

УДК 534.23

ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В. В. МЕЛЕШКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 05.01.99

Построены аналитические решения двумерных задач об излучении звука пьезокерамическим прямоугольным излучателем в акустическое полупространство, экранированное мягким или жестким экраном. Приведены диаграммы направленности давления в дальнем поле, которые хорошо согласуются с экспериментальными результатами. Оценена эффективность излучения звука на нескольких модах планарных колебаний прямоугольного излучателя.

Побудовано аналітичні розв'язки двовимірних задач про випромінювання звуку п'єзокерамічним прямокутним випромінювачем в акустичний півпростір, покритий м'яким або жорстким екраном. Наведено діаграми напрямленості по тиску в дальньому полі, які добре узгоджуються з результатами експериментів. Оцінено ефективність випромінювання звуку на декількох модах планарних коливань прямокутного випромінювача.

The analytical solutions for two-dimensional problems on sound radiation by a rectangular piezoceramic transducer into acoustic half-space baffled with soft or rigid screen have been obtained. The far-field pressure directivity patterns have been constructed; they are in a good agreement with experimental data. The efficiency of sound radiation for several normal modes of planar vibration of the rectangular transducer has been estimated.

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности возбуждения и распространения акустических волн в экранированном полупространстве, начиная с классического трактата Рэлея [1], являются предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований. В связи с разработкой и созданием устройств ультразвуковой акустоскопии для медицинских целей [2–5] задачи об излучении звука в экранированные среды получили еще одну область практического применения. При этом, как отмечено в [3], “для улучшения работы таких устройств необходимо иметь лучшее представление о работе электромеханических преобразователей, а не улучшать их электронные части”. Преобразователи, применяемые в таких системах, имеют вид длинных прямоугольных пьезокерамических брусков, поляризованных по толщине. Они работают в той области частот, где уже неприменимо представление о “поршневом” характере распределения по ширине бруска нормальной к излучающей поверхности колебательной скорости. Это наглядно показывают работы [2–7], в которых проведено сравнение экспериментальных и расчетных (в предположении о равномерном распределении скорости на активной границе) характеристик дальнего поля давления в полупространстве и обнаружено их значительное расхождение.

Данные работ [8–10] показывают, что для массивных пьезокерамических излучателей в виде

толстых дисков и прямоугольных длинных брусков, расположенных в акустически жестком экране, задание на активной поверхности излучателя колебательной скорости без учета обратной реакции акустической среды не вносит принципиальных погрешностей в дальнее поле давления. Это допущение оправдывается, в основном, большим различием характерных импедансов излучателя и среды. Данные экспериментальных работ [11, 12] указывают также на незначительное обратное влияние акустической среды на частоты и формы колебаний излучателей.

Для правильного теоретического описания дальнего поля необходимо иметь правильное распределение колебательной скорости по поверхности излучателя, отвечающее данной собственной частоте колебаний. Несмотря на отдельные попытки [2, 3, 13, 14] учесть характер мод колебаний длинных прямоугольных брусков при решении плоских акустических задач, отсутствие в этих статьях должного понимания и систематизации резонансных свойств таких излучателей в окрестности толщинного резонанса не позволяет говорить о существенном продвижении в решении такой комплексной задачи.

Важное значение при определении акустического поля имеют граничные условия на пассивной границе полупространства. Если для акустически жесткого экрана применение интеграла Рэлея [1, 15] приводит к полному решению поставленной задачи, то в случае акустически мягкого экрана

решение смешанной граничной задачи встречает определенные трудности.

В настоящей статье на основе аналитических решений граничных задач излучения проведено исследование дальнего поля и энергетических характеристик процесса возбуждения акустических волн в экранированной полуплоскости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую задачу о генерации гармонических волн в акустическом полупространстве $|x| \leq \infty, y \geq 0$ при воздействии нормальной колебательной скорости $v_0 f(x)$ на активном участке $|x| \leq a$, создаваемой прямоугольным пьезокерамическим излучателем $|x| \leq a, -2b \leq y \leq 0$, при наличии акустически жесткого или мягкого экрана $|x| \geq a, y = 0$ на остальной части границы. Акустическая среда характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c .

