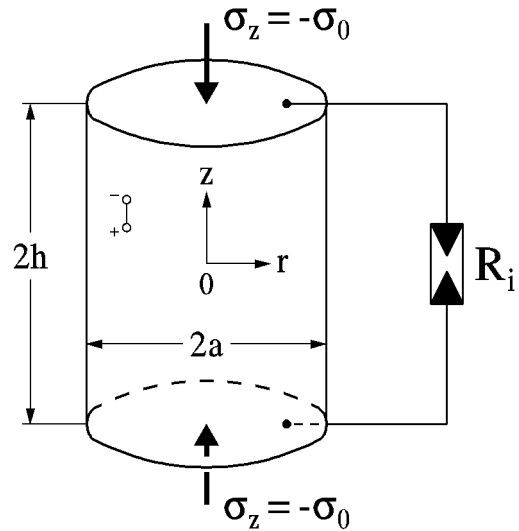


Рис. 1. Статически сжимаемый пьезокерамический цилиндр с разрядником во внешней цепи

ходимо использовать условие непрерывности тока в замкнутой цепи (2). Рассматривая пьезоцилиндр как емкостной элемент, следует учитывать, что его емкость не является постоянной величиной. Она зависит от деформированного состояния элемента и в приближении метода эквивалентных схем [10] определяется через статическую и динамическую составляющие. Вследствие этого при учете деформированного состояния пьезоэлементов равенство (2) не является справедливым. Более того, при точных вычислениях с использованием полевой теории явления пьезоэффекта в керамических телах, зависимость тока $I(t)$ от скорости изменения разности потенциалов между электродами $\dot{V}(t)$ не представляется в виде равенства (2), даже если емкость C_0 принимать зависящей от времени t . Поэтому при разработке теории электрического разряда пьезокерамических тел необходимо в каждом конкретном случае устанавливать зависимость тока проводимости $I(t)$ от изменения разности потенциалов между электродами $V(t)$. Как будет видно из последующего изложения, установить такую зависимость можно лишь в процессе решения полной краевой задачи динамической электроупругости.

Возвращаясь к описанной выше задаче о продольном сжатии пьезоцилиндра (см. рис. 1), урав-

нения пьезоэффекта запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T E_z + d_{33} \sigma_z, & E_z &= -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

В приведенных равенствах использованы общепринятые обозначения для полевых характеристик: u_z – перемещения точек цилиндра в направлении оси поляризации Oz ; ε_z – осевая деформация; σ_z – осевые напряжения; E_z и D_z – осевые компоненты вектора электрической напряженности и индукции соответственно; ψ – электростатический потенциал; и электрофизических постоянных материала: s_{33}^E – податливость материала при постоянном (нулевом) значении электрического поля; ε_{33}^T – диэлектрическая проницаемость при постоянном (нулевом) значении механических напряжений; d_{33} – продольный пьезомодуль керамического материала [8].

Замкнутую систему уравнений полевой теории получаем, дополнив уравнения (3) уравнением движения элемента сплошной среды и уравнением вынужденной электростатики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность керамического материала. Посредством простых преобразований дифференциально-алгебраические равенства (3) и (4) сводятся к системе дифференциальных уравнений относительно перемещений u_z и потенциала ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $k_{33}^2 = d_{33}^2 / (s_{33}^E \varepsilon_{33}^T)$ – продольный коэффициент электромеханической связи;

$$c = \frac{1}{(\sqrt{\rho s_{33}^E (1 - k_{33}^2)})}$$

– скорость сопряженных продольных волн. Механические напряжения σ_z и осевая компонента индукции D_z вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{s_{33}^E} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + d_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \\ D_z &= -\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6)$$

В момент времени, предшествующий электрическому разряду, внешняя электрическая цепь разомкнута и в пьезоцилиндре имеет место однородное электроупругое состояние. Оно вычисляется непосредственно из уравнений состояния (3) и описывается следующими значениями для полевых характеристик:

$$\begin{aligned} u_z^{(0)} &= -s_{33}^E (1 - k_{33}^2) \sigma_0 z, & \sigma_z &= -\sigma_0, \\ \psi^{(0)} &= -\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0 z, & E_z^{(0)} &= \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0, & D_z^{(0)} &= 0, \\ 2V_0 &= \psi^{(0)}|_{z=-h} - \psi^{(0)}|_{z=h} = 2 \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \sigma_0 h. \end{aligned} \quad (7)$$

В процессе разряда для моментов времени $t \geq 0$ происходит изменение разности потенциалов между торцевыми электродами цилиндра, и на электродах накапливаются свободные заряды. Естественно, их значения не могут быть найдены без учета сопротивления искрового промежутка $R_i(t)$. Однако зависимость между плотностью свободных зарядов на электродах и разностью электрических потенциалов в процессе разряда всецело определяется динамическим поведением пьезоцилиндра и не зависит от характеристики искрового промежутка, т. е., как и для конденсатора постоянной емкости, имеет место зависимость типа (1). Обозначим неизвестные значения разности электрических потенциалов через $2V(t)$, а плотности зарядов – через $D(t)$. Если предположить, что за время разряда сжимающие напряжения на торцах цилиндра не изменяются, то для определения сопряженного электроупругого поля в цилиндре необходимо проинтегрировать уравнения движения (5) при следующих граничных условиях, выполняющихся при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=\pm h} &= -\sigma_0, \\ \psi|_{z=-h} - \psi|_{z=h} &= 2V(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что $V(0) = V_0 = \sigma_0 h d_{33} / \varepsilon_{33}^T$.

Корректной будет также формулировка граничных условий для времен $t \geq 0$ в виде

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=\pm h} &= -\sigma_0, \\ D_z|_{z=\pm h} &= D(t), \\ D(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя преобразование Лапласа [11]

$$\begin{aligned} \bar{u}_z(z, s) &= \int_0^\infty u_z(z, t) e^{-st} dt, \\ \bar{\psi}(z, s) &= \int_0^\infty \psi(z, t) e^{-st} dt, \end{aligned} \quad (10)$$

и учитывая начальные условия для перемещений u_z из (7), решение уравнений (5) в области изображений запишем как

$$\begin{aligned} \bar{u}_z &= -\frac{1}{s} s^E_{33} (1 - k_{33}^2) \sigma_0 z + a(s) \operatorname{sh}(sz/c), \\ \bar{\psi} &= c(s)z + \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \bar{u}_z. \end{aligned} \quad (11)$$

При записи решения (11) было учтено, что перемещения u_z и потенциал ψ являются нечетными функциями координаты z . Плотности $a(s)$ и $c(s)$ определяются из граничных условий с использованием решения для напряжений $\bar{\sigma}_z$ и индукции \bar{D}_z :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= -\frac{1}{s} \sigma_0 + \frac{d_{33}}{s^E_{33}} c(s) + \\ &+ \frac{1}{s^E_{33} (1 - k_{33}^2)} \frac{s}{a} a(s) \operatorname{ch}(sz/c), \\ \bar{D}_z &= -\varepsilon^T_{33} (1 - k_{33}^2) c(s). \end{aligned} \quad (12)$$

