

УДК 534.26

ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ОБЛАСТЬ СОПРЯЖЕНИЯ ПЛОСКОГО И КЛИНОВИДНОГО ВОЛНОВОДОВ

В. Т. МАЦЫПУРА

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

Получено 4.12.98 ◊ Пересмотрено 4.02.99

Построено решение задачи о распространении звука в структуре, представляющей собой сопряжение плоского и клиновидного волноводов. Характеристики поля представлены через собственные функции плоского и клиновидного волновода. Для согласования полей двух волноводов в рассмотренную введена промежуточная область в виде части круга. Введение такой области позволило строго согласовать звуковые поля в волноводах различной геометрии. Исследована зависимость энергетического коэффициента прохождения звука через зону сопряжения от параметров волновода и изменения при этом структуры звукового поля. Проанализированы условия излучения поршня, расположенного в плоском волноводе с рупором.

Побудовано розв'язок задачі про розповсюдження звуку в структурі, що являє собою спрjaження плоского та клиновидного хвилепроводів. Характеристики поля представлені через власні функції плоского і клиновидного хвилепроводів. Для узгодження полів двох хвилепроводів у розгляд введено проміжну область у вигляді частини кола. Введення такої області дозволило строго узгодити звукові поля у хвилепроводах різної геометрії. Досліджено залежність енергетичного коефіцієнта проходження звуку через зону спрjaження від параметрів хвилепровода і зміну при цьому структури звукового поля. Проаналізовано умови випромінювання поршня, розташованого в плоскому хвилепроводі з рупором.

Solution of a problem on sound propagation in the structure that is a coupling of plane and wedge-shaped waveguides has been developed. Field characteristics are being represented through eigenfunctions of the plane and the wedge-shaped waveguides. To match the fields of the two waveguides the intermediate domain having the shape of part of circle has been introduced into consideration. This introduction has allowed to match exactly the sound fields in waveguides of different geometry. There the dependence of the energy coefficient of sound propagation through a zone of coupling on the parameters of waveguide. Also, the corresponding changes in structure of the field have been investigated. The conditions of radiation of a piston situated in the plane waveguide with horn have been analysed.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, связанные с изучением структуры волновых полей в волноводах с переменным сечением, представляют большой интерес для различных областей физики и технологии, включая антенны, сейсмологию, океанологию [1–3]. Задачи этого типа подразделяются на два класса – задачи, в которых рассматриваются волноводы с медленно и плавно меняющейся геометрией, и задачи о распространении звука в волноводах с резким изменением поперечного сечения. Ко второму классу относится задача прохождения волны через сопряжение плоского и клиновидного волноводов (рис. 1), которая неоднократно привлекала к себе внимание специалистов в области акустики и электродинамики. При этом большая часть работ посвящена частному случаю: излучению из волновода с плоским фланцем (рис. 1, б). Детальный анализ этой задачи для случая распространения в плоском волноводе нулевой моды проделан в работах [4, 6]. В работе [5] рассмотрена задача возбуждения звукового поля в волноводе с жестким фланцем при падении звука из полупространства. Излучение плоской волны из волновода

с рупором (рис. 1, а), рассмотрено в работе [7]. В ней предлагается приближенное решение, приводящее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода. Анализ системы уравнений позволяет получить численные результаты при малых волновых размерах волновода и ограниченной величине угла раскрытия рупора. Работа [8] посвящена обсуждению проблем и трудностей, возникающих при решении ряда задач распространения волн в неоднородных волноводах; в том числе рассматривается волновод с рупором. При этом автор обращает большое внимание на необходимость корректного представления характеристик волнового поля на различных участках неоднородного волновода. Указываются примеры, когда отсутствие такой корректности исключает возможность получения достоверных количественных оценок.

В предлагаемой статье на основе метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях, который изложен в работе [9], построено строгое решение задачи прохождения звука через сопряжение плоского и клиновидного волноводов при произвольном угле раскрытия клиновидного волновода. Анализ решения позволяет

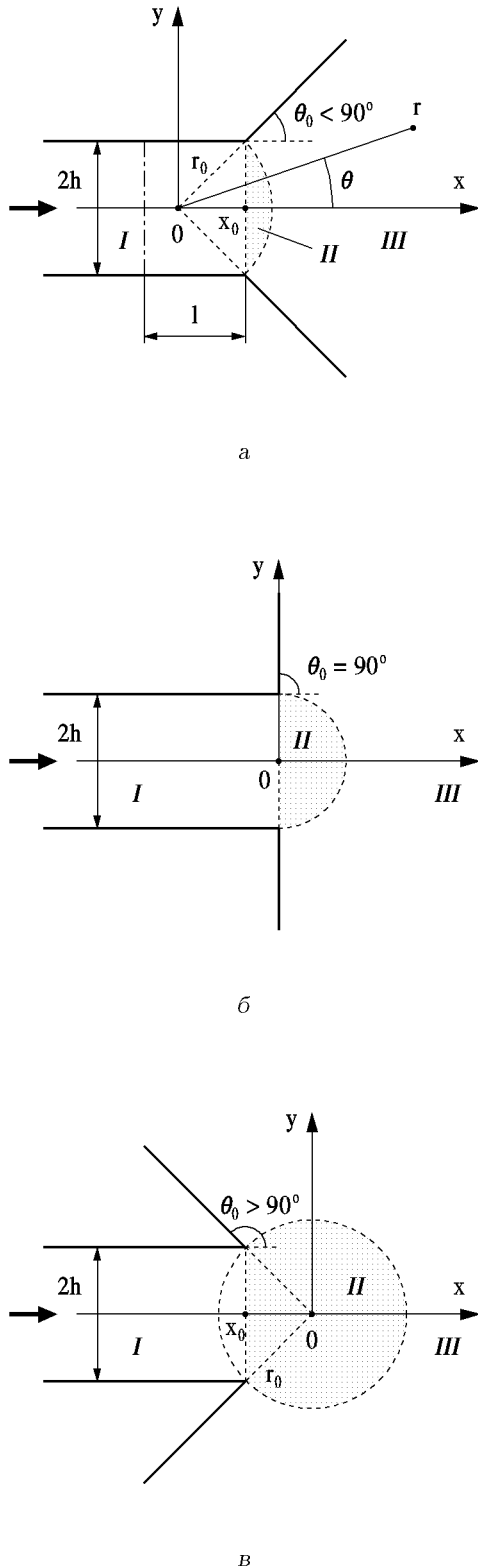


Рис. 1. Геометрия волноводной структуры

определить энергию волны, прошедшей через зону сопряжения и исследовать структуру звукового поля. Решена также задача о поршне, излучающем в волновод с рупором. Ее результаты раскрывают характер нагрузки со стороны волновода на колеблющийся поршень.