Амплитудные величины двумерного поля скорости $\mathbf{v} = (u, v)$ и давления p в жидкости определяются акустическим потенциалом $\varphi(x, y)$ как

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad p = i\rho\omega\varphi. \quad (1)$$

Здесь и далее гармонический временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (2)$$

с граничными условиями на поверхности $y = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{cases} v_0 f(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} \quad (3)$$

для акустически жесткого экрана и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= v_0 f(x), & |x| \leq a, \\ \varphi &= 0, & |x| \geq a \end{aligned} \quad (4)$$

для акустически мягкого экрана. Функция $f(x)$ предполагается четной и допускающей представление интегралом или рядом Фурье.

Средний за период поток мощности W , подводимый через границу $y = 0$, определяется как

$$W = \int_{-a}^a w_y dx, \quad (5)$$

где

$$w_y = \frac{1}{4} (p^* v + p v^*) = -\frac{\rho\omega v_0}{2} f(x) \operatorname{Im} \varphi(x, 0) \quad (6)$$

и * обозначает комплексное сопряжение.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Решение поставленной задачи о генерации звука в акустическом полупространстве состоит из двух этапов: определение распределения колебательной скорости $f(x)$ на заданной резонансной частоте излучателя и определение акустического потенциала для двух типов экрана.

2.1. Планарные моды колебаний излучателя

В предположении об отсутствии обратного влияния акустической среды на частоты и формы колебаний излучателя, вид функции $f(x)$ определяется независимо из решения задачи о двумерных колебаниях прямоугольника $|x| \leq a, -2b \leq y \leq 0$. Такое решение, построенное методом суперпозиции, подробно изложено в [16] и мы не будем его здесь воспроизводить. Отметим только, что решение обеспечивает надежное определение всех мод колебаний прямоугольника, включая и тонкую структуру спектра собственных частот в окрестности частоты "толщинного" резонанса.

2.2. Акустическая задача для жесткого экрана

Решение граничной задачи (2), (3) может быть получено при помощи метода преобразования Фурье по координате x . Это решение имеет вид

$$\varphi(x, y) = -\frac{v_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(s)}{\gamma} e^{-\gamma y + isx} ds, \quad (7)$$

где $\gamma^2 = s^2 - k^2$ и

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(s) e^{isx} ds, \\ \bar{f}(s) &= \int_{-a}^a f(x) e^{-isx} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Представление (7) является, по существу, суперпозицией частных решений в виде плоских волн. Граничное условие (3) не конкретизирует выбор знака квадратного корня при вычислении γ и должно быть дополнено указанием на направленность процесса для однозначного решения. В данном случае дополнительные условия должны выражать тот физический факт, что единственным источником энергии колебаний является поверхностная нагрузка, и плоские волны должны быть либо убывающими по y (неоднородные волны), либо убегаящими от границы $y = 0$. Это однозначно

определяет значение γ как

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{s^2 - k^2}, & |s| \geq k, \\ -i\sqrt{k^2 - s^2}, & |s| \leq k. \end{cases} \quad (9)$$

Используя представление для функции Ханкеля первого рода нулевого порядка

$$H_0^{(1)}(kr_1) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma y + is(x-x_1)}}{\gamma} ds,$$

где $r_1^2 = (x-x_1)^2 + y^2$, выражение (7) можно записать в виде

$$\varphi(x, y) = -v_0 \frac{i}{2} \int_{-a}^a f(x_1) H_0^{(1)}(kr_1) dx_1. \quad (10)$$

Иной подход к вычислению интеграла в (7) основывается на привлечении метода контурного интегрирования в комплексной плоскости. Целесообразность перехода к контурному интегрированию связана с возможностью вывода для φ асимптотического представления в дальнем поле при больших значениях kr , где $r^2 = x^2 + y^2$, то есть на расстояниях, существенно больших длины волны. Получение такой оценки основывается на использовании стандартной процедуры метода наискорейшего спуска [16]. Для точек внутри полупространства $|\theta| < \pi/2$, где $\theta = \arctg(x/y)$, получаем для давления в дальнем поле выражение

$$p(r, \theta) = \rho\omega v_0 P_h(\theta) \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O\left((kr)^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (11)$$