Решение задачи будет иметь более простой вид, если использовать граничные условия (9), т.е. электрическое условие при задании зарядов на торцах цилиндра:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^T_{33} (1 - k_{33}^2) c(s) &= \bar{D}(s) = \int_0^\infty D(t) e^{-st} dt, \\ \frac{s}{a} a(s) \operatorname{ch}(sh/c) &= \frac{d_{33}}{s^E_{33}} \bar{D}(s). \end{aligned} \quad (13)$$

В конечном счете решение для перемещений и потенциала в области изображений находится по формулам (11). В частности, для выходной разности потенциалов получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^T_{33} (1 - k_{33}^2)}{2h} 2\bar{V}(s) &= d_{33} (1 - k_{33}^2) \frac{\sigma_0}{s} + \\ + \bar{D}(s) - k_{33}^2 \bar{D}(s) \frac{\operatorname{th}(sh/c)}{sh/c}. \end{aligned} \quad (14)$$

Не имея явного выражения для $\bar{D}(s)$, обращение записанного равенства выполним с использованием

теоремы о свертке [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^T_{33} (1 - k_{33}^2)}{2h} 2V(t) &= d_{33} (1 - k_{33}^2) \sigma_0 + \\ + D(t) - k_{33}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D(s) \frac{\operatorname{th}(sh/c)}{sh/c} e^{st} ds &= \\ = d_{33} (1 - k_{33}^2) \sigma_0 + D(t) - k_{33}^2 \frac{c}{h} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \times \\ \times \int_0^t D(u) \left[H\left(t - u - \frac{2kh}{c}\right) - \right. \\ \left. - H\left(t - u - \frac{2(k+1)h}{c}\right) \right] du. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $H(x)$ – функция Хевисайда. На временном отрезке, соответствующем первому прохождению волн ($0 < ct < 2h$), из бесконечной суммы интегралов в (15) отличным от нуля будет лишь слагаемое с $k=0$. Зависимость между выходной разностью потенциалов и плотностью свободных зарядов на электродах представляется равенством

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^T_{33} (1 - k_{33}^2)}{2h} 2V(t) &= d_{33} (1 - k_{33}^2) \sigma_0 + \\ + D(t) - k_{33}^2 \frac{c}{h} \int_0^t D(u) du. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку суммарный заряд на электроде радиуса r равен $\pi r^2 D(t)$, а $\varepsilon^T_{33} (1 - k_{33}^2) \pi r^2 / (2h) = C_0$ представляет собой емкость “заятого пьезоцилиндра”, то из соотношения (16) находим

$$\begin{aligned} 2C_0 V(t) &= d_{33} (1 - k_{33}^2) \sigma_0 \pi r^2 + \\ + Q(t) - k_{33}^2 \frac{c}{h} \int_0^t Q(u) du. \end{aligned} \quad (17)$$

Это выражение является обобщением элементарного равенства (1) для конденсаторов постоянной емкости на случай деформируемого пьезоцилиндра. Обращая равенство (17) через дифференциальное уравнение первого порядка, получаем

$$Q(t) = 2C_0 e^{k_{33}^2 ct/h} \int_0^t \dot{V}(\xi) e^{-k_{33}^2 c\xi/h} d\xi. \quad (18)$$

Для тока смещения, протекающего через сквозное

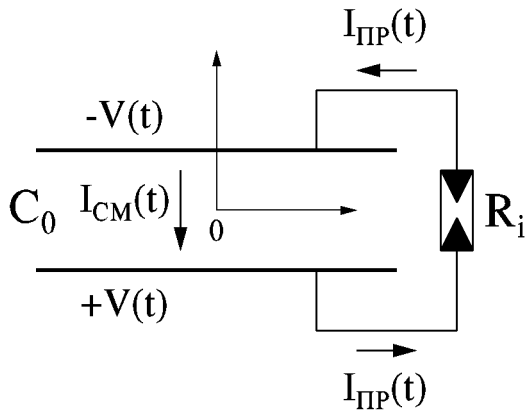


Рис. 2. К теории разряда электрических конденсаторов

сечение цилиндра, находим

$$I(t) = -\dot{Q}(t) = -2C_0 \left[\dot{V}(t) + k_{33}^2 \frac{c}{h} e^{k_{33}^2 ct/h} \int_0^t \dot{V}(\xi) e^{-k_{33}^2 c\xi/h} d\xi \right]. \quad (19)$$

Сопоставление этого равенства с равенством (2) показывает, что даже для весьма малой продолжительности разряда ($ct/h \ll 1$) формулу для тока простого конденсатора (2) можно использовать лишь при выполнении дополнительного условия

$$k_{33}^2 \frac{c}{h} \frac{V(t) - V(0)}{\dot{V}(t)} \ll 1. \quad (20)$$

В заключение этого раздела запишем решение для напряжений $\sigma_z(z, t)$. Беря обратное преобразование Лапласа от первого равенства из соотношений (12), в котором функция $a(s)$ представлена вторым равенством (13), находим

$$\begin{aligned} \sigma_z(z, t) = & -\sigma_0 - \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} D(t) + \\ & + \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \\ & \times \left[D\left(t - \frac{2(k+1)h \pm z}{c}\right) H\left(t - \frac{2(k+1)h \pm z}{c}\right) + \right. \\ & \left. + D\left(t - \frac{2(k+1)h \pm z}{c}\right) H\left(t - \frac{2(k+1)h \pm z}{c}\right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для периода первого прохождения волн вдоль цилиндра ($0 < ct < 2h$) в сумме остается лишь нулевой член ряда.

2. ТЕОРИЯ РАЗРЯДА РОМПЕ – ВАЙЦЕЛЯ

Если разность потенциалов между обкладками конденсатора $2V_0$ достигает пробойного значения для разрядника R_i во внешней цепи, то на протяжении весьма короткого промежутка времени $0 < t < t_p$ в плазме искрового промежутка будет протекать ток большой интенсивности. Ток проводимости $I_{IP}(t)$ во внешней цепи согласно закону Ома находится по формуле

$$I_{IP}(t) = I(t) = \frac{2V(t)}{R_i(t)}, \quad (22)$$

где, как указывалось выше, $R_i(t)$ – сопротивление в плазме искрового промежутка (рис. 2). Равный по величине ток смещения, протекающий через конденсатор, вычисляется по формуле (2), т.е.

$$I_{CM}(t) = I(t) = -2C_0 \dot{V}(t). \quad (23)$$

Сопротивление в плазме искрового промежутка $R_i(t)$ зависит от многих факторов и, в первую очередь, от величины тока в искровом шнуре. Это весьма сложное физическое явление для разрядов с малой энергией приближенно можно описать с помощью теории Ромпе – Вайцеля [7]. Суть упомянутой теории состоит в том, что удельная проводимость Y (среднее значение проводимости на единицу площади поперечного сечения искрового шнура) принимается пропорциональной плотности внутренней энергии U в плазме разряда:

$$Y = \frac{\alpha U}{p}, \quad (24)$$

где p – давление в газовой среде (воздухе); α – постоянная характеристика среды, независящая от давления. Сопротивление $R_i(t)$ вычисляется по формуле

$$R_i(t) = \frac{l}{\pi r_*^2 Y}. \quad (25)$$

Здесь l – длина искрового промежутка; r_* – радиус искрового шнура.