1. ПОСТАНОВКА И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространения звука в волноводе, показанном на рис. 1. Плоский полубесконечный волновод сопрягается с клиновидным волноводом с углом раскрыва $2\theta_0$. Характерный размер плоского волновода равен $2h$. Как показано на рис. 1, угол раскрыва клиновидного волновода θ_0 может быть острым, прямым или тупым. Волноводная структура заполнена идеальной жидкостью с плотностью ρ и скоростью звука c . Характеристики гармонического звукового поля внутри волновода определяются через функцию потенциала скоростей Φ , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad k = \omega/c, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа; ω – частота гармонической волны; временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается. Поверхности волновода определены абсолютно жесткими, тогда производная по нормали от потенциала скоростей на этих поверхностях равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_s = 0. \quad (2)$$

Согласно рис. 1, а, вводятся декартова (x, y) и полярная (r, θ) системы координат с общим центром в точке O . Вся область существования звукового поля разбивается на три области, показанные на рис. 1: область I – плоский полубесконечный волновод $x \leq x_0, |y| \leq h$; область III – клиновидный волновод $r \geq r_0, |\theta| \leq \theta_0$; область II представляет собой часть круга радиуса r_0 , разделяющая области I и III .

Пусть из минус бесконечности в области I на зону сопряжения плоского и клиновидного волноводов набегают одна из распространяющихся нормальных волн (мод) области I . В результате ее взаимодействия с зоной сопряжения образуются отраженная и прошедшая в область III волны. В соответствии с методом частичных областей следует записать выражения для звуковых полей в областях I, II, III . Каждое из этих выражений является общим представлением для потенциала скоростей, позволяющее выполнить граничные условия на границах и условия сопряжения

между областями. Для области I это представление включает в себя набегающую волну и полную совокупность распространяющихся и неоднородных отраженных волн:

$$\Phi_I(x, y) = \cos(\alpha_q y) e^{ik_q(x-x_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) e^{-ik_n(x-x_0)}, \quad (3)$$

где q – номер нормальной волны, набегающей на зону сопряжения волноводов; величина α_n определяется согласно условию (2) на жестких поверхностях плоского волновода, а именно:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h}, \quad k_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}, & k > \alpha_n; \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}, & k < \alpha_n. \end{cases} \quad (4)$$

Совокупность произвольных коэффициентов A_n позволяет выполнить условия сопряжения на границе с областью II . Прошедшая в области III волна представляется в виде суперпозиции нормальных волн клиновидного волновода. Это выражение естественно представить в полярных координатах:

$$\Phi_{III}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) H_{\beta_n}^{(1)}(kr). \quad (5)$$

Здесь $\beta_n = n\pi/\theta_0$; $H_{\beta_n}^{(1)}(kr)$ – функция Ханкеля первого рода. Выбор угловых функций в решении (5) обеспечивает выполнение граничных условий на сторонах клиновидного волновода, а радиальные функции выбраны в соответствии с условиями излучения. Последовательность произвольных коэффициентов B_n должна быть определена из условий сопряжения с областью II . Для построения общего решения граничной задачи в области II , с учетом характера ее границы, следует использовать частные решения уравнения Гельмгольца в декартовой и полярной системах координат [9]. При этом общее решение будет иметь отличия для случая угла раскрыва клиновидного волновода $\theta_0 \leq 90^\circ$ (см. рис. 1, а, б) и для $\theta_0 > 90^\circ$ (см. рис. 1, в).

1.1. Построение решения при угле раскрыва $\theta_0 \leq 90^\circ$

На границе между областями I и II при $x = x_0$; $|y| \leq h$ (см. рис. 1, а, б) полной и ортогональной является система функций $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. На границе между областями II и III при $r = r_0$, $|\theta| \leq \theta_0$ такими же свойствами обладает система

функций $\cos(\beta_m \theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. В связи с этим потенциал звукового поля в области II можно представить в виде

$$\Phi_{II} = \Phi_{II}^{(1)} + \Phi_{II}^{(2)}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_{II}^{(1)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n y) e^{ik_n(x-x_0)}; \quad (7)$$

$$\Phi_{II}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\beta_n \theta) J_{\beta_n}(kr); \quad (8)$$

$J_{\beta_n}(kr)$ – функции Бесселя первого рода.

Условия сопряжения между выделенными областями, согласно рис. 1, а, б, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_{II} \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} \end{aligned} \right\} x = x_0, \quad |y| \leq h, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{II} &= \Phi_{III} \\ \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r} \end{aligned} \right\} r = r_0, \quad |\theta| \leq \theta_0.$$

Подстановка решений (3), (5), (6) в условия (9), с учетом формул, определяющих связь между декартовой и полярной системами координат, приводит к системе функциональных уравнений. Использование свойства ортогональности системы функций $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и системы функций $\cos(\beta_m \theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ позволяет провести алгебраизацию функциональной системы. В результате образуется бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов A_n , B_n , C_n , D_n . Ввиду громоздкости система уравнений не приводится.

1.2. Построение решения при угле раскрыва $\theta_0 > 90^\circ$

В этом случае, согласно рис. 1, в, центр полярной системы координат (точка O) находится внутри области II . Отсюда угловые функции, входящие в определение звукового поля в области II , должны быть периодическими с периодом, равным 2π , что соответствует полному обходу вокруг точки O при фиксированном расстоянии r . Очевидно, что условию периодичности с периодом 2π не удовлетворяет система функций $\cos(\beta_m \theta)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ в выражении (8) для звукового поля $\Phi_{II}^{(2)}$. Поэтому ее следует заменить на систему

функций $\cos(m\theta)$, $m=0, 1, 2, \dots$, которая обладает необходимой периодичностью и является полной и ортогональной на интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Таким образом, поле в области II по-прежнему определяется соотношением $\Phi_{II} = \Phi_{II}^{(1)} + \Phi_{II}^{(2)}$; причем, если $\Phi_{II}^{(1)}$ определяется выражением (7), то для $\Phi_{II}^{(2)}$ следует записать новое соотношение:

$$\Phi_{II}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\theta) J_n(kr). \quad (10)$$

Однако конфигурация границы области II (см. рис. 1, в) не позволяет воспользоваться полнотой и ортогональностью системы функций $\cos(m\theta)$, $m=0, 1, 2, \dots$ при алгебраизации условий сопряжения на границах областей. Указанную трудность можно преодолеть, опираясь на результаты работы [9]. Следует для решения $\Phi_{II}^{(2)}$ дополнить границу до полной окружности радиуса r_0 . На рис. 1, в – это штриховая линия в области I $r=r_0, |\theta| \geq \theta_0$. Дополнив границу области II до полной окружности, получаем возможность использовать полноту и ортогональность системы функций $\cos(m\theta)$ при выполнении граничных условий. Однако трудность заключается в том, что на введенном дополнительном участке границы в исходной постановке задачи условия не заданы. Принципиальным моментом в данном подходе является то, что при формировании условий сопряжения на дополнительном участке границы может быть задано произвольное значение колебательной скорости или давления [9]. Пусть оно определяется некоторой функцией $f(r_0, \theta)$.