где

$$P_h(\theta) = \bar{f}(k \sin \theta). \quad (12)$$

Если функция $f(x)$ аппроксимируется конечным отрезком ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{m=0}^M f_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (13)$$

то выражение для направленности в дальнем поле может быть записано в виде

$$P_h(\theta) = 2a \sum_{m=0}^M (-1)^m f_m \frac{ka \sin \theta \sin(ka \sin \theta)}{(ka \sin \theta)^2 - (m\pi)^2}. \quad (14)$$

Исходя из соотношений (5) и (6), можно подсчитать мощность W_h , подводимую от источника к акустическому полупространству с жестким экраном:

$$W_h = \frac{\rho\omega v_0^2}{2\pi} \int_0^k \frac{\bar{f}^2(s)}{\sqrt{k^2 - s^2}} ds. \quad (15)$$

2.3. Акустическая задача для мягкого экрана

Граничная задача (2) и (4) для акустически мягкого экрана легко решается при переходе к эллиптическим координатам ξ, η согласно формулам

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \\ y &= a \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (2) в новых координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + k^2 a^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \varphi = 0, \quad (17)$$

а граничные условия (4) суть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= v_0 a \sin \eta f(a \cos \eta), & \xi = 0, & 0 < \eta < \pi, \\ \varphi &= 0, & \eta = 0, & 0 \leq \xi \leq \infty, \\ \varphi &= 0, & \eta = \pi, & 0 \leq \xi \leq \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение уравнения (17) может быть представлено в виде [17]

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi, q) \operatorname{se}_n(\eta, q), \quad (19)$$

где $q = (ka/2)^2$, а $\operatorname{se}_n(\eta, q)$ и $\operatorname{Ne}_n^{(1)}(\xi, q)$ – нечетная периодическая функция Матье и модифицированная функция Матье третьего рода (аналог функции Ханкеля в цилиндрических координатах) порядка n , соответственно. Такое решение удовлетворяет условию излучения и требованию четности по координате x . Выбор только нечетных индексов в ряде (19) обеспечивает тождественное выполнение второго граничного условия в (18). Первое граничное условие с учетом ортогональности и полноты системы функций $\operatorname{se}_n(\eta, q)$ дает

$$\begin{aligned} C_n &= v_0 a \frac{F_n}{\operatorname{Ne}_n^{(1)'}(0, q)}, & n = 1, 3, \dots, \\ F_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(a \cos \eta) \operatorname{se}_n(\eta, q) \sin \eta d\eta. \end{aligned} \quad (20)$$

Привлекая выражение (13) для функции $f(x)$, коэффициенты F_n могут быть выражены посредством быстро сходящихся рядов

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[B_{2k+1}^{(n)} - B_{2k-1}^{(n)} \right] \times \\ &\quad \times \sum_{m=0}^M f_m J_{2k}(m\pi). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $B_{-1}^{(n)} = 0$, а $B_{2k+1}^{(n)}$ при $k = 0, 1, \dots$ представляют коэффициенты Фурье в разложении

$$se_n(\eta, q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}^{(n)} \sin(2k+1)\eta.$$

Окончательно получаем выражение для потенциала

$$\varphi(\xi, \eta) = v_0 a \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} F_n \frac{Ne_n^{(1)}(\xi, q)}{Ne_n^{(1)'(0, q)} se_n(\eta, q). \quad (22)$$

Используя асимптотическое представление [17] функции $Ne_n^{(1)}(r, q)$ при $\xi = r \rightarrow \infty$, приходим к представлению для давления в дальнем поле

$$p(r, \theta) = \rho c v_0 P_s(\theta) \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}), \quad (23)$$

где

$$P_s(\theta) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} F_n p_n se_n\left(\frac{\pi}{2} - \theta, q\right), \quad (24)$$

и

$$p_n = \frac{se_n'(0, q) se_n\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{B_1^{(n)} Ne_n^{(1)'(0, q)} = \frac{g_{0,n}}{1 + if_{0,n}}, \quad (25)$$

а величины $f_{0,n}$ и $g_{0,n}$ являются табулированными [18] множителями связи функций Матье. Характер убывания этих множителей таков, что при практических вычислениях достаточно сохранить лишь первые три слагаемые в ряде для $P_s(\theta)$.