Для установления связи между током в разряднике Y и плотностью внутренней энергии U используется уравнение энергетического баланса. Пренебрегая потерями энергии на световое излучение и образование ударных волн, тепловыделение q на единицу длины искрового промежутка определяется по формуле

$$q = \frac{I^2(t)}{\pi r_*^2 Y(t)}. \quad (26)$$

Тогда балансовое уравнение приобретает вид

$$\frac{d}{dt}(\pi r_*^2 U) = \frac{I^2(t)}{\pi r_*^2 Y(t)}. \quad (27)$$

С учетом соотношения (24) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{r_* I^2(t)}{\alpha \pi r_*^2 U} &= \frac{d}{dt}(\pi r_*^2 U), \\ R_i(t) &= \frac{p l}{\alpha \pi r_*^2 U}. \end{aligned} \quad (28)$$

Первое из этих равенств совместно с уравнениями (22) и (23) образует полную нелинейную систему уравнений относительно трех неизвестных величин $I(t)$, $V(t)$ и $U(t)$. Преобразуем эти уравнения к безразмерному виду, вводя безразмерное “быстрое” время τ по формуле

$$t = \tau T, \quad T = \frac{p l^2}{2\alpha V_0^2}, \quad (29)$$

и полагая

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= \frac{V(\tau)}{V_0}, \quad \eta(\tau) = \frac{l \pi r_*^2 U(\tau)}{2C_0 V_0^2}, \\ \zeta(\tau) &= \frac{I(\tau) T}{2C_0 V_0}. \end{aligned} \quad (30)$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) &= \xi(\tau)\eta(\tau), \quad \dot{\zeta}(\tau) = -\frac{d\xi}{d\tau}, \\ \eta \frac{d\eta}{d\tau} &= 2\zeta^2(\tau). \end{aligned} \quad (31)$$

Сопротивление искрового промежутка вычисляется по формуле

$$R_i(\tau) = \frac{T}{C_0 \eta(\tau)}. \quad (32)$$

Нелинейная система уравнений (31) допускает точное решение в неявной форме $\tau = \tau(\xi)$. При этом следует учитывать, что

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau} = -\zeta(\tau) \frac{d}{d\xi}. \quad (33)$$

В результате, из последнего уравнения (31) находим

$$\zeta = -\frac{1}{2} \eta \frac{d\eta}{d\xi}, \quad (34)$$

а из первого уравнения (31) получаем простое дифференциальное уравнение для функции $\eta(\tau)$:

$$\frac{d\eta}{d\xi} + 2\xi = 0. \quad (35)$$

В соответствии с заменами (30) начальные условия для системы уравнений (31) формулируются в виде

$$\xi(0) = 1, \quad \eta(0) = \zeta(0) = 0. \quad (36)$$

Однако при сформулированных начальных условиях система (31) не имеет ограниченного решения. Объясняется это тем, что для возникновения процесса разряда необходимо затратить часть энергии конденсатора для формирования плазменного шнура. Поэтому фактически начало процесса разряда происходит при значении разности потенциалов чуть ниже установленного ранее пробойного значения $2V_0$, т.е.

$$\xi(0) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (37)$$

Для воздуха при нормальных атмосферных условиях и пробойном значении разности электрических потенциалов порядка $10 \div 20$ кВ справедлива оценка $\varepsilon \simeq 0.01$.

Последовательно решая уравнения (35) и (34), находим

$$\eta = 1 - \xi^2, \quad \zeta = \xi(1 - \xi^2). \quad (38)$$

После этого из второго уравнения (31) получаем

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi(1 - \xi^2). \quad (39)$$

Решение этого уравнения при начальном условии (37) приводит к равенству

$$\xi(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2\tau}}}. \quad (40)$$

Соответственно, из (38) находим

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon + e^{-2\tau}}, \\ \zeta(\tau) &= \frac{\varepsilon e^{-\tau}}{(\varepsilon + e^{-2\tau})^{3/2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Учитывая замены (30), для изменения потенциалов на обкладках конденсатора и тока в цепи при разряде получаем решение

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{V_0} &= \frac{e^{-t/T}}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T}}}, \\ I(t) &= \frac{2C_0 V_0}{T} \frac{\varepsilon e^{-t/T}}{(\varepsilon + e^{-2t/T})^{3/2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Анализ этого решения будет дан ниже.

3. ФОРМИРОВАНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ПЬЕЗОЦИЛИНДРЕ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ

При выводе формул общего решения нестационарной задачи для пьезокерамического цилиндра (см. раздел 1) внимание акцентировалось на формуле (19), т. е. на зависимости тока смещения от скорости изменения разности потенциалов между торцевыми электродами. Только различие формул типа (19) и (23) разнятся между собой теории разряда пьезокерамических тел и простых конденсаторов. Если перейти в формуле (19) к “быстро” безразмерному времени τ и безразмерным величинам для тока и потенциала согласно (30), то она преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & - \left[\frac{d\xi}{d\tau} + k_{33}^2 \frac{cT}{h} e^{k_{33}^2 \frac{cT}{h} \tau} \times \right. \\ & \left. \times \int_0^\tau \frac{d\xi}{dx} e^{-k_{33}^2 \frac{cT}{h} x} dx \right] = \\ = & - \left[\frac{d\xi}{d\tau} + k_{33}^2 \frac{cT}{h} \left(\xi(\tau) - \xi(0) e^{k_{33}^2 \frac{cT}{h} \tau} \right) + \right. \\ & \left. + k_{33}^4 \left(\frac{cT}{h} \right)^2 e^{k_{33}^2 \frac{cT}{h} \tau} \int_0^\tau \xi(x) e^{-k_{33}^2 \frac{cT}{h} x} dx \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

