ISSN 1028-7507 *Акустичний вісник. 1999. Том 2, N 1. С. 22–30*

УДК 533.6.013.42

ПЛОСКАЯ НЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УДАРА ТВЕРДОГО ТУПОГО КЛИНА О ПОВЕРХНОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. ГАВРИЛЕНКО

Украинский транспортный университет, Киев

Получено 27.10.98 ⋄ Пересмотрено 12.01.99

Рассмотрена плоская задача вертикального удара о поверхность сжимаемой жидкости твердого тупого клина, грани которого наклонены к невозмущенной поверхности жидкости под разными углами. Решение смешанной краевой задачи на основе методов интегральных преобразований Лапласа по времени, разделения переменных, разложения в ряды Фурье по косинусам и синусам сведено к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов разложения гидродинамического давления в ряд Фурье. В численном примере для погружающихся клиньев различной массы с различными углами килеватости приведены зависимости от времени гидродинамической силы, момента реакции, угла асимметрии и чисел Маха граней клина.

Розглянуто плоску задачу вертикального удару об поверхню стисливої рідини твердого тупого клина, грані якого нахилені до незбуреної поверхні рідини під різними кутами. Розв'язок змішаної крайової задачі на основі методів інтегральних перетворень Лапласа по часу, розділення змінних, розкладу в ряди Фур'є по косинусам і синусам зведено до розв'язку нескінченної системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно коефіцієнтів розкладу гідродинамічного тиску в ряд Фур'є. У чисельному прикладі для клинів різної маси, що занурюються з різними кутами кілеватості, наведено залежності від часу гідродинамічної сили, момента реакції, кута асиметрії та чисел Маха граней клина.

Planar problem of vertical collision with compressible fluid of a rigid obtuse wedge with sides having different inclination to undisturbed surface of fluid is under consideration. By techniques of Laplas integral transform with respect to time, decoupling of variables, cosine and sine Fourier transform the solution of mixed boundary problem has been reduced to solution of infinite system of Volterra's linear integral equations of the second order with respect to coefficients of Fourier deconvolution for hydrodynamical pressure. In the numerical example for sumberging wedges with different masses and different deadrise angles the time dependences of hydrodynamical force, moment of reaciton, angle of asymmetry and Mach numbers of sides of the wedge are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Возникнув в двадцатые годы нашего столетия, проблема ударного взаимодействия твердых и упругих тел с жидкостью и в настоящее время не потеряла своей актуальности. Свидетельством интереса к исследованиям в этой области служит появление в последнее время большого количества научных трудов, в частности [1–7], связанное с их практическим применением в различных отраслях промышленности.

В данной статье решается плоская несимметричная задача вертикального удара о поверхность сжимаемой жидкости твердого тупого клина, когда его грани наклонены к невозмущенной поверхности жидкости под разными углами. Предполагается непроницаемость поверхности тела для жидкости. Жидкость имеет бесконечную глубину, а ее поведение описывается волновым уравнением.

Формулируется смешанная нестационарная краевая задача с движущейся неизвестной границей, решение которой на основе использования методов интегральных преобразований Лапласа по времени, разделения переменных, разложения в ряды Фурье сводится к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов разложения гидродинамического давления в ряд Фурье, на базе которой выполнены конкретные расчеты.

Рассматриваемая краевая задача является в общем случае нелинейной, так как определяемые в каждый момент времени границы области контакта тела с жидкостью зависят от интегральных характеристик (силы реакции со стороны жидкости и момента реакции внешних сил), а они сложным функциональным образом определяются через искомые коэффициенты ряда Фурье.

Решение несимметричной задачи является дальнейшим развитием численно-аналитического подхода [8], с помощью которого решен ряд задач удара о сжимаемую жидкость жестких тел и тонких упругих оболочек, в частности, для плоского симметричного случая – в [2, 9, 10], для осесимметричного случая – в [11–14].

