

УДК 539.3

АНАЛИЗ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ, ИЗЛУЧАЕМОГО ЦЕНТРОМ ВРАЩЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

Ю. А. МОРОЗОВ*, Г. Я. ПОПОВ**

* Одесский государственный политехнический университет

** Одесский государственный университет им. Мечникова

Получено 17.11.98 ◊ Пересмотрено 1.03.99

Проблема исследования волнового поля в указанной среде с помощью метода разрывных решений сведена к одномерному интегро-дифференциальному уравнению на конечном интервале. Для его приближенного решения использован метод ортогональных многочленов, который, в свою очередь, сводит проблему к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. Последняя решена методом редукции, обоснование которого приводится. На основе полученного решения построена диаграмма направленности в дальней зоне за трещиной и подсчитан коэффициент интенсивности напряжений.

Проблему дослідження хвильового поля у вказаному середовищі за допомогою метода розривних розв'язків зведено до одновимірного інтегро-диференціального рівняння на скінченному інтервалі. Для його наближеного розв'язку використано метод ортогональних многочленів, який, у свою чергу, зводить проблему до розв'язку нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Останню розв'язано за допомогою метода редукції, обґрунтування якого наводиться. На основі отриманого розв'язку побудовано діаграму напрямленості у дальній зоні за тріщиною і підраховано коефіцієнт інтенсивності напруг.

A problem on investigation of wave field in mentioned medium by method of discontinuous solutions has been reduced to one-dimensional integro-differential equation over the finite interval. For its solution the method of orthogonal polynomials has been used, which in its turn allowed to reduce the problem to solution of the infinite system of algebraic equations. This last has been solved using the technique of reduction that is being substantiated in the paper. On base of obtained solution the directivity pattern in far field has been derived and the coefficient of intensity of tensions has been evaluated.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование хрупкого разрушения тел с имеющимися в них трещинами и диагностика наличия трещин в телах остаются весьма актуальными проблемами современной техники. В механике разрушения основной характеристикой, требующей определения, является коэффициент интенсивности напряжений (КИН) у краев трещины. Следует констатировать, что вопросы определения КИН в плоских статических задачах в настоящее время развиты достаточно хорошо. Значительно хуже обстоит дело с решением пространственных задач ввиду значительных математических трудностей. Решены только задачи для плоских круговых и эллиптических трещин. Рассмотрены некоторые частные случаи задач для трещин, лежащих на частях поверхности сферы, параболоида, гиперболоида, конуса. В работе [1] рассмотрен частный случай задачи о цилиндрической трещине и тоже в статической постановке. В настоящей работе впервые ставится и решается одна из задач о цилиндрической трещине в динамической постановке и находятся КИН. Так как для проблемы диагностики наличия трещины важно

знать характер волнового поля в дальней зоне за трещиной, то в настоящей работе обсуждается и этот вопрос.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СВЕДЕНИЕ ЕЕ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Неограниченная упругая среда ($0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $-\infty \leq z < \infty$), содержащая дефект (трещину), совпадающий с поверхностью

$$r = R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 < a \leq z \leq b, \quad (1)$$

загружена в начале координат центром кручения (вращения), момент которого $M(t)$ меняется во времени по гармоническому закону, т.е. пропорционально множителю $e^{-i\omega t}$. Требуется определить волновое поле в упругой среде и вычислить коэффициенты интенсивности напряжений. Поскольку все искомые и заданные величины тоже будут пропорциональны $e^{-i\omega t}$, то в дальнейшем этот множитель опускается. Так как рассматривается деформация кручения упругой среды, то поле напряжений и смещений будет состоять только из $u_\varphi(r, z)$ и $\tau_{r\varphi}(r, z)$, и решение поставленной задачи

будем строить в виде

$$\begin{aligned} u_\varphi(r, \varphi) &= u_\varphi^0(r, \varphi) + u_\varphi^1(r, \varphi), \\ \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= \tau_{r\varphi}^0(r, \varphi) + \tau_{r\varphi}^1(r, \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где u_φ^1 и $\tau_{r\varphi}^1$ – разрывное решение [2] дифференциального уравнения крутильных колебаний для рассматриваемого дефекта, т. е. решение, которое удовлетворяет указанному уравнению всюду, за исключением точек разрыва (1). В этих точках задаются скачки перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} \langle u_\varphi(R, z) \rangle &= u_\varphi(R-0, z) + u_\varphi(R+0, z), \\ \langle \tau_{r\varphi}(R, z) \rangle &= \tau_{r\varphi}(R-0, z) + \tau_{r\varphi}(R+0, z). \end{aligned}$$