При использовании теории разряда Ромпе-Вайцеля с заменой второго уравнения (31) на (43) не представляется возможным построение точного решения нелинейных уравнений этой теории. Однако есть все основания предполагать, что для малой (наносекундной) продолжительности электрического разряда емкость керамического тела остается практически неизменной, и решение с высокой степенью точности можно получить по теории разряда конденсаторов. Чтобы убедиться в этом, необходимо доказать, что второе и третье слагаемые в выражении (43) являются пренебрежимо малыми по сравнению с $\xi(\tau)$, т. е. что справедливо неравенство (20). В безразмерных переменных последнее принимает вид

$$k_{33}^2 \frac{cT}{h} \frac{\xi(\tau) - 1}{\xi(\tau)} \ll 1. \quad (44)$$

В качестве примера выполним численные расчеты для цилиндра из пьезокерамики PZT-4 [8] длиной $2h=1$ см и радиусом $r=0.25$ см. Длину искрового промежутка выбираем равной $l=0.4$ см. Характеристики внешней среды (воздуха) [12]: $\alpha=10$ Н/(с·В²), $p=10^5$ Н/м². Пробойное значение разности потенциалов для выбранной длины искрового промежутка $2V_0=12 \cdot 10^3$ В,

$\sigma_0=478 \cdot 10^5$ Н/м², коэффициент электромеханической связи $k_{33}^2 \simeq 0.5$, скорость продольных волн в пьезоцилиндре $c=4148$ м/с², а параметр $\varepsilon=0.01$. При этих условиях характерное время разряда T , емкость “зажатого” пьезоцилиндра C_0 и безразмерный параметр cT/h принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} T &= \frac{pl^2}{2\alpha V_0^2} \simeq 2.2 \cdot 10^{-9} \text{ с}, \\ C_0 &= \frac{\varepsilon_{33}^2 (1-k_{33}^2) \pi r^2}{2h} \simeq 11.3 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}, \\ \frac{cT}{h} &\simeq 1.8 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (45)$$

Благодаря малости значения параметра cT/h по сравнению с единицей удается наметить путь решения задачи об электрическом разряде сжатого пьезоцилиндра с использованием метода последовательных приближений. За нулевое приближение в равенстве (43) выбираем зависимость теории простого конденсатора

$$\zeta(\tau) = -\frac{d\xi}{d\tau}. \quad (46)$$

Для этого приближения ответ в решении задачи представляется формулами (40) и (41). Необходимость решения задачи в следующем, первом, приближении зависит от значения выражения в левой части неравенства (44), которое вычисляется по решению в нулевом приближении. После соответствующих преобразований имеем

$$\begin{aligned} & k_{33}^2 \frac{cT}{h} \frac{\xi(\tau) - \xi(0)}{\xi(\tau)} = \\ & = k_{33}^2 \frac{cT}{h} \frac{\varepsilon + e^{-2\tau}}{\varepsilon \sqrt{1+\varepsilon}} \left[\sqrt{1+\varepsilon e^{2\tau}} - \sqrt{1+\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Из графического представления решения (40), (41) (рис. 3, а–в) следует, что продолжительность разряда равна примерно двукратному значению времени, по истечении которого ток при разряде достигает максимального значения. Вычисления дают $\zeta_{\max}=2/(3\sqrt{3})$ при $\tau=\ln \sqrt{2/\varepsilon} \simeq 2.65$.

Возвращаясь к уравнению (47), видим, что выражение в его правой части равно нулю при $\tau=0$ и достигает максимального значения, равного примерно 0.017, при $\tau=2 \ln \sqrt{2/\varepsilon}=5.3$, т. е.

$$\begin{aligned} 0 &< k_{33}^2 \frac{cT}{h} \frac{\xi(\tau) - \xi(0)}{\xi(\tau)} < 0.017, \\ 0 &< \tau < 5.3. \end{aligned} \quad (48)$$

Следовательно, в данном примере имеет место сильное неравенство (44) и допустимо использова-

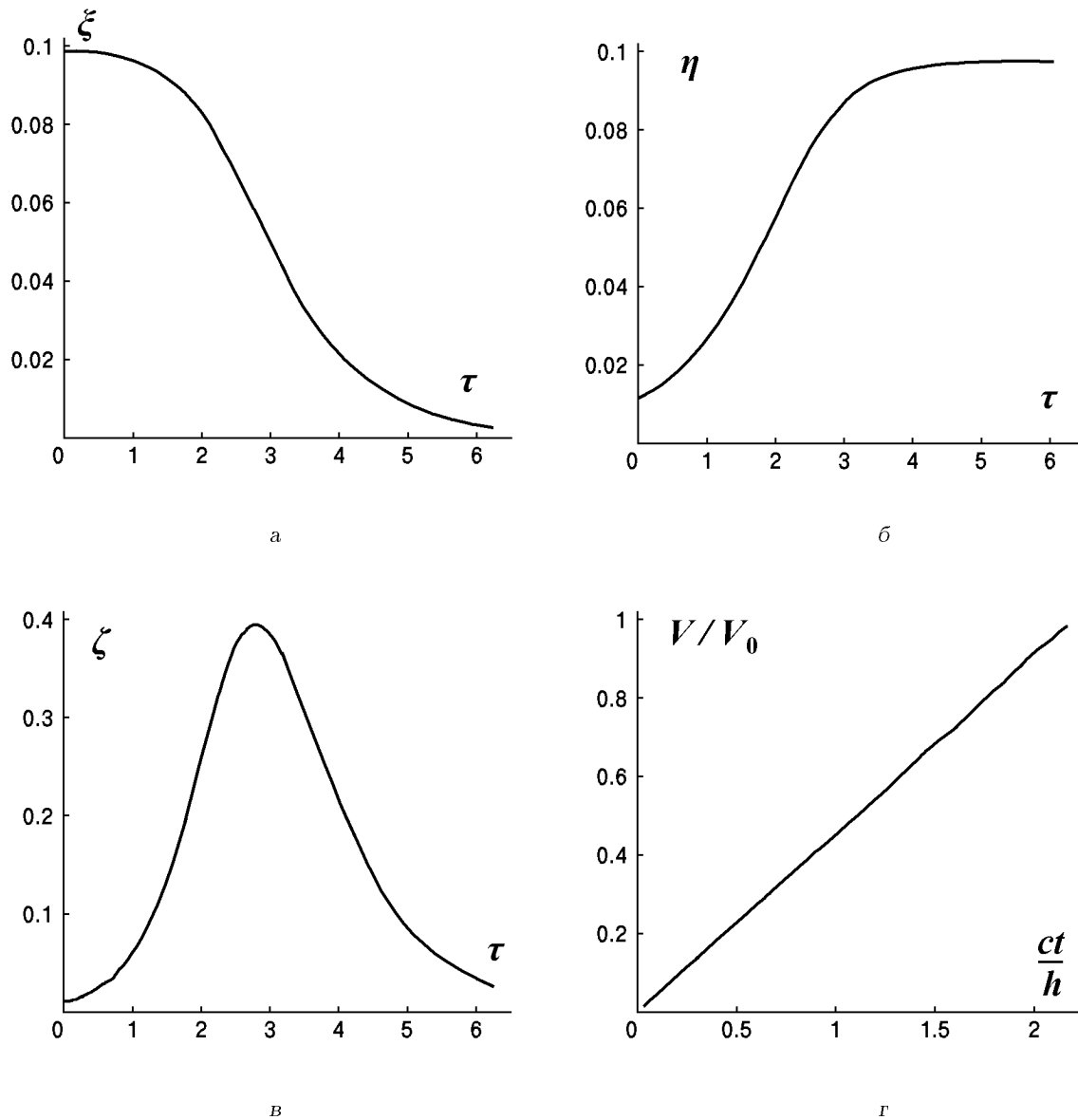


Рис. 3. Результаты расчета разрядных характеристик пьезокерамического цилиндра

ние теории разряда Ромпе–Вайцеля для конденсаторов постоянной емкости.