Тогда для углов раскрыва $\theta_0 > 90^\circ$ (рис. 1, в) появляются два варианта формирования условий сопряжения звуковых полей на границах выделенных областей. Первый, при продолжении давления на дополнительном участке, выглядит так:

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_{II}, & x &= x_0, & |y| &\leq h, \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x}, & x &= x_0, & |y| &\leq h, \\ \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r}, & r &= r_0, & |\theta| &\leq \theta_0, \\ \left\{ \begin{aligned} \Phi_{II} &= \Phi_{III}, & r &= r_0, & |\theta| &\leq \theta_0, \\ \Phi_{II}^{(2)} &= f(r_0, \theta), & r &= r_0, & \theta_0 &\leq |\theta| \leq \pi. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (11)$$

Второй при продолжении колебательной скорости

имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_{II}, & x &= x_0, & |y| &\leq h, \\ \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x}, & x &= x_0, & |y| &\leq h, \\ \Phi_{II} &= \Phi_{III}, & r &= r_0, & |\theta| &\leq \theta_0, \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} &= \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial r}, & r &= r_0, & |\theta| &\leq \theta_0, \\ \frac{\partial \Phi_{II}^{(2)}}{\partial r} &= f(r_0, \theta), & r &= r_0, & \theta_0 &\leq |\theta| \leq \pi. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (12)$$

Алгебраизация первых двух уравнений в системах (11) и (12) происходит за счет системы функций $\cos(\alpha_n y)$, третьего уравнения – посредством системы функций $\cos(\beta_n \theta)$ и, наконец, четвертого, которое включает два равенства объединенных фигурной скобкой, – за счет системы функций $\cos(n\theta)$. Поскольку при практическом решении задачи приходится иметь дело с конечной системой уравнений, полученной после редукции бесконечной системы, следует обратить внимание на выбор функции $f(r_0, \theta)$. Анализ постановки задачи может указать на предпочтительное задание функции $f(r_0, \theta)$ с целью устранения скачка звукового поля в районе угловых точек $r=r_0, \theta=\pm\theta_0$.

Полученное решение позволяет провести анализ звукового поля в рассматриваемой волноводной структуре (см. рис. 1). Представляет интерес определение углового распределения интенсивности в клиновидном волноводе, т.е. расчет характеристики направленности по интенсивности:

$$R_J^{(q)}(r, \theta) = \frac{|\Phi_{III}(r, \theta)|^2}{|\Phi_{III}(r, \theta^*)|_{\max}^2} \quad (13)$$

где q – номер набегающей моды в области I ; θ^* – угол, определяющий направление максимальной интенсивности звука в области III . С учетом асимптотики функций Ханкеля $H_{\beta_n}^{(1)}(kr)$ при $kr \rightarrow \infty$, формула (13) примет вид

$$R_J^{(q)}(\theta) = \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta) e^{-i\beta_n \pi/2} \right|^2}{\left| \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n \theta^*) e^{-i\beta_n \pi/2} \right|^2}. \quad (14)$$

Важное значение имеют энергетические характеристики распространения звуковой волны через зону сопряжения плоского и клиновидного волноводов. Коэффициент прохождения $W^{(q)}$ определяется как отношение среднего потока мощности

волны в области *III* к среднему потоку мощности q -ой нормальной волны, набегающей на зону сопряжения волноводов в области *I*. После ряда преобразований получаем следующую формулу для коэффициента прохождения:

$$W^{(q)} = \frac{2\theta_0}{\pi h \mathbf{Re}(k_q) \varepsilon_q} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |B_n|^2, \quad (15)$$

где $\varepsilon_0 = 2$; $\varepsilon_n = 1$, $n > 0$. Согласно выражению (15), коэффициент прохождения $W^{(q)}$ представляется в виде суммы энергетических коэффициентов возбуждения нормальных волн области *III*, или иначе, о выражении (15) можно говорить как о сумме коэффициентов трансформации q -ой нормальной волны области *I* в нормальные волны области *III*.

Аналогично коэффициент отражения $V^{(q)}$ представляется в виде

$$V^{(q)} = \frac{1}{\mathbf{Re}(k_q) \varepsilon_q} \sum_{n=0}^N \varepsilon_n \mathbf{Re}(k_n) |A_n|^2. \quad (16)$$

Здесь число N определяет количество распространяющихся мод области *I*. Из закона сохранения энергии вытекает необходимость выполнения условия

$$V^{(q)} + W^{(q)} = 1.$$

1.3. Излучение плоского поршня в волновод с рупором

Построенное решение позволяет также рассмотреть задачу о колебании жесткого поршня, расположенного в области *I* на расстоянии l от зоны сопряжения плоского и клиновидного волноводов (см. рис. 1, а). Пусть поршень совершает гармонические колебания с частотой ω . Тогда к системе уравнений (9) добавляется условие на поверхности колеблющегося поршня:

$$-\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = v_0, \quad x = x_0 - l, \quad |y| < h, \quad (17)$$

где v_0 – амплитуда колебательной скорости поршня. В этом случае поле в области *I* можно записать в виде

$$\Phi_I(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(k_n(x - x_0)) + E_n \sin(k_n(x - x_0))] \cos(\alpha_n y). \quad (18)$$

В такой задаче следует анализировать величину сопротивления излучения поршня Z . Определим

величину Z относительно значения $(2h\rho c)$ – сопротивления излучения поршня в бесконечном плоском волноводе:

$$Z = \frac{1}{(2h\rho c)v_0} \int_{-h}^h p dy, \quad (19)$$

где $p = -i\omega\rho\Phi_I(x = x_0 - l, y)$ – амплитуда давления на поверхности поршня. Решая систему уравнений (9), (17) и расписывая формулу (19), приходим к такому выражению для сопротивления излучения поршня в волноводе с рупором

$$Z = -i[A_0 \cos(kl) - E_0 \sin(kl)]. \quad (20)$$

Здесь величина $v_0/k = 1$.