При этом в данном случае $\langle \tau_{r\varphi}(R, z) \rangle \equiv 0$, а $\langle u_\varphi(R, z) \rangle$ подлежит определению; u_φ^0 и $\tau_{r\varphi}^0$ – смещения и напряжения от центра вращения при отсутствии дефекта. Они определяются как

$$\begin{aligned} u_\varphi^0(r, z) &= -\frac{M}{8\pi r G(r^2 + z^2)} e^{irk}, \\ \tau_{r\varphi}^0(r, z) &= -\frac{M}{8\pi} \left[\frac{ikr(r^2 + z^2) - (3r^2 + z^2)}{r e^{-irk}(r^2 + z^2)} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $k = \omega/c_2$; $c_2^2 = G/\rho$ – скорость распространения поперечных волн в упругой среде; G – модуль сдвига; ρ – плотность; $M = \text{const}$ – амплитудное значение момента вращения. Эти формулы получены аналогично приему, изложенному в [3] с модификацией на динамику [4]. Построив, используя схему работы [2], разрывное решение уравнения крутильных колебаний упругой среды для дефекта (1) в виде

$$\begin{aligned} u_\varphi^1 &= -\frac{iR}{4} \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_a^b \langle u_\varphi(\eta) \rangle \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}) J_2(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \times \\ &\times e^{-i\lambda(z-\eta)} d\lambda d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}^1(R, z) &= -\frac{iR}{4} \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_a^b \langle u_\varphi(R, \xi) \rangle \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} J_2(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}) H_2^{(1)}(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \times \\ &\times e^{-i\lambda(z-\eta)} d\lambda d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

сведем сформулированную задачу к интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & - \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{iR}{4} \int_a^b \langle u_\varphi(R, \xi) \rangle \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} J_2(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}) H_2^{(1)}(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \times \\ & \times e^{-\lambda(z-\xi)} d\lambda d\xi = \tau_{r\varphi}^0(R, z). \end{aligned} \quad (6)$$

Сделаем замену

$$\begin{aligned} R\lambda &= \alpha, \quad z = R(c_+ + c_-x), \\ \xi &= R(c_+ + c_-s), \quad 2Rc_\pm = b \pm a \\ \langle v(R, Rc_+ - Rc_-s) \rangle &= \varphi(s), \\ -4Rc_- \tau_\varphi^0(R, Rc_+ - Rc_-x) &= f(x), \end{aligned} \quad (7)$$

преобразуем уравнение (6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \varphi_P(s) H(c_-, x, s) ds - \\ & -\frac{k^2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_P(s) H(c_-, x, s) ds = f(x), \\ & -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H(c_-, x, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{-i\alpha c_-(x-s)} d\alpha = \\ &= 2 \int_0^{\infty} K(\alpha) \cos[\alpha c_-(x-s)] d\alpha; \\ K(\alpha) &= i\pi J_2 \left(\sqrt{\tilde{k}^2 - \alpha^2} \right) H_2^{(1)} \left(\sqrt{\tilde{k}^2 - \alpha^2} \right); \\ f(x) &= C^* \left[\frac{i\tilde{k}(1 + (c_+ + c_-x)^2) - (3 + (c_+ + c_-x)^2)}{e^{-i\tilde{k}(1 + (c_+ + c_-x)^2)}} \right]; \\ \tilde{k} &= Rk; \quad C^* = -\frac{M}{8\pi GR}. \end{aligned}$$

Выделим из ядра полученного уравнения нерегулярную часть. Для этого воспользуемся асимптотикой

$$i\pi J_2(z) H_2^{(1)}(z) = \frac{1}{|z|} \left[1 - \frac{3}{(2z)^2} + O\left(\frac{1}{(2z)^4}\right) \right], \quad (9)$$

$z \rightarrow \infty$

и известным интегральным представлением логарифмической функции (формула 3.784 (1) из [5]). В результате получаем

$$H(c_-, x, s) = \frac{1}{\pi} \left\{ \ln \frac{1}{|x-s|} + \ln \frac{1}{c_-} + \int_0^\infty \frac{(\alpha K(\alpha) - 1) \cos[\alpha c_-(x-s)] + \cos \alpha}{\alpha} d\alpha \right\}, \quad (10)$$

причем последнее слагаемое в ядре имеет непрерывную производную по обоим переменным на вещественной оси. С учетом (10), интегральное уравнение (8) запишется так:

$$-\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \varphi(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_*(c_-, x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (11)$$

где

$$H_*(c_-, x, s) = \left[c_-^2 \int_0^\infty \alpha (\alpha K(\alpha) - 1) \times \cos[\alpha c_-(x-s)] d\alpha - \int_0^\infty K(\alpha) \cos[\alpha c_-(x-s)] d\alpha \right]. \quad (12)$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОЛУЧЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для решения интегро-дифференциального уравнения (11) удобен метод ортогональных многочленов, основанный на следующем спектральном соотношении [2]:

$$-\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} U_n(s) \ln \frac{1}{|x-s|} ds = (n+1) U_n(x), \quad (13)$$

$$|x| \leq 1, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Здесь U_n - многочлен Чебышева 2-го рода. Решение строим в виде

$$\varphi_s = \sqrt{1-s^2} \sum_{n=1}^\infty \varphi_n U_n(s) \quad (14)$$

и после реализации стандартной схемы метода ортогональных многочленов [2] приходим к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$\psi_m + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{d_{m,n} \psi_n}{\sqrt{n+1} \sqrt{m+1}} = \frac{f_m}{\sqrt{m+1}}, \quad (15)$$

$$\psi_m = C^* \sqrt{m+1} \varphi_m, \quad m = \overline{1, \infty},$$

где

$$d_{m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H_*(c_-, x, s) Q_n(s) Q_m(x) dx ds; \quad (16)$$

$$f_m = \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1-x^2} U_m(x);$$

$$Q_m(x) = \sqrt{1-x^2} U_m(x).$$

Систему (15) будем решать приближенно методом редукции. Чтобы обосновать сходимость этого метода, следует, согласно [6], доказать сходимость рядов

$$S_1 = \sum_{n,m=0}^\infty \frac{d_{m,n}^2}{(n+1)(m+1)}, \quad (17)$$

$$S_2 = \sum_{m=0}^\infty \frac{f_m^2}{m+1}.$$

В данном случае ряды (17) сходятся в силу равенства Парсеваля, так как

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |H_*(c_-, x, s)|^2 \times \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-s^2} dx ds < \infty. \quad (18)$$