Подставляя в (5) и (6) выражение (22), для подводимой от источника мощности получаем

$$W_s = \frac{1}{4} \rho \omega \pi v_0^2 a^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} F_n^2 \frac{g_{0,n}^2}{1 + f_{0,n}^2}. \quad (26)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Остановимся вначале на данных о формах нормальных колебаний прямоугольного излучателя. В экспериментах [2] в качестве излучателя выбирался брусок из пьезокерамики PZT-4 (скорость сдвиговых волн $c_s = 1860$ м/с) с длиной, шириной и толщиной, равной 20, 4 и 2.5 мм соответственно. Первые измеренные четыре собственные частоты колебаний такого излучателя суть 370, 530, 640 и 760 кГц. Такие частоты соответствуют первым четырем частотам планарных колебаний изотропного упругого прямоугольника при $a/b = 1.6$ (рис. 1). Распределение нормальной колебательной скорости по полуширине излучателя приведено на рис. 2. Важно отметить, что распределение

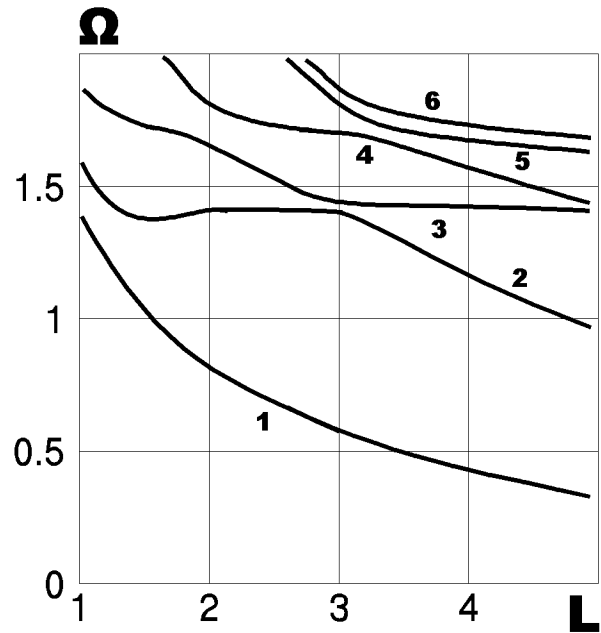


Рис. 1. Спектр собственных частот планарных колебаний изотропного упругого прямоугольника: зависимость $\Omega = 2\omega b / (\pi c_s)$ от $L = a/b$

скорости на второй моде имеет уже локализацию вблизи края, характерную для краевого резонанса [16].

Остановимся вначале на картинах диаграмм направленности по давлению $|P_s(\theta)|$ такого излучателя, расположенного в акустически жестком экране. Результаты расчетов согласно формуле (14), отвечающие действительному распределению (рис. 2) колебательной скорости по ширине излучателя, представлены на рис. 3. Штриховыми линиями показаны зависимости $|P_s(\theta)|$ для случая равномерного распределения колебательной скорости для тех же значений ka . Во всех четырех случаях имеет место существенное отличие между двумя диаграммами направленности, что подтверждает вывод экспериментальных работ [5, 7, 13] о необходимости учета неравномерного [16] распределения колебательной скорости на активной части границы. Штриховая кривая на рис. 3, б показывает, что данные эксперимента [2] находятся в хорошем качественном соответствии с данными расчетов. Неравномерность в поведении экспериментальной кривой при углах, близких к 90° , связана с возбуждением неоднородной поверхностной волны на границе раздела твердое тело – жидкость. Распределение колебательной скорости по ширине излучателя для третьей моды, отвечающей нача-