Таким образом, для выбранного типа разрядников, характеризующихся отсутствием дополнительного активного сопротивления во внешней цепи, и керамических тел, геометрические размеры которых значительно превосходят расстояния, на которые проникают волны напряжений от поверхности вглубь тела за время разряда, процесс разряда с высокой точностью описывается теорией Ромпе–Вайцеля без учета незначительного изменения емкости керамического тела при разряде.

Разделив задачи теории разряда и динамиче-

ского деформирования пьезокерамического тела, нам удалось существенно упростить решение исходной задачи электроупругости. Однако при этом возникают дополнительные трудности, связанные с использованием решения (42) при исследовании волнового поля для произвольных моментов времени ($0 < t < \infty$). Если формально продлить это решение на моменты времени $t/T \gg 1$, то можно заметить, что одновременно обращаются в ноль и разность потенциалов между электродами, и электрический ток во внешней цепи. В крайних задачах электроупругости такого типа граничные условия являются некорректными.

Согласно [8] электрические граничные условия необходимо формулировать или для изменения во времени разности потенциалов на электродах, или в виде закона накопления зарядов на электродах. Поскольку по окончании процесса разряда внешняя цепь становится разомкнутой, то накопленные на электродах за время разряда свободные заряды остаются неизменными в последующие моменты времени вплоть до возможного повторного разряда. Следовательно, зависимость для потенциала в выражении (42) не может быть продлена на промежутки времени $t_p < t < \infty$. Закон накопления зарядов на электродах $\pm Q(t)$ находится из второго уравнения (42):

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{2C_0V_0}{T} \frac{\varepsilon e^{-t/T}}{(\varepsilon + e^{-2t/T})^{3/2}}. \quad (49)$$

Интегрируя это равенство при начальном условии $Q(0) = 0$, находим

$$Q(t) = -2C_0V_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{e^{-t/T}}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T}}} \right]. \quad (50)$$

Отсюда следует, что по окончании разряда $Q \simeq -2C_0V_0$, т.е. полный заряд равен компенсационному заряду при мгновенном разряде керамического тела. Переносим этот результат на задачу разряда пьезокерамического стержня, решение для волнового поля в стержне при разряде и в последующие моменты времени получаем в явном виде по формулам из раздела 1, используя при этом закон изменения во времени вектора электрической индукции на всем временном промежутке $0 \leq t \leq \infty$:

$$D_z = D(t) = \frac{Q(t)}{\pi r^2} = -\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{V_0}{h} \times \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{e^{-t/T}}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T}}} \right]. \quad (51)$$

Так, для выходной разности электрических потенциалов для $0 \leq ct \leq 2h$ по формуле (16) находим

$$\begin{aligned} d_{33} k_{33}^2 \sigma_0 s_{33}^E \frac{V(t)}{h} &= \frac{V(t)}{V_0} = \\ &= \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{e^{-t/T}}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T}}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{ct}{h} \frac{k_{33}^2}{\sqrt{1+\varepsilon}} - k_{33}^2 \frac{cT}{h} \ln \frac{1 + \sqrt{1+\varepsilon}}{e^{-t/T} + \sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T}}} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Распределение механических напряжений в цилиндре находится по формуле (21). Для первого про-

хождения волн вдоль цилиндра ($0 \leq ct \leq 2h$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{\sigma_0} &= -1 + k_{33}^2 \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{e^{-t/T}}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T}}} \right] - \right. \\ &- \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{e^{-t/T} \left(1 - \frac{h-z}{ct} \right)}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T} \left(1 - \frac{h-z}{ct} \right)}} \right] \times \\ &\quad \times H \left(t - \frac{h-z}{c} \right) - \\ &- \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - \frac{e^{-t/T} \left(1 - \frac{h+z}{ct} \right)}{\sqrt{\varepsilon + e^{-2t/T} \left(1 - \frac{h+z}{ct} \right)}} \right] \times \\ &\quad \left. \times H \left(t - \frac{h+z}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из решения (52) следует, что при $t = 0$ $2V(0) = 2V_0$, т.е. выходная разность потенциалов равна значению разности потенциалов между обкладками цилиндра перед разрядом. Это значение совпадает с решением (7) элементарной задачи для статически сжатого пьезоцилиндра с разомкнутыми электродами. Простой асимптотический анализ показывает, что на временном промежутке разряда $0 \leq t \leq 6T$ формула (52) преобразуется в равенство (40). Разность потенциалов резко падает и практически обращается в ноль по окончании процесса разряда (рис. 3, а). Затем, по мере распространения волн напряжений вдоль цилиндра, она снова будет нарастать, достигая максимального значения в момент времени $t = 2h/c$, когда волны напряжений проходят длину цилиндра (рис. 3, б).

Для принятого в расчетах значения коэффициента электромеханической связи $k_{33}^2 = 0.5$ выходная разность потенциалов в момент времени $t = 2h/c$ достигает пробойного значения $2V_0$ и происходит повторный процесс разряда цилиндра. Используя решение, приведенное в разделе 1 и итоговые формулы теории разряда Ромпе-Вайцеля (42), можно показать, что без дополнительного подвода механической энергии к пьезоцилиндру извне разряд заканчивается после второго пробоя. Для малозффективных керамик, $k_{33}^2 < 0.5$, имеет место лишь единичный разряд цилиндра.