В этом можно убедиться, если использовать асимптотику (9). Для вычисления коэффициентов бесконечной системы перепишем формулу (12) так:

$$H_*(c_-, x, s) = c_-^2 \times \left\{ \left[\int_0^\infty \alpha (\alpha K(\alpha) - 1) e^{-i\alpha c_-(x-s)} d\alpha + \int_0^\infty \alpha (\alpha K(\alpha) - 1) e^{i\alpha c_-(x-s)} d\alpha \right] - \left[\int_0^\infty K(\alpha) e^{-i\alpha c_-(x-s)} d\alpha + \int_0^\infty K(\alpha) e^{i\alpha c_-(x-s)} d\alpha \right] \right\}. \quad (19)$$

Теперь следует воспользоваться формулой 7.321 из [5], положив там $\nu=1$. Тогда будем иметь

$$d_{n,m} = D_{n,m}[c_-^2 J_{n,m}^0 - J_{n,m}^1], \quad (20)$$

где

$$D_{n,m} = -\frac{\pi^2}{c_-^2} \frac{i^{n+m} \Gamma(2+n) \Gamma(2+m) [(-1)^m + (-1)^n]}{\Gamma(1+n) \Gamma(1+m)};$$

$$J_{n,m}(\alpha) = J_{n+1}(c-\alpha) J_{m+1}(c-\alpha);$$

$$\left\| \begin{matrix} J_{n,m}^0 \\ J_{n,m}^1 \end{matrix} \right\| = \int_0^\infty \left\| \begin{matrix} \alpha(\alpha K(\alpha) - 1) \\ K(\alpha) \end{matrix} \right\| \left\| \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^2 c_-^2} \right\| d\alpha.$$

Если разбить первый из содержащихся выражений в (20) интегралов на два интеграла и воспользоваться формулой 7.14.2 (32) из [7], то получим

$$d_{n,m} = D_{n,m}[J_{n,m}^2 - \tilde{k}^2 J_{n,m}^1 - c_-^2 B_{n,m}], \quad (21)$$

где

$$B_{n,m} = \frac{2 \sin[(m-n)\pi/2]}{\pi(m-n)(m+n+2)},$$

$$J_{n,m}^2 = \int_0^\infty K(\alpha) J_{n,m}(\alpha) d\alpha.$$

Вычисления по формуле (21) малоэффективны в силу слабой сходимости несобственных интегралов. Для улучшения сходимости интегралов, входящих в формулу (21), воспользуемся асимптотикой подынтегральных функций при больших значениях аргумента (9):

$$i\pi J_2 \left(\sqrt{\tilde{k}^2 - \alpha^2} \right) H_2^{(1)} \left(\sqrt{\tilde{k}^2 - \alpha^2} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2}}. \quad (22)$$

Учитывая последнее, для достаточно больших A можем записать следующее:

$$J_{n,m}^2 = \int_0^{\tilde{k}} K(\alpha) J_{n,m}(\alpha) d\alpha + \int_{\tilde{k}}^A K^*(\alpha) J_{n,m}(\alpha) d\alpha + \int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2}} d\alpha, \quad (23)$$

$$J_{n,m}^1 = \int_0^{\tilde{k}} K(\alpha) \frac{J_{n,m}(\alpha)}{c_-^2 \alpha^2} d\alpha + \int_{\tilde{k}}^A K^*(\alpha) \frac{J_{n,m}(\alpha)}{c_-^2 \alpha^2} d\alpha + \int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{c_-^2 \alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2}} d\alpha, \quad (24)$$

где

$$K^*(\alpha) = \frac{2}{\pi} I_2 \left(\sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2} \right) K_0 \left(\sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2} \right).$$

Воспользовавшись степенным представлением для функций Бесселя 7.2.7 (42) из [7], имеем

$$\int_0^{\tilde{k}} K(\alpha) J_{n,m}(\alpha) \left\| \begin{matrix} 1 \\ \alpha^{-2} c_-^2 \end{matrix} \right\| d\alpha = \sum_{q=0}^\infty d_q \left\| \begin{matrix} (c_-/2)^{2q+n+m+2} \\ (c_-/2)^{2q+n+m} \end{matrix} \right\| \times \int_0^{\tilde{k}} K(\alpha) \left\| \begin{matrix} \alpha^{2q+n+m+2} \\ \alpha^{2q+n+m} \end{matrix} \right\| d\alpha, \quad (25)$$

где

$$d_q = \frac{(-1)^q \Gamma(2q+n+m+2)}{q! \Gamma(q+n+2) \Gamma(q+m+2) \Gamma(q+n+m+2)}.$$

Для вычисления интегралов на полубесконечном интервале разложим радикал по обратным степеням α . Например, несобственный интеграл из (23) запишется следующим образом:

$$\int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2}} d\alpha = \sum_{q=0}^\infty \frac{a_q}{q!} \int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^{2q+1}} d\alpha = I_{n,m}^0 - I_{n,m}^1 + \sum_{q=1}^\infty \frac{a_q}{q!} \int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^{2q+1}} d\alpha. \quad (26)$$