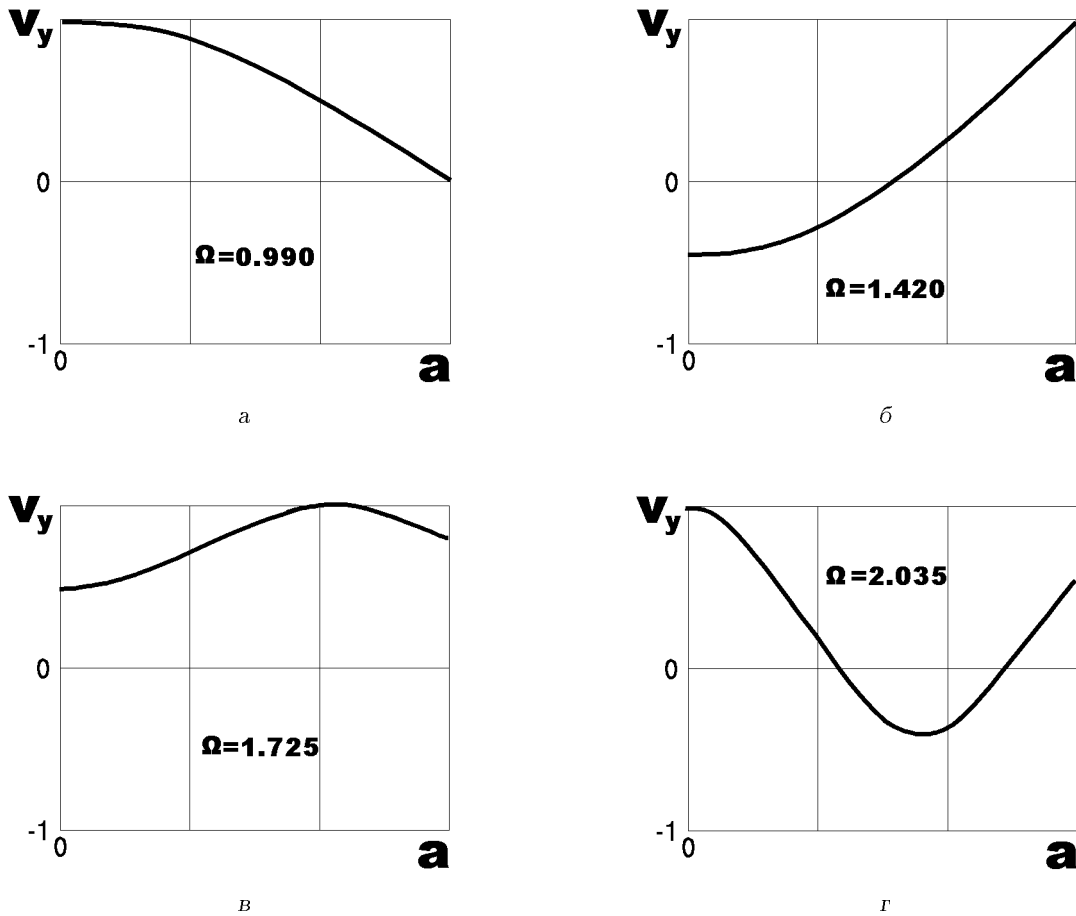


Рис. 2. Распределение нормальной колебательной скорости по полушрине излучателя:
 а - первая мода, $\Omega=0.99$; б - вторая мода, $\Omega=1.42$; в - третья мода, $\Omega=1.72$; г - четвертая мода, $\Omega=2.03$

лу “толщинной” моды колебаний прямоугольника (см. рис. 1), приводит к незначительному изменению диаграммы направленности по сравнению с равномерным распределением скорости. Это особенно наглядно видно на фоне четвертой моды, для которой характерна сравнительно слабая зависимость дальнего поля от угла θ . Такое свойство представляет значительный интерес для медицинских применений акустоскопии [5]. Учитывая хорошую изолированность данной собственной частоты, можно рекомендовать именно такой режим работы преобразователя для практических применений.