Чтобы оценить уровень механической напряженности пьезоцилиндра в процессе разряда (при $0 \leq t \leq 6T$) и в последующие моменты времени, обратимся к анализу решения (53). В начальный момент времени $t = 0$ цилиндр находится в условиях равномерного осевого сжатия $\sigma_z = -\sigma_0$. В процессе разряда напряжения в цилиндре резко меняются и по окончании разряда ($t = 6T$) в средней

его части принимают постоянное значение:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0} \simeq -1 + k_{33}^2, \quad (54)$$

$$-h(1 - 10^{-2}) < z < h(1 - 10^{-2}).$$

Лишь в весьма тонких приторцевых слоях напряжения будут зависеть от осевой координаты, изменяясь от значения $\sigma_z = -\sigma_0$ при $z = h$ до значения (54) на фронте волны $z = h - 6cT \simeq h(1 - 10^{-2})$. По мере продвижения импульсов сжатия, возникающих при разряде, вдоль цилиндра постоянно меняется его напряженное состояние и по достижению импульсами противоположных торцов цилиндра ($ct = 2h$) практически во всей его длине устанавливается равномерное сжатие:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0} = -1 - k_{33}^2. \quad (55)$$

Из формул (54) и (55) следует, что динамические напряжения, возникающие при электрическом разряде, имеют значительную интенсивность. Для $k_{33}^2 = 0.5$ их значение равно половине величины напряжений статического сжатия цилиндра. Поэтому при разряде пьезокерамических тел, в которых отсутствуют предварительные сжимающие напряжения, может иметь место хрупкое разрушение тела, как это изображено на рис. 4, заимствованном из работы [2]. В эксперименте использовался цилиндрический образец из керамики BaTiO_3 с размерами $r = 2.2$ см, $2h = 1.5$ см. Разряд происходил в жидкой среде с высокой электрической прочностью при пробойном значении разности потенциалов $2V_0 = 55$ кВ. Волнистый характер поверхности разрушения позволяет сделать вывод, что начальная трещина образовалась в центре цилиндра и распространялась к боковой поверхности цилиндра в течение времени $4 \cdot 10^{-5}$ с, соответствующего двенадцатикратному прохождению продольными волнами толщины цилиндра, т. е. имела скорость распространения порядка $0.55 \cdot 10^3$ м/с. Заметим, что этот эксперимент имеет не только иллюстративное, но и исключительно важное научное значение для разработки динамической теории разрушения хрупких тел.

Представленный выше детальный анализ процесса разряда пьезокерамического цилиндра с использованием теории Ромпе–Вайцеля позволяет сделать вывод, что разработанная ранее автором и его учениками теория мгновенного электрического разряда [3–5] правильно и количественно точно описывает динамическую реакцию пьезокерамических тел на электрический разряд, начиная

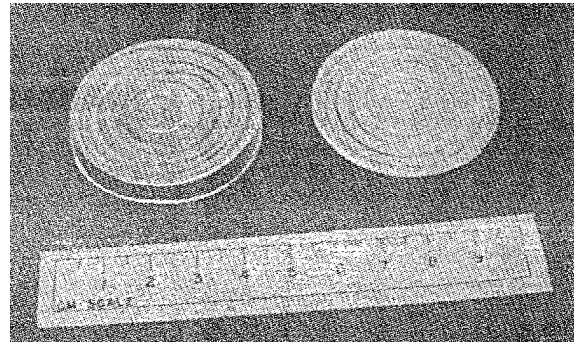


Рис. 4. Картина хрупкого разрушения пьезокерамического цилиндра вследствие электрического разряда

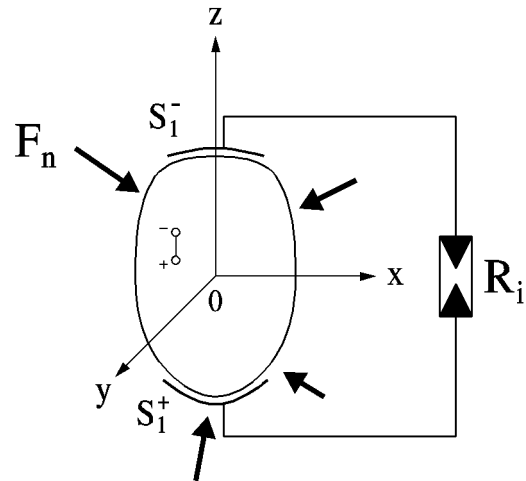


Рис. 5. Пьезоэлемент произвольной конфигурации, нагруженный поверхностными напряжениями

с моментов времени, превосходящих в несколько раз длительность разряда. Она позволяет точно вычислить энергию разряда и накопленный при разряде суммарный заряд на электродах тела. Однако, если интересоваться величиной электрического тока при разряде и электроупругим состоянием приповерхностных слоев тела, то ответ может быть получен лишь при использовании теории разряда Ромпе–Вайцеля. Опыт решения сквозной задачи разряда пьезокерамического цилиндра указывает на практические аспекты подхода к решению этого класса задач. Так, для пьезокерамических тел произвольной геометрии и поляризации вычисление разности потенциалов и тока во внешней цепи при разряде можно проводить по формулам (42), а для расчета волнового поля в приповерхностных слоях тел с гладкой поверхностью

можно использовать формулы типа (53). Крутизна волновых импульсов напряжений вычисляется по формуле (53).

В заключение, для полноты изложения, проведем вычисление энергии электрического разряда. Используя решение (42), находим

$$W = 2 \int_0^{\infty} I(t) V(t) dt = 4C_0 V_0^2 \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\tau} d\tau}{(\varepsilon + e^{-2\tau})^2} = \\ = 2C_0 V_0^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) \approx 2C_0 V_0^2 = 0.81 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.} \quad (56)$$

4. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕОРИИ МГНОВЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА

Пусть пьезокерамическое тело, предварительно поляризованное в направлении оси Oz , (рис. 5), нагружено внешними поверхностными механическими напряжениями $\mathbf{F}_n(x, y, z, t)$. Поверхностные электроды S_1^{\pm} подключены к внешней цепи с электрическим разрядником R_i . Известно, что решение краевых задач электроупругости при произвольно заданных механических и электрических граничных условиях сводится к интегрированию сопряженной системы уравнений относительно вектора упругих перемещений $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ и электростатического потенциала $\psi(x, y, z, t)$. При поляризации тела вдоль оси Oz эта система имеет следующий вид [8]:

$$c_{11}^E \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \text{rot rot } \mathbf{u} + \\ + \left(c_{44}^E - \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{k} \nabla^2 u_z\right) + \\ + \left(c_{44}^E + c_{13}^E - \frac{c_{11}^E + c_{12}^E}{2}\right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{k} \text{div } \mathbf{u} + \text{grad } u_z) + \\ + \mathbf{k} (c_{33}^E + c_{11}^E - 4c_{44}^E - 2c_{13}^E) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \\ = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \varepsilon_{15} \mathbf{k} \nabla^2 \psi - (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{15}) \frac{\partial}{\partial z} \text{grad } \psi - \\ - (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \mathbf{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\ \varepsilon_{11}^S \nabla^2 \psi + (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \psi}{\partial z^2} = \varepsilon_{15} \nabla^2 u_z + \\ + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{15}) \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \mathbf{u} + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \quad (57)$$

Здесь через c_{ik}^E обозначены упругие модули, измеренные при постоянном (нулевом) электрическом поле; e_{pq} – пьезоэлектрические постоянные; ε_{11}^S и ε_{33}^S – диэлектрические постоянные, измеренные при постоянной (нулевой) деформации; ρ , как и ранее, обозначает плотность керамического тела.

Для однозначной разрешимости сопряженных уравнений (57) необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Из классической механики известно, что начальные условия полностью определяются заданием перемещений и скоростей точек материального тела:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x, y, z), \\ \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, y, z). \quad (58)$$

Граничные условия на поверхности тела S формулируются в виде механических и электрических условий.