где

$$a_q = \frac{\tilde{k}^{2q} \Gamma(1/2+q)}{\sqrt{\pi}};$$

$$I_{n,m}^0 = \int_0^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha} d\alpha;$$

$$I_{n,m}^1 = \int_0^A \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha} d\alpha.$$

Воспользовавшись формулами 7.14.2 (32), 7.14.1 (10), 7.2.4 (29) из [7] и 5.55 из [5], получим

$$I_{n,m}^0 = \begin{cases} \frac{2 \sin[(n-m)\pi/2]}{\pi(n-m)(n+m+2)}, & n \neq m, \\ \frac{1}{2(n+1)}, & n = m, \end{cases} \quad (27)$$

$$I_{n,m}^1 = c_- A \times \frac{J_n(c-A) J_{m+1}(c-A) - J_{n+1}(c-A) J_m(c-A)}{(n-m)(n+m+2)} - \frac{J_{n+1}(c-A) J_{m+1}(c-A)}{(n+m+2)}, \quad n \neq m, \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^2 &= \frac{J_\mu(c-A)}{2\mu} - \frac{c-A}{2\mu} \times \\
 &\times \left[-J_\mu(c-A) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (c-A/2)^{\mu+2l+1} \times \right. \\
 &\quad \times \frac{\psi(\mu+l+2)}{l! \Gamma(\mu+l+2)} - \\
 &\quad \left. -J_{\mu+1}(c-A) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (c-A/2)^{\mu+2l} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\psi(\mu+l+1)}{l! \Gamma(\mu+l+1)} \right], \quad n = m,
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

где $\mu = n+1$, $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера.

Поступая аналогичным образом и с интегралом из выражения (24), имеем

$$\begin{aligned}
 &\frac{a_q}{q!} \int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^{2q+2}} d\alpha = \\
 &= I_{n,m}^2 - I_{n,m}^3 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_q}{q!} \int_A^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^{2q+2}} d\alpha,
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^2 &= \int_0^\infty \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha; \\
 I_{n,m}^3 &= \int_0^A \frac{J_{n,m}(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Используя формулу 6.574 (2) из [5], получим

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^2 &= \frac{c-}{4} \frac{\Gamma((n+m+2)/2)}{\Gamma(3/2+(n-m)/2)} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\Gamma(3/2+(m-n)/2)} \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\Gamma((n+m+5)/2)}.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Для вычисления $I_{n,m}^3$ воспользуемся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^3 &= \frac{1}{(n+m+1)} \left\{ \frac{J_{n,m}(A)}{A} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^A \frac{J_{n+1}(c-\alpha) J_{m+2}(c-\alpha)}{\alpha} d\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^A \frac{J_{n+2}(c-\alpha) J_{m+1}(c-\alpha)}{\alpha} d\alpha \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Содержащиеся здесь интегралы вычисляются аналогично приведенным выше.

Формулы (22) и (23) тем точнее, чем больше A , которое можно уменьшить, если подключить следующие слагаемые асимптотики (10). Для вычисления коэффициентов f_m воспользуемся квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности Гаусса [8], т. е.

$$\begin{aligned}
 f_m &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) U_m(x) dx \approx \\
 &\approx \frac{\pi}{l+1} \sum_{j=1}^l \sin \frac{j\pi}{l+1} \sin \frac{(m+1)j\pi}{l+1} f\left(\cos \frac{j\pi}{l+1}\right).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Решая бесконечную систему (15) и подставляя найденные значения φ_n в выражение (14), получим окончательно решение интегрального уравнения (11).

3. ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ И СМЕЩЕНИЙ

Подставив полученное решение (14) интегрального уравнения (11) с учетом формулы (7) в выражения (4) и (5), искомое волновое поле и поле напряжений запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \left\| \begin{matrix} u_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{matrix} \right\| &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m \int_{-1}^1 \frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-s^2} U_m(s) \times \\
 &\quad \times \left\| \begin{matrix} P(\lambda) \\ R(\lambda) \end{matrix} \right\| e^{-i\lambda c-(x-s)} d\lambda ds + \left\| \begin{matrix} u_\varphi^0 \\ \tau_{r\varphi}^0 \end{matrix} \right\|,
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= i(k^2 - \lambda^2) H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2 w \lambda^2}) \times \\
 &\quad \times J_2(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}), \\
 R(\lambda) &= i(k^2 - \lambda^2) H_2^{(1)}(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}) \times \\
 &\quad \times J_2(r\sqrt{k^2 - \lambda^2}).
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Перепишем внутренний интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \begin{matrix} P(\lambda) \\ R(\lambda) \end{matrix} \right\| e^{-i\lambda c-(x-s)} d\lambda = \\
 &= \int_0^\infty \left\| \begin{matrix} P(\lambda) \\ R(\lambda) \end{matrix} \right\| e^{-i\lambda c-(x-s)} d\lambda + \\
 &\quad + \int_0^\infty \left\| \begin{matrix} P(\lambda) \\ R(\lambda) \end{matrix} \right\| e^{i\lambda c-(x-s)} d\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Подставляя выражение (36) в уравнение (34) и используя формулу 7.321 из [5], получаем уравнение

$$\left\| \begin{matrix} u_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{matrix} \right\| = \frac{R}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \sqrt{m+1} \psi_m \left\| \begin{matrix} L_m^1(x) \\ L_m^2(x) \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} u_\varphi^0 \\ \tau_{r\varphi}^0 \end{matrix} \right\|, \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} L_m^1(x) \\ L_m^2(x) \end{matrix} \right\| &= \int_0^{\infty} \left\| \begin{matrix} P(\lambda) \\ R(\lambda) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} J_{m+1}(c-\lambda) \\ \lambda \end{matrix} \right\| e^{-i\lambda c-x} d\lambda + \\ &+ (-1)^{m+1} \int_0^{\infty} \left\| \begin{matrix} P(\lambda) \\ R(\lambda) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} J_{m+1}(c-\lambda) \\ \lambda \end{matrix} \right\| e^{i\lambda c-x} d\lambda. \end{aligned}$$