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Бесконечная система уравнений решалась методом редукции. Пусть числа N_1, N_2, N_3 определяют количество учитываемых мод в областях *I, II, III* при проведении редукции. При анализе полученных результатов, в первую очередь, представляет интерес степень выполнения условий сопряжения звуковых полей на границах выделенных областей. Сравнение значений скоростей частиц и давления, вычисленных при подходе к границе раздела с различных частей волновода, является главным компонентом процедуры оценки точности полученного результата численного решения.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда угол раскрытия $\theta_0 \leq 90^\circ$. На рис. 2 показаны графики невязки по давлению (кривая 1) и колебательной скорости (кривая 2) вдоль границы, разделяющей выделенные области на рис. 1, а, б. Рис. 2, а соответствует границе между областями *I* и *II*, рис. 2, б – между областями *II* и *III*, $2h = 0.4\lambda$, $\theta_0 = 70^\circ$, $N_1 = N_2 = N_3 = 7$. На зону сопряжения набегают нулевая мода области *I* ($q = 0$). Невязка определялась как отношение модуля разности звукового поля (давления или колебательной скорости) слева и справа от границы к амплитуде поля в волне, набегающей на зону сопряжения плоского и клиновидного волноводов. Приведенные на рисунках кривые указывают на высокую точность выполнения условий сопряжения звуковых полей практически вдоль всей границы раздела областей. Некоторое ухудшение согласования наблюдается лишь в окрестности угловых точек границы области. Это обстоятельство легко объяснимо с учетом наличия сингулярности в окрестности угловых точек в акустических полях. Такие локальные погрешности не оказывают существенного влияния на значения

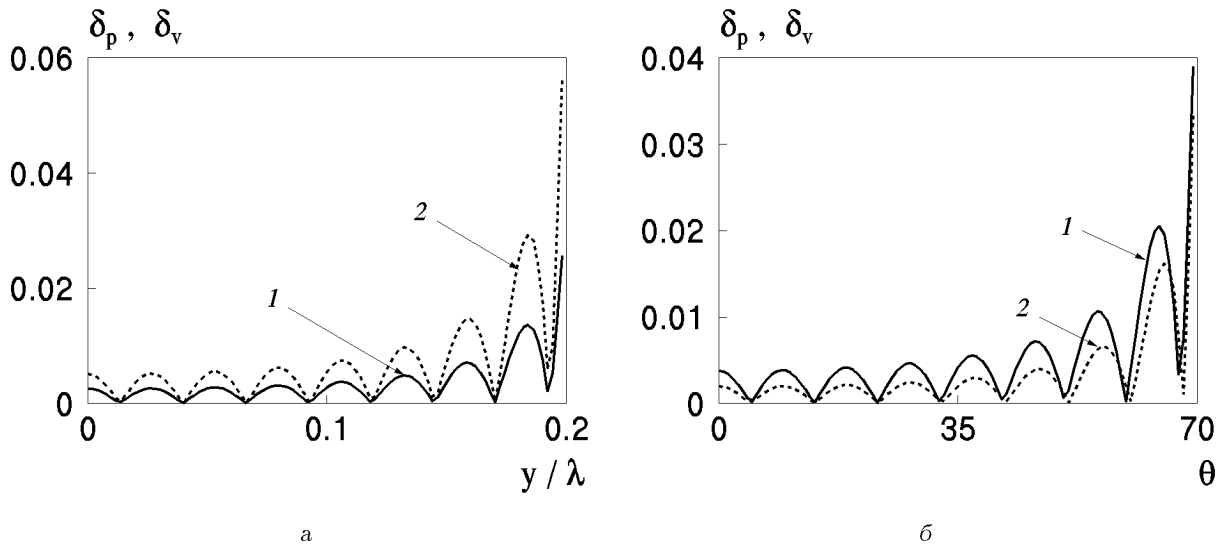


Рис. 2. Невязка по давлению (кривая 1) и скорости (кривая 2):
 а - вдоль границы областей I и II; б - вдоль границы областей II и III

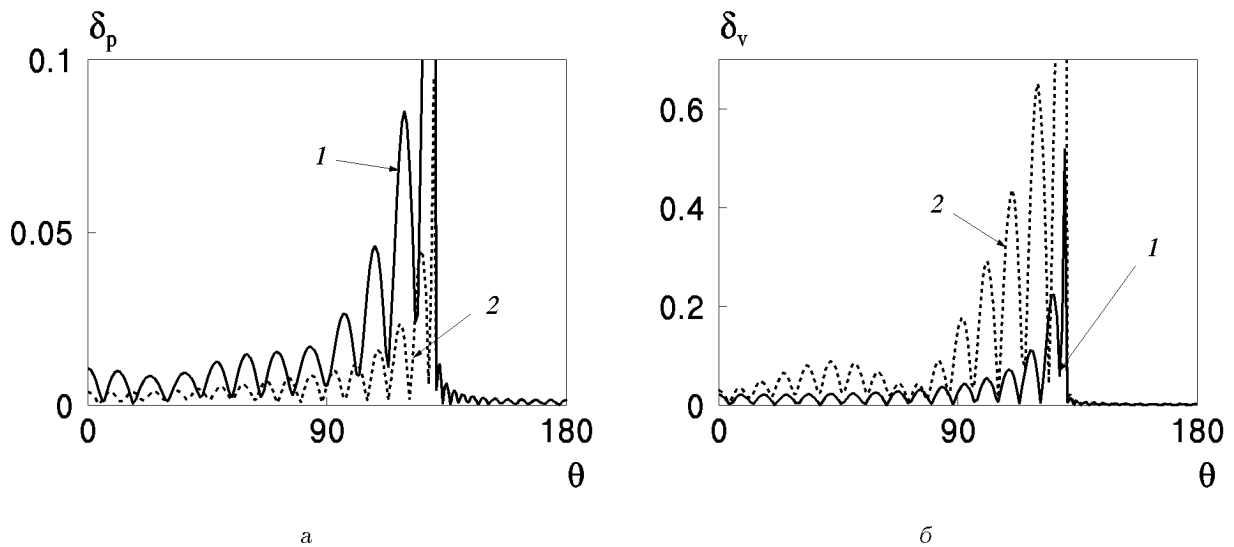


Рис. 3. Невязки по давлению (а) и скорости (б):
 кривые 1 - решение системы (11); кривые 2 - решение системы (12)

характеристик поля вдали от угловой точки. Об этом свидетельствует высокая степень точности выполнения такого интегрального критерия оценки точности решения, как закон сохранения энергии. Для принятого числа учитываемых слагаемых в рядах (3), (5), (6) соотношение этого закона выполняется с точностью до 0.1%.

При угле раскрытия клиновидного волновода $\theta_0 > 90^\circ$ с ростом величины θ_0 наблюдается увеличение радиуса r_0 , определяющего размер области II. В предельном случае, при $\theta_0 \rightarrow 180^\circ$ имеем

неограниченный рост радиуса r_0 . Понятно, что в этом случае для соблюдения требуемой точности расчетов необходимо увеличить количество учитываемых мод. Однако, помимо этих очевидных соображений, следует ответить на вопрос: какому из вариантов условий сопряжения, (11) или (12), следует отдать предпочтение? На рис. 3, а показаны графики невязки по давлению, а на рис. 3, б - по скорости для случая $2h=0.4\lambda$, $\theta_0=130^\circ$, $q=0$, $N_1=11$, $N_2=N_3=15$. Кривые 1 соответствуют системе уравнений (11), кривые 2 - системе (12).