Поскольку, согласно постановке задачи, нам известно значение вектора напряжений \mathbf{F}_n на всем рассматриваемом временном промежутке деформирования пьезокерамического тела (как до, так и после разряда), то механические условия записываются в виде следующего векторного равенства [8]:

$$\left\{ \begin{aligned} & c_{12}^E \mathbf{n} \text{div } \mathbf{u} + \\ & + (c_{11}^E - c_{12}^E) \left[(\mathbf{n} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{u}) \right] + \\ & + (c_{13}^E - c_{12}^E) \left(\mathbf{n} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \mathbf{k} n_z \text{div } \mathbf{u} \right) + \\ & + (c_{33}^E + c_{11}^E - 4c_{44}^E - 2c_{13}^E) \mathbf{k} n_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ & + \left[c_{33}^E - \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \right] \left[n_z \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \text{grad } u_z \right) + \right. \\ & + \mathbf{k} \left(\mathbf{n} \cdot \text{grad } u_z + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \\ & + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \mathbf{k} n_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \varepsilon_{31} \mathbf{n} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ & \left. + \varepsilon_{15} \left[n_z \text{grad } \psi + \mathbf{k} (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \psi) \right] \right\} \Big|_S = \mathbf{F}_n, \quad (59) \end{aligned} \right.$$

где \mathbf{n} – орт внешней нормали к поверхности тела S ; n_z – проекция его на ось Oz .

Что касается электрических граничных условий, то в отсутствие внешнего электрического источника их запись зависит от характеристик проводимости внешней цепи.

В теории мгновенного электрического разряда предполагается, что проводимость разрядника $Y_i = 1/R_i$ равна нулю для значений выходной разности потенциалов $2V(t)$, меньших пробойного значения $2V_0$, и обращается в бесконечность при строгом равенстве $V = V_0$. Пробойное значение разности потенциалов полностью определяется характеристикой разрядника R_i . Естественно, предполагается, что электрическая прочность керамики и внешней среды (воздуха) выше пробойного напряжения разрядника. Для такого гипотетического типа разрядников высвобождение электрической энергии из объема керамического тела происходит мгновенно и интенсивность тока при разряде является неограниченно большой. Однако величина компенсационных свободных зарядов, которые накапливаются на электродах керамического тела при мгновенном разряде, будет иметь конечное значение. В результате приходим к выводу, о том, что для всех моментов времени, кроме $t = t_p$, электроды S_1^\pm будут разомкнутыми и суммарные свободные заряды на электродах будут неизменными для всех моментов времени $t \neq t_p$. В условиях механического нагружения тела до момента первого разряда суммарные свободные заряды на электродах вообще отсутствуют, а после первого и последующего разрядов будут иметь постоянные значения. Остановимся на постановке задачи для одиночного разряда. При этом отсчет времени t будем проводить таким образом, чтобы время разряда совпадало с нулевым значением t , т. е. принимаем $t_p = 0$. Это значит, что если механические напряжения приложены к керамическому телу в некоторый момент времени $t = -t_0$ ($t_0 > 0$), то деформирование тела под действием этих усилий таково, что именно в момент времени $t = 0$ разность потенциалов между разомкнутыми электродами S_1^\pm достигает пробойного значения $2V_0$. Электрические граничные условия на временном промежутке $-t_0 < t \leq 0$ согласно [8] сформулируем в виде

$$\begin{aligned} \psi|_{S_1^\pm} &= \pm V(t), \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})|_{S-S_1^+-S_1^-} &= 0, \\ \iint_{(S_1^+)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

или после преобразования к искомым функциям, входящим в сопряженные уравнения (57), в виде

равенств

$$\begin{aligned} \psi|_{S_1^\pm} &= \pm V(t), \\ \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \psi) + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \\ &- n_z \varepsilon_{31} \text{div } \mathbf{u} - n_z (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \varepsilon_{15} \left[(\mathbf{n} \cdot \text{grad } u_z) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \right\} \Big|_{S-S_1^+-S_1^-} &= 0, \\ \iint_{(S_1^+)} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \psi) + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \\ &- n_z \varepsilon_{31} \text{div } \mathbf{u} - n_z (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \varepsilon_{15} \left[(\mathbf{n} \cdot \text{grad } u_z) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \right\} dS &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

В первое граничное условие входят неизвестные значения потенциалов $\pm V(t)$ на электродах. Функция $V(t)$ определяется в процессе решения краевой задачи из третьего дополнительного интегрального условия.

Таким образом, электроупругое состояние керамического тела в моменты времени до разряда находится в результате интегрирования сопряженных уравнений (57) при начальных условиях (58), но уже при $t = -t_0$ вместо $t = 0$, механических граничных условиях (59) и электрических граничных условиях смешанного типа (первые два равенства (61)). При нулевых начальных условиях решение сформулированной задачи будет зависеть от вектора внешних напряжений \mathbf{F}_n и неизвестной функции выходного потенциала $V(t)$. После подстановки найденных в процессе решения краевой задачи перемещений \mathbf{u} и потенциала ψ в интегральное условие (61) алгебраическим путем находим функцию $V(t)$.

При $t = 0$ выходная разность электрических потенциалов достигает пробойного значения $2V_0$ и электроупругое состояние тела характеризуется вполне определенными значениями механических и электрических величин сопряженного поля. Ниже их значения отмечаются индексом (0), например: смещения $\mathbf{u}^{(0)}$, электростатический потенциал $\psi^{(0)}$, механические напряжения $\sigma_x^{(0)} \dots \tau_{xz}^{(0)}$, напряженность электрического поля $\mathbf{E}^{(0)}$ и т. д.

Для моментов времени после разряда ($t > 0$) динамическое состояние тела вновь находится из решения сопряженных уравнений (57) при началь-

ных условиях (58), в правые части которых необходимо поставить значения смещений $\mathbf{u}^{(0)}$ и скоростей $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ точек тела в момент разряда $t=0$, а также граничных условиях (59) и первых двух равенствах в (61). Однако интегральное условие (третье равенство в (61)) необходимо заменить условием постоянства накопленного при разряде свободного заряда $\pm Q$ на электродах S_1^\pm . В явном виде это условие записывается в виде равенства

$$\begin{aligned} & \iint_{(S_1^+)} \left\{ \varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \psi) + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \right. \\ & - n_z \varepsilon_{31} \text{div } \mathbf{u} - n_z (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ & \left. - \varepsilon_{15} \left[(\mathbf{n} \cdot \text{grad } u_z) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right] \right\} dS = \\ & = -Q = \text{const}, \end{aligned} \quad (62)$$