Разбивая интервал интегрирования $(0, \infty) = (0, k) + (k, \infty)$ в $L_m^1(x)$, можем записать

$$L_m^1(x) = \frac{1}{2\pi} [Y_m^1(x) + \Psi_m^1(x)], \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} Y_m^1(x) &= \int_0^k \frac{P(\lambda) J_{m+1}(c-\lambda)}{\lambda} e^{-i\lambda c-x} d\lambda + \\ &+ (-1)^{m+1} \int_0^k \frac{P(\lambda) J_{m+1}(c-\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda c-x} d\lambda, \\ \Psi_m^1(x) &= \int_k^{\infty} \frac{P^*(\lambda) J_{m+1}(c-\lambda)}{\lambda} e^{-i\lambda c-x} d\lambda + \\ &+ (-1)^{m+1} \int_k^{\infty} \frac{P^*(\lambda) J_{m+1}(c-\lambda)}{\lambda} e^{i\lambda c-x} d\lambda, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} P^*(\lambda) &= i(\lambda^2 - k^2) K_0(R\sqrt{\lambda^2 - k^2}) \times \\ &\times I_2(R\sqrt{\lambda^2 - k^2}). \end{aligned} \quad (40)$$

Рассматривая отдельно случаи четного и нечетного индекса, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} Y_{2j}^1(x) \\ Y_{2j+1}^1(x) \end{matrix} \right\| &= \int_0^k \frac{P(\lambda) J_{m+1}(c-\lambda)}{\lambda} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(\lambda c-x) \\ -\sin(\lambda c-x) \end{matrix} \right\| d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \Psi_{2j}^1(x) \\ \Psi_{2j+1}^1(x) \end{matrix} \right\| &= \int_k^{\infty} \frac{P^*(\lambda) J_{m+1}(c-\lambda)}{\lambda} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(\lambda c-x) \\ -\sin(\lambda c-x) \end{matrix} \right\| d\lambda, \end{aligned} \quad (41)$$

$$j = 0, \infty.$$

Займемся вычислением несобственных интегралов из выражения (41). Сделав замену переменной $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = t$, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \Psi_{2j}^1(x) \\ \Psi_{2j+1}^1(x) \end{matrix} \right\| &= \int_0^{\infty} \frac{t P^*(t) J_{m+1}(c-\sqrt{t^2+k^2})}{t^2+k^2} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(c-x\sqrt{t^2+k^2}) \\ \sin(c-x\sqrt{t^2+k^2}) \end{matrix} \right\| dt, \end{aligned} \quad (42)$$

где $P^*(t) = t^2 K_0(rt) I_2(Rt)$. Используя асимптотику подынтегрального выражения по переменной интегрирования, для достаточно большого A можем записать следующее:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \Psi_{2j}^1(x) \\ \Psi_{2j+1}^1(x) \end{matrix} \right\| &= \int_0^A \frac{t P^*(t) J_{m+1}(c-\sqrt{t^2+k^2})}{t^2+k^2} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(c-x\sqrt{t^2+k^2}) \\ \sin(c-x\sqrt{t^2+k^2}) \end{matrix} \right\| dt - \left\| \begin{matrix} Q^1(x) \\ Q^2(x) \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} G^1(x) \\ G^2(x) \end{matrix} \right\|, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\left\| \begin{matrix} Q_1(x) \\ Q_2(x) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} Q_1^+(x) - Q_1^-(x) \\ Q_2^+(x) - Q_2^-(x) \end{matrix} \right\|;$$

$$\left\| \begin{matrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} G_1^+(x) - G_1^-(x) \\ G_2^+(x) - G_2^-(x) \end{matrix} \right\|;$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} Q_1^\pm \\ Q_2^\pm \end{matrix} \right\| &= \frac{1}{2c-\sqrt{rR}} \int_0^A \frac{t^2 e^{-(r-R)t}}{(t^2+k^2)^{5/4}} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(\sqrt{t^2+k^2}c_-(x\pm 1) \mp \gamma) \\ \sin(\sqrt{t^2+k^2}c_-(x\pm 1) \mp \gamma) \end{matrix} \right\| dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} G_1^\pm \\ G_2^\pm \end{matrix} \right\| &= \frac{1}{\sqrt{c-rR}} \int_0^{\infty} \frac{t^2 e^{-(r-R)t}}{(t^2+k^2)^{3/4}} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(\sqrt{t^2+k^2}c_-(x\pm 1) \mp \gamma) \\ \sin(\sqrt{t^2+k^2}c_-(x\pm 1) \mp \gamma) \end{matrix} \right\| dt. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = (m+1)/2 + \pi/4$. Используя разложение биномов в ряд по обратным степеням λ и ограничиваясь только первым членом, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} G_1^\pm \\ G_2^\pm \end{matrix} \right\| &= -\frac{1}{2\sqrt{rR}} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(r-R)t}}{t^{1/2}\sqrt{t^2+k^2}} \times \\ &\times \left\| \begin{matrix} \cos(\sqrt{t^2+k^2}c_-(x\pm 1) \mp \gamma) \\ \sin(\sqrt{t^2+k^2}c_-(x\pm 1) \mp \gamma) \end{matrix} \right\| dt. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя стандартные соотношения для тригонометрических функций, перепишем G_i^\pm , $i=1,2$ так:

$$\begin{pmatrix} G_1^\pm \\ G_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \Phi_1^\pm(x) \pm \sin \gamma \Phi_2^\pm(x) \\ \cos \gamma \Phi_2^\pm(x) \mp \sin \gamma \Phi_1^\pm(x) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_1^\pm(x) \\ \Phi_2^\pm(x) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{e^{-(r-R)t}}{t^{1/2} \sqrt{t^2 + k^2}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{t^2 + k^2} c_-(x \pm 1)) \\ \sin(\sqrt{t^2 + k^2} c_-(x \pm 1)) \end{pmatrix} dt. \end{aligned} \quad (46)$$

Учитывая формулы из [9], получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi_1^\pm(x) \\ \Phi_2^\pm(x) \end{pmatrix} &= \frac{\pi}{4} \frac{d}{dr} (\pi p)^{1/2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} J_{1/4}(z_1) J_{1/4}(z_2) + Y_{1/4}(z_1) Y_{1/4}(z_2) \\ Y_{1/4}(z_1) J_{1/4}(z_2) - J_{1/4}(z_1) Y_{1/4}(z_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $p=r-R$, $z_{1,2}=k(b^2+p^2)\pm b$, $b=c_-(x\pm 1)$. Подставляя выражения (46), (42), (39) в (38) получим окончательную формулу для вычисления $L_m^1(x)$, которая тем точнее, чем больше A . Аналогичным образом подсчитывается и $L_m^2(x)$. Следовательно, учитывая полученные формулы для $L_m^1(x)$, $L_m^2(x)$ и используя (37), можно подсчитать поле напряжений и смещений.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

В рассматриваемой задаче практический интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений (КИН) на краях трещины: при $z=a-0$ и $z=b+0$, т. е.

$$\begin{aligned} K_{III}^- &= \lim_{z \rightarrow a-0} \sqrt{2\pi(a-z)} \tau_{r\varphi}(R, z), \\ K_{III}^+ &= \lim_{z \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(z-b)} \tau_{r\varphi}(R, z), \end{aligned} \quad (48)$$

или с учетом замен (7)

$$\begin{aligned} K_{III}^- &= \lim_{z \rightarrow -1-0} \sqrt{2\pi c_-(-x-1)} \tau_{r\varphi}(R, c_+ + c_- x), \\ K_{III}^+ &= \lim_{z \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi c_-(x-1)} \tau_{r\varphi}(R, c_+ + c_- x), \end{aligned} \quad (49)$$

и при этом согласно соотношениям (2) и (5), а также с учетом замен (7)

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}(R, c_+ + c_- x) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{4\pi R^2} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \left[\ln \frac{1}{|x-\xi|} + R_*(c_- x - c_- \xi) \right] \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \tau_{r\varphi}^0(R, c_+ + c_- x), \quad |x| > 1. \end{aligned} \quad (50)$$

Чтобы выполнить предельный переход (49), необходимо продолжить спектральное соотношение (34) на интервал $|x| > 0$. С этой целью воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{P_m^{\alpha, l-\alpha}(s) ds}{(1-s)^{-\alpha} (1+s)^{l-\alpha}} &= \\ &= 2^{m+l+1} (-1)^{l+1} \times \\ &\times \frac{\Gamma(1+m+\alpha) \Gamma(1+l+m-\alpha) \Gamma(1+l+m)}{m! \pi \Gamma(2+l+2m) (x-1)^{1+l+m}} \times \\ &\times F(1+m+\alpha, 1+l+m; 2+2l+2m; 2(1-x)^{-1}), \end{aligned}$$

вытекающим из результатов работы [10], после чего содержащуюся здесь функцию Гаусса аналитически продолжим в окрестность $x=-1$ с помощью формулы 9.131 (2) из [5] и затем примем $l=1$, $\alpha=1/2$, а также учтем, что

$$P_m^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(s) = (m+1)!^{-1} (3/2)_m U_m(s).$$

В результате вместо выражения (13) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \sqrt{1-s^2} U_m(s) ds &= \\ &= -\frac{2^{m+1} (m+1)}{(x-1)^{m+2} m!} \times \\ &\times F\left(3/2+m, m+2; 3/2; \frac{x+1}{x-1}\right) - \\ &- \frac{2^{m+2} (m+1)^2}{(x-1)^{m+2}} \sqrt{\frac{1-x}{-x-1}} \times \\ &\times F\left(3/2+m, m+1; 1/2; \frac{x+1}{x-1}\right), \end{aligned} \quad (51)$$

$x < -1$.