Таблица. Энергетические коэффициенты отражения и прохождения звука

$\theta_0 = 130^\circ, 2h = 0.4\lambda, N_1 = 11, N_2 = N_3 = 15$	$V^{(0)}$	$W^{(0)}$	$V^{(0)} + W^{(0)}$
Система уравнений (11), $f(r_0, \theta) = 0$	0.06373	0.93404	0.99777
Система уравнений (11), $f(r_0, \theta) = \Phi_{III}(r_0, \theta_0)$	0.06405	0.93477	0.99882
Система уравнений (12), $f(r_0, \theta) = 0$	0.05248	1.01241	1.06489

Функция $f(r_0, \theta)$ в системах (11) и (12) полагалась равной нулю. Диапазон углов $130^\circ < \theta \leq 180^\circ$ определяет звуковое поле вдоль прямолинейной границы между областями I и II. Как видим, на этой границе величины невязок остались на том же уровне, что и для случая угла раскрыва $\theta_0 \leq 90^\circ$. Для криволинейной границы, разделяющей области II и III ($0^\circ \leq \theta < 130^\circ$), ситуация изменилась в сторону увеличения невязки.

Отличие в характере невязки вдоль границ между областями I, II и II, III (рис. 1, в), очевидно, связано со следующим: если решение $\Phi_{II}^{(1)}$ не претерпело изменений при переходе к углам раскрыва $\theta_0 > 90^\circ$, то решение $\Phi_{II}^{(2)}$ было продолжено на полную окружность радиуса $r = r_0$. При этом, вместо системы функций $\cos(\beta_m \theta)$ появилась система $\cos(m\theta)$. Таким образом, угловая точка $\theta = \theta_0$ оказалась внутри интервала определения системы функций $\cos(m\theta)$. Отсюда становится понятным ухудшение сходимости решения на границе $r = r_0$, $0^\circ \leq \theta < 130^\circ$. Что касается выбора системы (11) или (12), то, как видно из рис. 3, следует отдать предпочтение первой, где на дополнительный участок продолжено давление. Наличие угловой точки с ее сингулярностью по скорости внутри интервала определения системы функций $\cos(m\theta)$ несколько ухудшает качество решения в варианте системы уравнений (12).

Обратимся к вопросу о выборе функции $f(r_0, \theta)$, входящей в систему (11). Сравним результаты расчетов для двух случаев:

1. $f(r_0, \theta) = 0$;
2. $f(r_0, \theta) = \Phi_{III}(r_0, \theta_0)$.

Первый случай соответствует продолжению решения $\Phi_{II}^{(2)}$ в виде нулевой постоянной величины. Такое задание приводит к появлению скачка давления в точке (r_0, θ_0) , что является нежелательным моментом в плане сходимости построенного решения. Во втором варианте предпринимается попытка уменьшения этого скачка. Решение $\Phi_{II}^{(2)}$ продолжается в виде постоянной величины, равной значению потенциала скоростей в области III при $r = r_0, \theta = \theta_0$. Расчеты показали незначительное отличие в результатах. Конечно, этот вывод

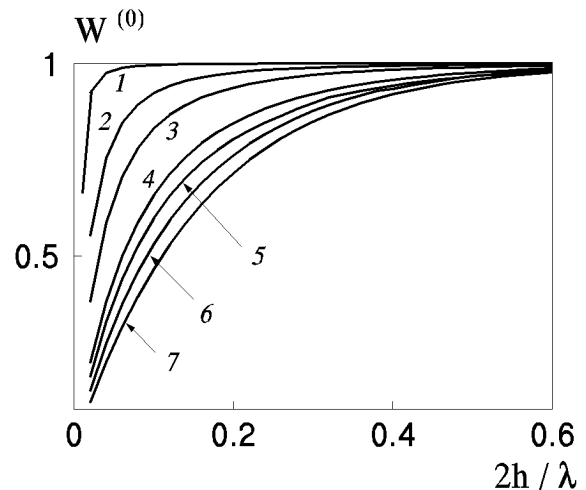


Рис. 4. Частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ для различных углов раскрыва θ_0 :
 1 - $\theta_0 = 5^\circ$, 2 - $\theta_0 = 25^\circ$, 3 - $\theta_0 = 45^\circ$, 4 - $\theta_0 = 90^\circ$,
 5 - $\theta_0 = 110^\circ$, 6 - $\theta_0 = 140^\circ$, 7 - $\theta_0 = 180^\circ$

о выборе функции $f(r_0, \theta)$ нельзя обобщать. Следует в каждой конкретной задаче проводить свой анализ и стремиться к уменьшению скачка поля на рассматриваемом участке границы.

В заключение вопроса о сходимости решения приводятся значения энергетических коэффициентов отражения и прохождения звука для трех вариантов счета. Представленная таблица дополняет проведенный анализ сопряжения звуковых полей.

На рис. 4 приведены частотные характеристики коэффициента прохождения $W^{(0)}$ нулевой моды ($q=0$) области I при различных углах раскрыва клиновидного волновода θ_0 . Кривая 7 определяет излучение звука из открытого конца плоского полубесконечного волновода и рассчитана, согласно работе [10], по формуле

$$W^{(0)} = 1 - (e^{-\pi 2h/\lambda})^2. \quad (21)$$

Здесь $\lambda = 2\pi/k$ - длина волны в свободном пространстве. Как видим, с ростом величины угла раскрыва θ_0 наблюдается уменьшение коэффициента прохождения, что является физически по-