справедливого при $t > 0$. Теперь, в отличие от предыдущего этапа деформирования керамического тела, в решение краевой задачи входят две неизвестные величины – функция потенциала на электродах $V(t)$ и суммарный заряд на электродах Q . Для однозначности решения задачи необходимо найти способ независимого определения суммарного свободного заряда на электродах Q . Как отмечалось выше, заряд Q равен компенсационному заряду, который накапливается на электродах тела при разряде и приводит к падению разности потенциалов между электродами $2V_0$ до нулевого значения. Поскольку при мгновенном разряде емкость пьезокерамического тела остается неизменной, то согласно теории конденсаторов справедливо равенство

$$Q = 2C_0 V_0. \quad (63)$$

Емкость “зажатого” керамического тела C_0 (диэлектрические проницаемости ε_{11}^S и ε_{33}^S) может быть определена экспериментально при низкочастотном гармоническом электрическом нагружении тела или же теоретическим путем из решения соответствующей краевой задачи электростатики для трансверсально-изотропной диэлектрической среды. Используемое при этом уравнение электростатики получается из второго уравнения (57) при равенстве нулю правой части:

$$\varepsilon_{11}^S \nabla^2 \tilde{\psi} + (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} = 0. \quad (64)$$

Граничные условия для потенциала $\tilde{\psi}$ формулируются

в виде соотношений

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}|_{S_1^\pm} = \pm V_0, \\ & (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{D}})|_{S-S_1^+-S_1^-} = \left[\varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \tilde{\psi}) + \right. \\ & \left. + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right]_{S-S_1^+-S_1^-} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

После решения сформулированной выше краевой задачи электростатики величина зарядов на электроде S_1^\pm находится по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & - \iint_{(S_1^+)} \left[\varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \tilde{\psi}) + \right. \\ & \left. + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right] dS. \end{aligned} \quad (66)$$

К сожалению, записать емкость C_0 в явном виде не представляется возможным, поскольку смешанные краевые задачи такого типа для тел произвольной геометрии не имеют явного аналитического решения. Компенсационные заряды при мгновенном разряде равны по величине, но противоположны по знаку зарядам $\pm \tilde{Q}$ на электродах S_1^\pm . Следовательно, для $t > 0$ интегральное условие (62) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \iint_{(S_1^+)} \left\{ \varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \psi) + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \right. \\ & - n_z \varepsilon_{31} \text{div } \mathbf{u} - n_z (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{15}) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ & \left. - \varepsilon_{15} \left[(\mathbf{n} \cdot \text{grad } u_z) + \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right] \right\} dS = \\ & = - \iint_{(S_1^+)} \left[\varepsilon_{11}^S (\mathbf{n} \cdot \text{grad } \tilde{\psi}) + n_z (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right] dS. \end{aligned} \quad (67)$$

Это равенство замыкает систему уравнений краевых задач динамической электроупругости, описывающих сопряженные поля в пьезокерамических телах при мгновенном электрическом разряде. Итак, для моментов времени после разряда ($t > 0$) динамическое деформирование керамического тела определяется интегрированием сопряженных уравнений (57) при начальных условиях (58), механическом граничном условии (59) и электрических граничных условиях смешанного типа (первые два равенства в (61)). Интегральное условие, с помощью которого определяется значение выходного потенциала $V(t)$, записывается в виде равенства (67). Решение сформулированной векторной краевой задачи для тел произволь-

ной геометрии при произвольном выборе направления предварительной поляризации и расположения электродных покрытий сопряжено со значительными математическими трудностями. Однако, учитывая, что в большинстве технических устройств используются искровые генераторы с простой геометрией, чаще всего в виде тонких стержней, плоских тонкостенных элементов, элементов кольцевого типа и тонкостенных цилиндрических оболочек, построение решения можно выполнить в аналитическом виде, не обращаясь к методам численного интегрирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный выше подробный анализ явления электрического разряда цилиндрического искрового генератора позволяет сделать вывод о том, что весьма сложное явление разряда пьезокерамических тел можно с высокой степенью точности описать, совмещая теорию разряда конденсаторов Ромпе–Вайцеля с краевой задачей динамической электроупругости. При рассмотрении сформулированной таким образом сквозной задачи удалось установить, что для расчета импульсного тока при разряде и энергии разряда можно использовать теорию Ромпе–Вайцеля в предположении постоянства емкости “зажатого” керамического тела, т. е. пренебрегая изменением деформированного состояния элемента за время разряда. Однако для строгого анализа волнового поля в пьезогенераторе при электрическом разряде и в последующие моменты времени необходимо использовать зависимости теории Ромпе–Вайцеля. Формирование ударных волновых импульсов механических напряжений, их интенсивность и крутизна полностью определяются зависимостями изменения во времени разности потенциалов и тока проводимости во внешней цепи при разряде. Проведен сопоставительный анализ волновых полей, вычисленных по теории мгновенного разряда и разряда с конечной длительностью. Установлено, что для расчета максимальных динамических напряжений во внутренних точках тела форма ударных им-

пульсов не имеет существенного значения. Однако при расчете напряжений в приповерхностных слоях тела, особенно вблизи граничной линии электродного покрытия, необходимо учитывать истинную форму ударных импульсов. Для интегральной характеристики электрического разряда, а именно, энергии разряда, обе теории дают идентичные значения. Поэтому, несмотря на определенные ограничения теории мгновенного электрического разряда, автор счел целесообразным изложить в заключительном параграфе статьи общую теорию деформирования пьезокерамических тел при мгновенном электрическом разряде.

1. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика.– М.: Мир, 1974.– 288 с.
2. Goodman G. Electrostrictively generated and modulated fracture in barium titanate ceramics // J. Appl. Phys.– 1964.– 35, N 9.– P. 2725–2726.
3. Баженов В. М., Улитко А. Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. мех.– 1975.– 11, N 1.– С. 22–27.
4. Баженов В. М. Исследование энергии мгновенных разрядов статически сжатого пьезокерамического слоя // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1977.– N 11.– С. 995–998.
5. Zhar'ii O. Yu. Eigenfunction expansions in studies of multimode and transient vibrations of piezoelectric transducers // Proc. 1995 IEEE Int. Frequency Control Symposium.– San Francisco, CA, USA, 1995.– P. 750–754.
6. Златин Н. А., Мочалов С. М., Пугачев Г. С., Брагов А. М. Временные закономерности процесса разрушения металлов при интенсивных нагрузках // Физ. тверд. тела.– 1974.– 16, N 6.– С. 1752–1755.
7. Rompe R., Weizel W. Über das Toeplerche Funken Gesetz // Zh. Phys.– 1944.– 122, N 636.– S. 37–49.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989.– 277 с.
9. Тамм И. Е. Основы электричества.– М.: Наука, 1976.– 614 с.
10. Piezoxide-Wandler, Grundlagen und Anwendungen, Herausgegeben von der Valvo GmbH.– Hamburg, 1968.– 122 s.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований.–Т. 1.– М.: Наука, 1969.– 340 с.
12. Месяц Г. А. Генерирование мощных наносекундных импульсов.– М.: Сов. радио, 1974.– 256 с.