Характеристики диаграмм направленности такого же прямоугольного излучателя в мягком экране при $ka=4.45$ представлены сплошными линиями на рис. 4. Данные на рис. 4, а относятся к случаю постоянного по ширине распределению ко-

лебательной скорости, а результаты на рис. 4, б - для истинного распределения скорости, отвечающего второй (краевой) моде колебаний прямоугольника. Штриховой линией показаны экспериментальные результаты [2], причем в первом случае преобразователь составлялся из четырех синфазно работающих стержней шириной по 1 мм с почти равномерным распределением колебательной скорости. Видно, что для мягкого экрана также имеет место хорошее согласование экспериментальных и расчетных данных. В совокупности эти результаты показывают, что знание действительного распределения колебательной скорости по поверхности излучателя позволяет правильно описать диаграмму направленности в дальнем поле. Расхождение между расчетом и экспериментом при $0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$ на рис. 4, б также свидетельствует о необходимости учитывать характер распре-

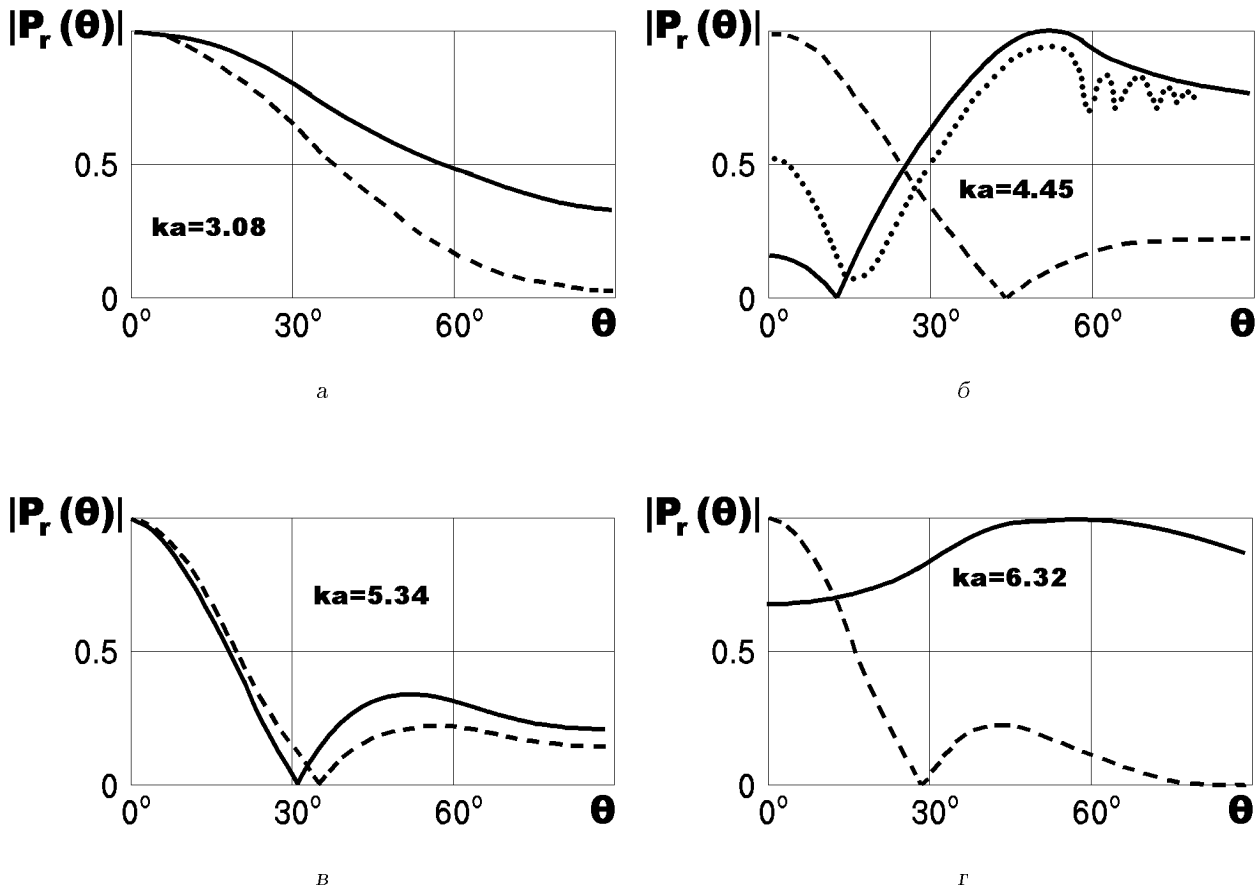


Рис. 3. Направленность дальнего поля при акустически жестком экране:
 а - первая мода, $ka = 3.08$; б - вторая мода, $ka = 4.45$; в - третья мода, $ka = 5.34$; г - четвертая мода, $ka = 6.32$