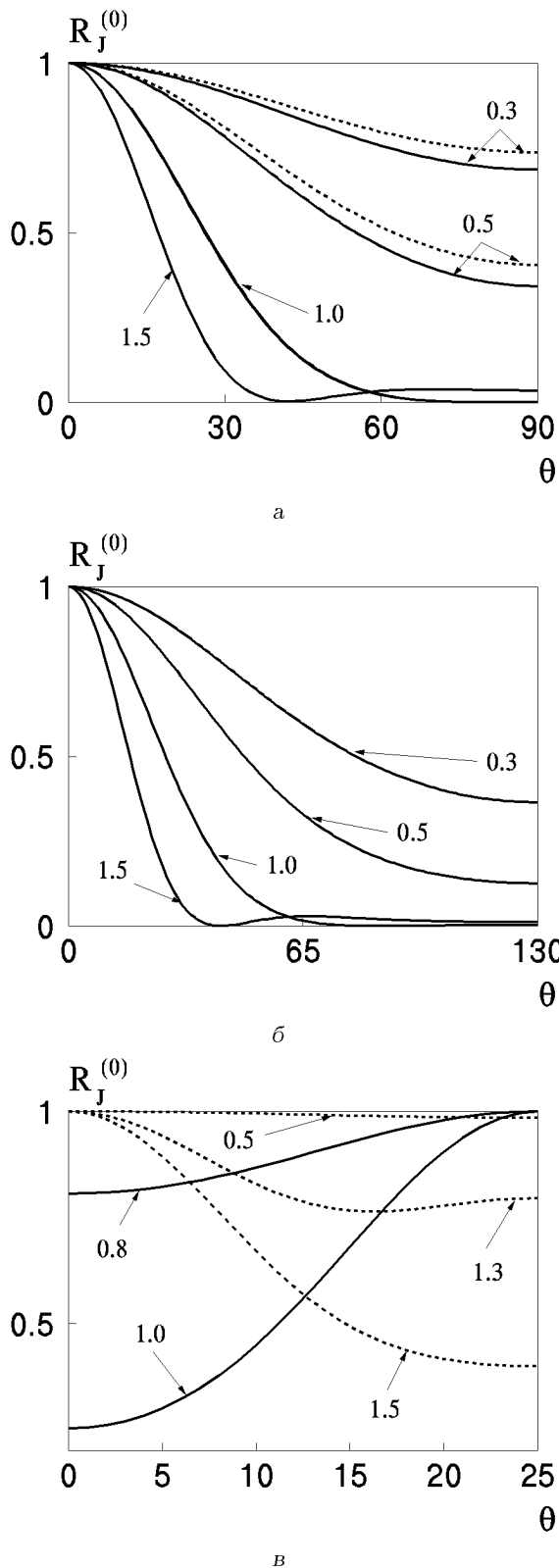


Рис. 5. Характеристики направленности $R_J^{(0)}(\theta)$ при различных волновых размерах $2h/\lambda$:
 а - $\theta_0 = 90^\circ$, б - $\theta_0 = 130^\circ$, в - $\theta_0 = 25^\circ$

нятым результатом. При характерном размере плоского волновода $h \ll \lambda$, вне зависимости от угла раскрыва клиновидного волновода, коэффициент прохождения стремится к нулю. При величине $2h > 0.5\lambda$ коэффициент прохождения практически стремится к единице.

Обобщая графические результаты рис. 4, можно сказать, что волноводная структура, изображенная на рис. 1, ведет себя как фильтр верхних частот, у которого частота среза и крутизна частотной характеристики зависят от угла раскрыва θ_0 .

Обратимся к исследованию углового распределения интенсивности звука в клиновидном волноводе, которое характеризует изменение структуры поля вдоль поперечного сечения при переходе через зону сопряжения плоского и клиновидного волноводов. Расчетной является формула (14). Заметим, что при углах раскрыва $\theta_0 < 90^\circ$ естественно говорить о плоском волноводе с рупором, а при $\theta_0 \geq 90^\circ$ - об излучении звука из плоского волновода во внешнее пространство.

На рис. 5 представлены зависимости энергетических характеристик направленности $R_J^{(0)}(\theta)$ при различных углах раскрыва клиновидного волновода θ_0 . Набегающей волной в области I является нулевая мода ($q=0$). Параметром кривых есть величина отношения характерного размера плоского волновода к длине волны в свободном пространстве. На рис. 5, а штриховые линии соответствуют характеристикам направленности плоского поршня в бесконечном жестком экране; их расчет проводится по формуле $(\sin \xi / \xi)^2$, где $\xi = kh \sin \theta$ [11]. Как следует из графиков, с ростом величины отношения $2h/\lambda$ характеристика направленности обостряется, что является понятным результатом. Следует отметить, что расчеты, соответствующие случаю $\theta_0 = 90^\circ$ (рис. 5, а), совпадают с результатами работы [6], в которой задача об излучении нулевой моды из плоского волновода с фланцем решалась методом факторизации.

Штриховые линии на рис. 5, а совпадают со сплошными при $2h/\lambda = 1.0$ и 1.5 . Это говорит о том, что при достаточно большой волновой величине $2h/\lambda$ бегущая плоская волна (нулевая мода) практически не отражается от конца плоского волновода. Вся энергия волны уходит во внешнюю область, и характеристика направленности определяется выражением $(\sin \xi / \xi)^2$. Этот результат полностью согласуется с данными, приведенными на рис. 4.

Сравнивая графики на рис. 5, а и рис. 5, б, следует отметить, что увеличение угла раскрыва

($\theta_0 > 90^\circ$) практически не изменило главный лепесток в диаграмме направленности при волновом размере плоского волновода $2h/\lambda \geq 1.0$. При $2h/\lambda < 1.0$ наблюдается значительное обострение характеристики направленности при переходе от $\theta_0 = 90^\circ$ к $\theta_0 = 130^\circ$.

Для относительно небольших углов раскрыва рупора, а именно $\theta_0 = 25^\circ$ (рис. 5, в), и при определенной величине $2h/\lambda$ наблюдается снижение звуковой энергии вдоль оси волновода ($\theta = 0^\circ$). Это явление объясняется амплитудно-фазовым соотношением возбуждаемых в клиновидном волноводе нулевой и, главным образом, первой симметричной нормальных волн. Так, при $\theta_0 = 25^\circ$, $2h/\lambda = 1$ получаем такие величины амплитуд первых мод клиновидного волновода: $B_0 = 3.26e^{i6^\circ}$, $B_1 = 1.13e^{i129^\circ}$, $|B_2| = 4 \cdot 10^{-4}$, $|B_n| \ll |B_0|$ при $n \geq 2$. Тогда, ограничиваясь двумя слагаемыми в числителе формулы (14), приходим к такому соотношению для амплитудной характеристики звукового поля в дальней зоне:

$$|\Phi_{III}(\theta)| \sim |3.26 + 1.13 \cos(\beta_1 \theta) e^{-i165^\circ}|.$$

Поскольку $e^{-i165^\circ} = -0.966 - i0.26$ и $\cos(\beta_1 \theta)$ при $\theta = 0$ равен единице, а при $\theta = \theta_0$ равен минус единице, то эффект снижения потока энергии вдоль направления $\theta = 0^\circ$ становится вполне понятным.