Располагая этим соотношением, легко подсчитать K_{III}^- . Пользуясь формулами (50), (51) и (14), находим

$$C^{*-1} K_{III}^- = \sqrt{\frac{\pi c_-}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \sqrt{m+1} \psi_m. \quad (52)$$

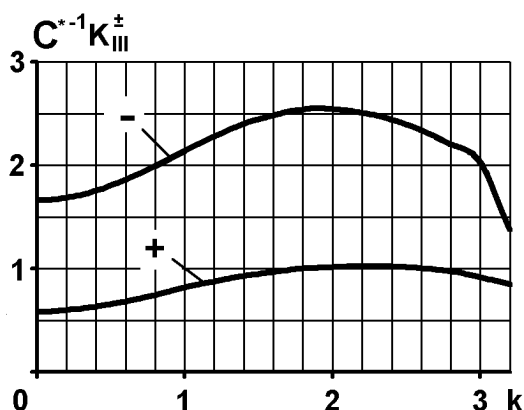


Рис. 1. Значение коэффициента интенсивности в зависимости от волнового числа

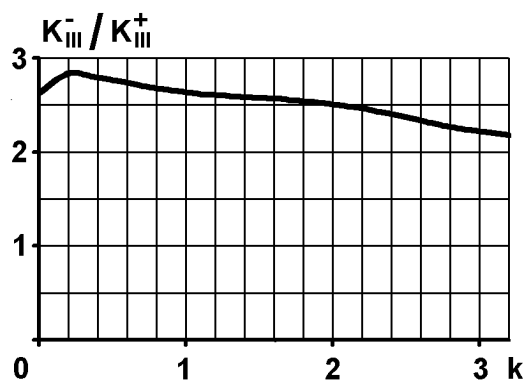


Рис. 2. Значение отношения коэффициентов интенсивности на концах трещины

Для вычисления K_{III}^{+} следует функцию Гаусса аналитически продолжить в окрестность $x=1$ с помощью формулы 9.132 (2) из [5]. Используя те же соображения, что и при получении формулы (53), приходим к равенству

$$C^{*-1}K_{III}^{+} = \sqrt{\frac{\pi c_-}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} \psi_m. \quad (53)$$

По формулам (52) и (53) выполнено вычисление КИН в зависимости от волнового числа. Результаты вычислений приведены на рис. 1. Вычисления проводились при отношении $l/R=2$. Как и следовало ожидать, КИН у края трещины, менее удаленного от источника излучения (центра вращения), имеет более высокое значение.

Из приведенного рисунка видно, что максимум КИН на дальнем конце трещины достигается при $k=2.2$, а на ближнем – при $k=1.9$. На рис. 2 изображен график изменения отношения этих коэффициентов в зависимости от волнового числа. Так, для волнового числа $k=0.2$ это отношение оказывается максимальным и равно 2.8.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ ТРЕЩИНЫ

Для изучения волнового поля на больших расстояниях от дефекта получим асимптотическое представление полученного решения при $r \gg R$. Для этого воспользуемся асимптотическими разложениями функций Ханкеля и Макдональда для больших значений аргумента, удержав там главный член. Тогда вместо соотношений (35) и (40)

получим

$$P(\lambda) = i \sqrt{\frac{2}{\pi r}} (k^2 - \lambda^2)^{3/4} \times e^{i(r\sqrt{k^2 - \lambda^2} - \pi/4)} J_2(R\sqrt{k^2 - \lambda^2}), \quad (54)$$

$$P^*(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (\lambda^2 - k^2)^{3/4} \times e^{-r\sqrt{\lambda^2 - k^2}} I_2(R\sqrt{\lambda^2 - k^2}),$$

Подставив эти выражения в уравнение (37) и сделав там замену

$$\beta^2 = r^2 + x^2, \quad (55)$$

$$x = \beta \cos \theta, \quad r = \beta \sin \theta,$$

вместо выражения (38) будем иметь

$$Y^1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \beta \sin \theta}} \times \int_{-k}^k e^{-i\beta(\cos \theta c_- \lambda - \sin \theta \sqrt{\lambda^2 - k^2})} F(\lambda) d\lambda, \quad (56)$$

$$\Psi^1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \beta \sin \theta}} \times \left\{ \int_{k_0}^{\infty} e^{-\beta(\sin \theta \sqrt{\lambda^2 - k^2} + i \cos \theta c_- \lambda)} F^*(\lambda) d\lambda + (-1)^{m+1} \int_k^{\infty} e^{-\beta(\sin \theta \sqrt{\lambda^2 - k^2} - i \cos \theta c_- \lambda)} F^*(\lambda) d\lambda \right\}, \quad (57)$$

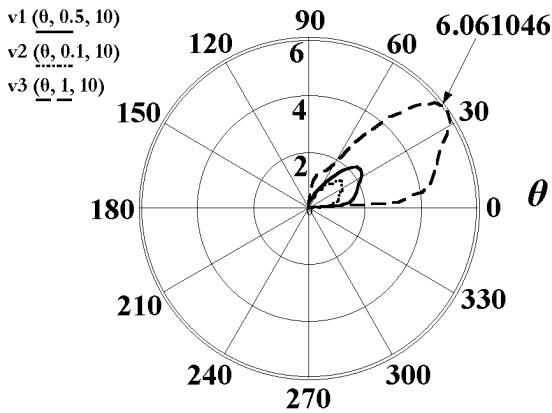


Рис. 3. Диаграмма направленности

где

$$F(\lambda) = \frac{J_2(R\sqrt{k^2 - \lambda^2})}{(\sqrt{k^2 - \lambda^2})^{-3/4}} \frac{J_{m+1}(c_- \lambda)}{\lambda},$$

$$F^*(\lambda) = \frac{I_2(R\sqrt{\lambda^2 - k^2})}{(\sqrt{\lambda^2 - k^2})^{-3/4}} \frac{J_{m+1}(c_- \lambda)}{\lambda}.$$

Можно показать, что сингулярность при $\theta = 0$ устранима.