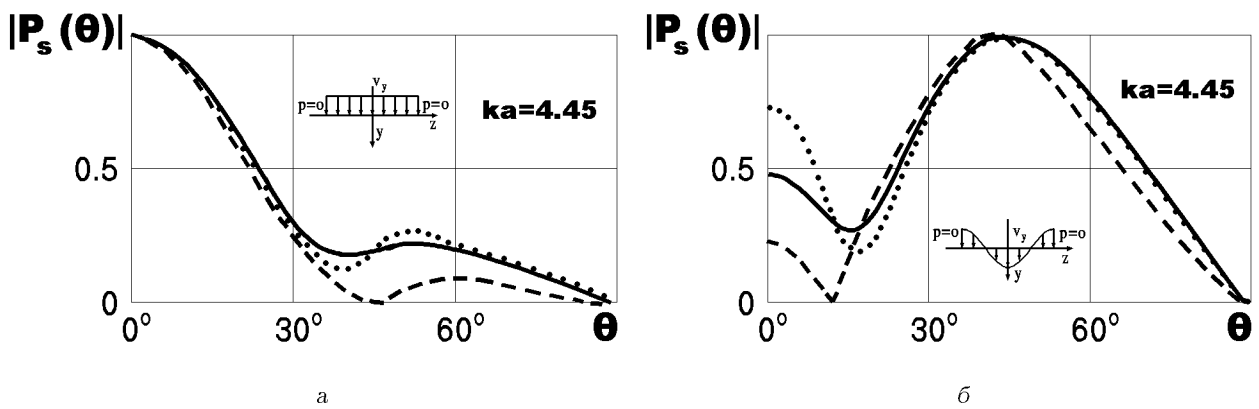


Рис. 4. Направленность дальнего поля при акустически мягком экране:
 а - первая мода, $ka = 3.08$; б - вторая мода, $ka = 4.45$

Таблица. Безразмерная излучаемая мощность w

ka	Равномерное распределение		Действительное распределение	
	мягкий экран	жесткий экран	мягкий экран	жесткий экран
3.08	1.007	0.975	1.164	1.433
4.45	1.016	1.006	76.398	87.741
5.34	1.040	1.021	1.200	1.181
6.32	0.978	0.984	15.605	10.985

деления колебательной скорости преобразователя на заданной частоте.

Относительная сложность решения смешанной акустической граничной задачи (2), (4) привела авторов [19] к рассмотрению ее приближенной постановки с применением гипотезы об “импедансных” условиях [20] на активном участке границы, так называемом, приближении Кирхгоффа. При этом давление на экране полагается пропорциональным известной скорости и такая, уже не смешанная, граничная задача решается применением интеграла Рэлея. Для характеристики диаграммы направленности в дальнем поле получаем соотношение $P_i(\theta) = \cos \theta P_h(\theta)$, в котором $P_h(\theta)$ определяется формулой (11). Результаты расчета по такой формуле показаны штриховыми линиями на рис. 4. Видно, что в целом такой приближенный подход является оправданным и позволяет предсказать качественно характеристики направленности в дальнем поле.

Энергетические оценки влияния типа граничных условий и способа возбуждения колебаний в акустическую среду проводятся на основе соотношений (15), (26). В таблице содержатся данные о безразмерной величине $w = W/v_0^2$, а ρc (действительная часть удельного импеданса источника) для равномерного и действительного распределения колебательной скорости по ширине излучателя. То, что для равномерного распределения скорости величины w близки к единице, является естественным, если учесть [20] поведение на высоких частотах импеданса равномерно осциллирующего полосового излучателя. В случае первой и третьей мод колебаний распределение нормальной скорости не сильно отличается от равномерного (рис. 2) и поэтому значение w также не сильно превосходит единицу. Вторая и четвертая моды колебаний имеют противофазные участки, что обуславливает больший вклад высших гармоник ряда Фурье в выражение (13). Поэтому, хотя распределение этих скоростей имеет интегрально меньшую амплитуду, чем v_0 , величины излучаемых мощностей существенно возрастают. При этом, тип экрана не сильно изменяет эти вели-

чины – значительно большее влияние на энергетические характеристики имеет распределение колебательной скорости по поверхности излучателя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ полученных экспериментальных и теоретических результатов позволяет сделать вывод о том, что решающее значение для оценки всех характеристик волнового поля в экранированном акустическом полупространстве имеет способ распределения колебательной скорости по поверхности излучателя. Данные о таком распределении могут быть получены на основе детального изучения мод колебаний тел конечных размеров в широком частотном диапазоне.