Явление смещения максимума излучения от оси волновода можно наблюдать и для других углов раскрыва θ_0 при определенной величине отношения $2h/\lambda$. На рис. 6 показаны данные расчетов, в ходе которых велся поиск величины отношения $2h/\lambda$ при фиксированном угле раскрыва, когда наблюдалось наименьшее значение в характеристике направленности вдоль акустической оси $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ)$. Значения функции $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ)$ определяют числа вблизи точек на плоскости $(\theta_0, 2h/\lambda)$, см. рис. 6. Наименьшего значения $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ)$ достигает при следующих значениях параметра волновода: $\theta_0 \approx 25^\circ$, $2h/\lambda \approx 1$. При $\theta_0 < 25^\circ$ наблюдается медленный рост минимального значения $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ)$ с ростом $2h/\lambda$, а при $\theta_0 > 25^\circ$, наоборот, быстрый рост минимума $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ)$ при уменьшении $2h/\lambda$. При $\theta_0 > 45^\circ$ практически имеем $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ) = 1$.

На рис. 7 представлены энергетические характеристики направленности в клиновидном волноводе, когда поле набегающей волны задается первой симметричной нормальной волной области I ($q=1$). Здесь кривая 1 соответствует $\theta_0 = 15^\circ$, кривая 2 – $\theta_0 = 30^\circ$, кривая 3 – $\theta_0 = 40^\circ$, кривая 4 – $\theta_0 = 50^\circ$, кривая 5 – $\theta_0 = 90^\circ$, кривая 6 – $\theta_0 = 130^\circ$, $2h/\lambda = 1.1$. Для малых углов раскрыва ($\theta_0 < 30^\circ$)

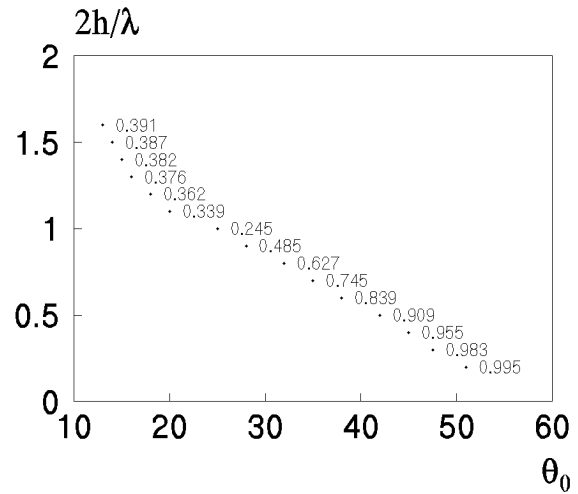


Рис. 6. Минимальные значения величины $R_J^{(0)}(\theta = 0^\circ)$ при различных параметрах волновода

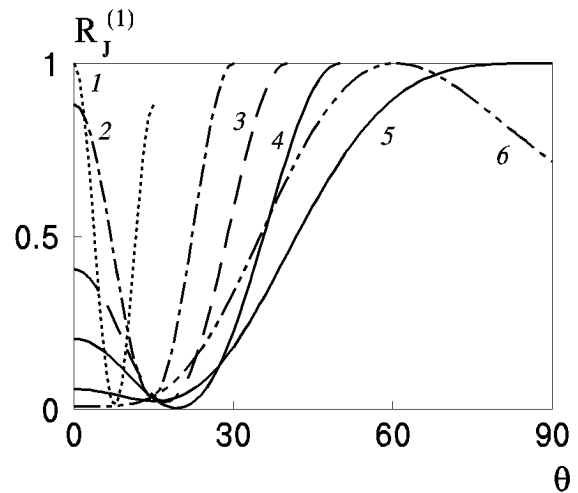


Рис. 7. Характеристики направленности $R_J^{(1)}(\theta)$ при различных углах раскрыва θ_0 ($2h/\lambda = 1.1$)

сохраняется практически такое же распределение по сечению параметров звукового поля, как и в набегающей волне. С ростом угла раскрыва характеристика существенно изменяется. Практически не излучается звук вдоль оси волновода. Основная энергия прошедшего возмущения локализуется вблизи стенок волновода.

Ситуация не изменится, если при фиксированном угле раскрыва θ_0 будем увеличивать волновой размер $2h/\lambda$, наблюдая за функцией $R_J^{(1)}(\theta)$. Рис. 8 соответствует углу раскрыва $\theta_0 = 90^\circ$. Параметром кривых есть величина $2h/\lambda$. Как видим, в диапазоне углов $0^\circ \leq \theta_0 \leq 10^\circ$ поток энергии

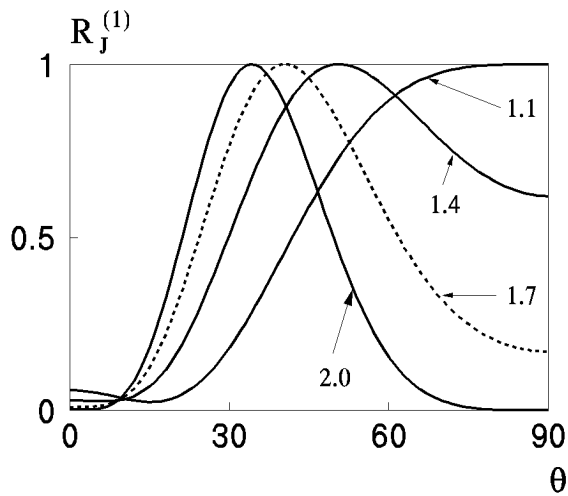


Рис. 8. Характеристики направленности $R_J^{(1)}(\theta)$ при различных волновых размерах $2h/\lambda$ ($\theta_0=90^\circ$)

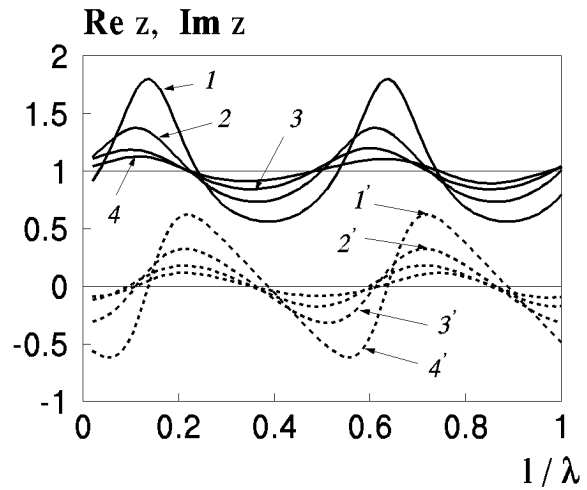


Рис. 10. Зависимости сопротивления излучения от местоположения поршня l/λ в плоском волноводе ($\theta_0=90^\circ$):

сплошные - действительные части,
штриховые - мнимые части

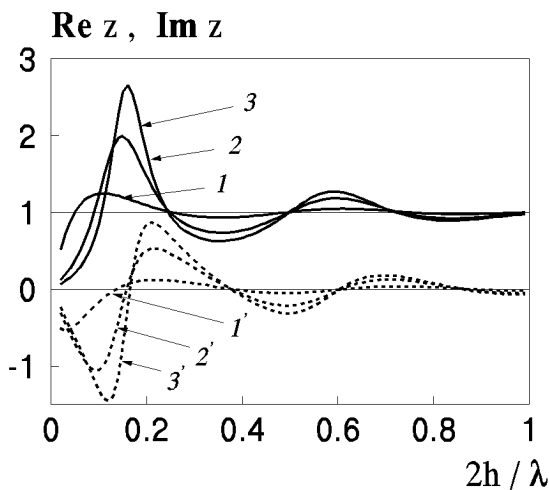


Рис. 9. Частотные зависимости сопротивления излучения поршня при различных углах раскрытия рупора θ_0 ($2h=l$):

сплошные - действительные части,
штриховые - мнимые части

практически равен нулю. При этом с ростом $2h/\lambda$ происходит существенное смещение и уменьшение ширины главного лепестка характеристики направленности.