Нам необходимо получить асимптотики интегралов (56) и (57) при $\beta \rightarrow \infty$. Сделав в выражении (56) замену $\cos \theta c_- \lambda - \sin \theta \sqrt{k^2 - \lambda^2} = \mu$, получим

$$Y^1(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi \beta \cos \theta}} \int_{-kc_- \cos \theta}^{kc_- \cos \theta} e^{-i\beta \mu} F[a(\mu)] d\mu, \quad (58)$$

где

$$a(\mu) = \frac{\mu c_- \cos \theta + \sin \theta \sqrt{k^2 (\sin^2 \theta + c_-^2 \cos^2 \theta) - \mu^2}}{\sin^2 \theta + c_-^2 \cos^2 \theta}.$$

Фактически мы получили интеграл Фурье. Следуя [11], получаем оценку этого интеграла при $\beta \rightarrow \infty$:

$$Y^1(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi \beta \cos \theta}} \frac{1}{\beta} \times (e^{-i\beta k c_- \cos \theta} f(k c_- \cos \theta) - e^{i\beta k c_- \cos \theta} f(-k c_- \cos \theta)), \quad (59)$$

Сделав в выражении (57) аналогичную замену $i \cos \theta c_- \lambda - \sin \theta \sqrt{k^2 - \lambda^2} = \mu$, получим интеграл Лапласа

$$\Psi^1(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi \beta \sin \theta}} \left\{ \int_{ikc_- \cos \theta}^{\infty} e^{-\beta \mu} F^*[g(\mu)] d\mu + (-1)^{m+1} \int_{ikc_- \cos \theta}^{\infty} e^{\beta \mu} F^*[g(\mu)] d\mu \right\}, \quad (60)$$

где

$$g(\mu) = \frac{i\mu c_- \cos \theta + \sin \theta \sqrt{k^2 (\sin^2 \theta + c_-^2 \cos^2 \theta) + \mu^2}}{\sin^2 \theta + c_-^2 \cos^2 \theta}.$$

Разлагая функцию $F^*[g(\mu)]$ в ряд Маклорена и почленно интегрируя его, удержав первый член ряда, получаем

$$\Psi^2(x) = \sqrt{2} \pi \beta \cos \theta \frac{1}{\beta^{3/2}} e^{-i\beta k c_- \sin \theta} \times \left\{ F^*[g(ikc_- \sin \theta)] + (-1)^{m+1} F^*[g(ikc_- \sin \theta)] \right\}. \quad (61)$$

Подставляя выражения (60), (61) в (37), получаем окончательно формулу для исследования поля перемещений на больших расстояниях от дефекта. При помощи формул (37), (60) и (61) проведено численное исследование перемещений на больших расстояниях от дефекта при значениях $\omega/c_2 = 0.1, 0.5, 1$ соответственно и $\beta = 10$ в зависимости от угла θ и получена диаграмма направленности. Результаты приведены на рис. 3, из которого следует, что с ростом волнового числа перемещения упругой среды увеличиваются (при изменении в пределах 0.1–1.0), достигая своих максимальных значений при $\theta = \pi/4$, для всех значений волнового числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показывают эффективность использования метода разрывных решений при сведении задачи к интегро-дифференциальному уравнению, с последующим использованием метода ортогональных многочленов для эффективного приближенного решения этого уравнения. Полученное приближенное решение позволило легко найти КИН у обоих краев трещины и выяснить, что КИН у ближнего к источнику излучения края трещины больше, причем для волнового числа $k = 0.2$ в 2.8 раза. Своего максимального значения КИН на ближнем краю достигает

при $k=1.9$. Полученное решение позволило построить диаграмму направленности, т. е. зависимость перемещений упругой среды на фиксированном расстоянии от угла наблюдения к оси трещины ($\theta=0, \dots, \pi/2$) и волнового числа $k=0.1, \dots, 1$. Оказалось, что своих максимальных значений перемещения достигают для указанных значений волнового числа при $\theta=\pi/4$. С ростом волнового числа перемещения увеличиваются.

1. Мартыненко М. А., Улитко А. Ф. Решение осесимметричной задачи для упругого тела с цилиндрической трещиной // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1982.– N 10.– С. 43–47.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.– М.: Наука, 1982.– 342 с.
3. Попов Г. Я. Задачи о концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферических слоистых средах // ПММ.– 1998.– 62, N 4.– С. 840–853.
4. Попов Г. Я. Решение динамической задачи о концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферической слоистой среде // Докл. РАН.– 1998.– 360, N 4.– С. 483–487.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1962.– 1108 с.
6. Канторович Л. В. Акилов Г. П. Функциональный анализ.– М.: Наука, 1977.– 741 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя.– М.: Наука, 1966.– 295 с.
8. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.– М.: Наука, 1967.– 327 с.
9. Oberhettinger F., Badii L. Tables of Laplace.– Berlin: Springer, 1973.– 428 p.
10. Попов Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби // Укр. мат. ж.– 1968.– 20, N 4.– С. 540–547.
11. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.– М.: Наука, 1978.– 375 с.