1. Стретт Д. В. (Лорд Рэлей) Теория звука.– Т. 2.– М.: ГИТТЛ, 1955.– 475 с.
2. Dellannoy B, Bruneel C., Haine F., Torguet R. Anomalous behavior in the radiation pattern of piezoelectric transducers induced by parasitic Lamb wave generation // J. Appl. Phys.– 1980.– 51.– P. 3942–3948.
3. Dellannoy B, Bruneel C., Lasota H, Ghazaleh M. Theoretical and experimental study of the Lamb wave eigenmodes of vibration in terms of the transducer thickness to width ratio // J. Appl. Phys.– 1981.– 52.– P. 7433–7438.
4. Dellannoy B, Torguet R., Bruneel C., Bridoux E., Ronvaen J. M., Lasota H, Acoustical image reconstruction in parallel-processing analog electronic systems // J. Appl. Phys.– 1979.– 50.– P. 3153–3159.
5. Smith S. W., Ramm O. T., Haran M. E., Thurstone F. L. Angular response of piezoelectric element in phase array ultrasound scanners // IEEE Trans. Sonics Ultrason.– 1979.– SU-26.– P. 185–191.
6. Drost C. J., Milanowsky G. J. Self-reciprocity calibration of arbitrary terminated ultrasonic transducers // IEEE Trans. Sonics Ultrason.– 1980.– SU-27.– P. 65–71.
7. Sato J., Fukukita H., Kawabuchi M. Farfield angular radiation pattern generated from arrayed piezoelectric transducers // J. Acoust. Soc. Amer.– 1980.– 67.– P. 333–335.
8. Kagawa Y., Yamabuchi T. Finite element simulation of a composite piezoelectric ultrasonic transducer // IEEE Trans. Sonics Ultrason.– 1979.– SU-26.– P. 81–89.

9. Maxwell G. G., Hixon E. L. Acoustic radiation from a long solid rod into a semiinfinite liquid medium // J. Acoust. Soc. Amer.- 1973.- **53**.- P. 88-95.
10. Wellekens C. J. Vibrations of backed piezoceramic disk-transducers with annular electrodes and matching layers // IEEE Trans. Sonics Ultrason.- 1982.- **SU-29**.- P. 26-42.
11. Arnold J. S., Martner J. G. Description of the resonances of short solid barium titanate cylinders // J. Acoust. Soc. Amer.- 1959.- **31**.- P. 217-226.
12. Shaw E. A. G., Sujir R. J. Vibration patterns of loaded barium titanate and quartz disks // J. Acoust. Soc. Amer.- 1960.- **32**.- P. 1463-1467.
13. Pappalardo M. Some experimental data for the design of acoustic arrays // J. Sound Vibr.- 1977.- **52**.- P. 579-586.
14. Sato J., Kawabuchi M., Fukumoto A. Dependence of the electromechanical coupling coefficient on the width-to-thickness ratio of plank-shaped piezoelectric transducers used for electronically scanned ultrasound and diagnostic systems // J. Acoust. Soc. Amer.- 1979.- **66**.- P. 1609-1611.
15. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы.- М.: Мир, 1971.- 558 с.
16. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.- К.: Наук. думка, 1981.- 284 с.
17. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложение функций Матье.- Москва: ИЛ, 1953.- 476 с.
18. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.- М.: Наука, 1979.- 830 с.
19. Dellanoy B, Lasota H, Bruneel C., Torguet R., Bridoux E. The infinite planar baffles problem in acoustic radiation and its experimental verification // J. Appl. Phys.- 1979.- **50**.- P. 5189-5195.
20. Morse P. M., Ingar K. U. Theoretical acoustics.- New York: McGraw-Hill, 1968.- 927 p.