Условия излучения плоского поршня в волноводе с рупором (см. рис. 1, а) иллюстрируют графики на рис. 9. На нем приведены частотные характеристики вещественной и мнимой частей сопротивления излучения, рассчитанные по формуле (20). Сплошные кривые определяют вещественные, а штриховые - мнимые части сопротивле-

ния излучения. Параметром кривых является угол раскрытия рупора: кривая 1 - $\theta_0=10^\circ$, кривая 2 - $\theta_0=50^\circ$, кривая 3 - $\theta_0=90^\circ$. Полагалось $2h=l$ (см. рис. 1, а). В области изменения величины $2h/\lambda < 0.3$ наблюдается значительная неравномерность в частотной характеристике сопротивления излучения поршня. Причем с ростом угла раскрытия неравномерность нарастает и имеет явные признаки резонансного характера. Так, при максимальном значении вещественной части сопротивления излучения мнимая часть меняет характер с массового типа на упругий. С ростом величины $2h/\lambda$ рассчитываемая величина сопротивления излучения, осциллируя, стремится к сопротивлению излучения поршня в бесконечном плоском волноводе.

На рис. 10, аналогично рис. 9, показаны вещественные (сплошные линии) и мнимые (штриховые) части сопротивления излучения поршня при фиксированном угле раскрытия рупора $\theta_0=90^\circ$ и переменной величине l/λ . Параметром кривых является волновой размер поршня: кривая 1 - $2h/\lambda=0.3$, кривая 2 - $2h/\lambda=0.5$, кривая 3 - $2h/\lambda=0.7$, кривая 4 - $2h/\lambda=1.5$. С увеличением величины l/λ наблюдается периодическая смена характера сопротивления излучения поршня. Пространственным периодом является половина длины волны. При этом величина осцилляций вещественной и мнимой частей сопротивления излучения существенно зависит от волнового размера поршня. С ростом величины $2h/\lambda$ осцил-

ляции уменьшаются и сопротивление излучения поршня, расположенного в нише жесткого экрана, приближается к сопротивлению излучения поршня в бесконечном плоском волноводе. Если волновой размер заглупления l/λ стремится к нулю, то ситуация становится близкой к задаче о колебании поршня в бесконечном экране. Действительно, графики на рис. 10 при $l/\lambda \rightarrow 0$ находятся в полном соответствии с результатами работы [4, рис. 27, кривая $n=0$], где рассчитано сопротивление излучения поршня в бесконечном экране для различных форм колебаний поршня.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенное решение позволяет получить численную оценку прохождения звуковой энергии через зону сопряжения плоского и клиновидного волноводов. Как показывает анализ, волноводная структура представленная на рис. 1, является практически звукопрозрачной для нулевой моды при характерном размере плоского волновода $2h/\lambda > 0.5$ для любого угла раскрытия клиновидного волновода θ_0 . В целом рассматриваемая волноводная структура ведет себя как фильтр верхних частот с частотой среза, зависящей от угла раскрытия.

Данные по расчету характеристик направленности важны для формирования представлений об особенностях излучения из клиновидного рупора в открытое пространство. Оказалось, что энергетическая характеристика направленности определяется совокупностью факторов, а именно: волновым размером плоского волновода $2h/\lambda$, углом раскрытия клиновидного волновода θ_0 и структурой набегающей волны. При этом возникают ситуации, когда характер звукового поля вдоль поперечного сечения волновода сильно меняется. Ярким примером является ситуация, приводящая к уменьшению и даже практически полному отсутствию потока звуковой энергии в районе углов, прилегающих к оси волновода.

Анализ задачи излучения колеблющегося поршня в волновод с рупором указывает наличие зоны сильной неравномерности частотной характеристики сопротивления излучения. Эти результа-

ты могут быть использованы при конструировании излучающей системы, которая включает в себя элементы волноводной структуры, изображенной на рис. 1.

В данной работе рассмотрен плоский волновод. Следует отметить, что используемый при этом метод построения общего решения может быть в полном объеме использован при рассмотрении задачи прохождения звука через сопряжение кругового цилиндрического и конического волновода.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает сердечную благодарность В. Т. Гринченко за дискуссии, в ходе которых всякий раз появлялась надежда преодолеть возникшие трудности.

1. Галаненко В. Б. Обобщение метода поперечных сечений на задачу распространения волн в упругом слое с плавно изменяющимися параметрами // Акуст. вісн.- 1998.- 1, N 2.- С. 41-47.
2. Петров В. Ю. Слаборасходящиеся акустические пучки в плавнонеоднородных по трассе океанических волноводах // Акуст. ж.- 1997.- 43, N 2.- С. 230-237.
3. Елисеевнин В. А., Тутилкин Ю. И. Фаза звукового поля, дифрагированного на плоском прямоугольном вертикальном экране в волноводе // Акуст. ж.- 1996.- 42, N 5.- С. 789-793.
4. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики.- Л.: Судостроение, 1972.- 348 с.
5. Шендеров Е. Л. Рассеяние плоской звуковой волны на полубесконечном волноводе с жестким фланцем // Акуст. ж.- 1998.- 44, N 1.- С. 106-115.
6. Воскресенский Г. В., Журав С. М. Излучение из плоского волновода с фланцем // Радиотехника и электроника.- 1976.- 21, N 7.- С. 1390-1395.
7. Ямпольский В. Г., Сухнов В. И. Анализ секторных рупорных антенн // Радиотехника.- 1981.- N 7.- С. 70-74.
8. Lewin L. On the inadequacy of discrete mode-matching techniques in some waveguide discontinuity problems // IEEE Trans. Microwave theory and techniques.- 1970.- MTT-18 N 7.- P. 364-372.
9. Гринченко В. Т. Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика.- 1996.- Вып. 70.- С. 27-40.
10. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.- М.: Советское радио, 1966.- 431 с.
11. Тюлин В. Н. Введение в теорию излучения и рассеяния звука.- М.: Наука, 1976.- 254 с.