Следует отметить, что автору в настоящий момент не известны другие публикации, связанные с решением несимметричных задач вертикального удара затупленных тел о жидкость, кроме работ

[15, 16], в которых решена задача о вертикальном поступательном погружении с постоянной скоростью несимметричного тупого клина. В данной же работе задача решена с изменяющейся скоростью погружения клина, а в его движении кроме поступательного перемещения вертикально вниз учитывается вращение клина вокруг его центра масс, вследствие чего изменяются углы килеватости граней клина.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Бесконечно-протяженный твердый тупой клин с углом раствора 2γ, двигаясь перпендикулярно поверхности покоящейся жидкости, в некоторый момент $t=0$ достигает этой поверхности и начинает погружаться в жидкость со скоростью $v_0(t)$, причем начальное значение скорости погружения $v_0=v_0(0)$. Жидкость предполагается невесомой, баротропной, идеальной сжимаемой. Считаем, что образующая поверхности клина в процессе взаимодействия тела с жидкостью остается параллельной первоначально невозмущенной поверхности жидкости, грани клина наклонены к поверхности жидкости под различными углами килеватости $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, где $\beta_1(t)+2\gamma+\beta_2(t)=180°$, вследствие чего обтекание клина жидкостью при погружении носит несимметричный характер, а движение клина будет состоять из поступательного вертикального перемещения вниз и вращательного движения около центра масс.

Введем в полупространстве, занимаемом жидкостью, декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$: оси Ox и Oy направим по невозмущенной поверхности жидкости, причем ось Oy – параллельно образующей поверхности тела, ось Oz – вглубь жидкости; таким образом, невозмущенная поверхность жидкости совпадет с плоскостью $z=0$. Так как гидродинамическая картина процесса погружения в жидкость клина в произвольном поперечном его сечении повторяется, достаточно ограничиться рассмотрением движения в одном из сечений – в плоскости xOz. Будем рассматривать клин ограниченным сверху плоскостью, перпендикулярной к биссектрисе угла раствора. Тогда сечением погружающегося в жидкость клина в плоскости xOz является равнобедренный треугольник с тупым углом 2γ при вершине клина. Плоскость, сверху ограничивающая клин, подбирается исходя из геометрических свойств данного треугольника в зависимости от параметра r, величина которого определяется ниже.

Предположим, что погонная плотность материала клина есть функция координат поперечного

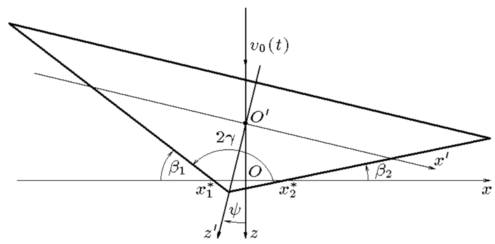

Рис. 1. Схема несимметричного удара тупого клина о поверхность жидкости

сечения клина, симметричная относительно биссектрисы угла раствора, тогда центр масс сечения клина O' будет находиться на этой биссектрисе. Свяжем поперечное сечение клина с подвижной декартовой прямоугольной системой координат $O'x'z'$: расположим O' на оси Oz, на расстоянии r от вершины клина, ось $O'x'$ направим параллельно основанию равнобедренного треугольника, ось $O'z'$ – по биссектрисе угла раствора (рис. 1). Если обозначить через $\psi(t)$ угол между положительными направлениями осей Oz и $O'z'$ (назовем его углом асимметрии), причем в начальный момент удара этот угол равен ψ_0, начальная угловая скорость тела равна $\dot{\psi}_0$, то в системе Oxz декартовы координаты центра масс $O'(x_0, z_0)$, а также углы килеватости $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ и числа Маха $M_1(t)$, $M_2(t)$ граней клина в произвольный момент времени t определяются формулами

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0,\\
&z_0 = z^* - r\cos\psi_0,\\
&\beta_1(t) = 90° - \gamma + \psi(t),\\
&\beta_2(t) = 90° - \gamma - \psi(t),\\
&M_1(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_1(t)}\,\frac{v_0(t)}{C},\\
&M_2(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_2(t)}\,\frac{v_0(t)}{C}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь C – скорость звука в жидкости; z^* – путь, пройденный центром масс за время t при поступательном его движении вертикально вниз по оси Oz со скоростью $v_0(t)$:

$$z^* = \int\limits_0^t v_0(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Границы области контакта тела с жидкостью в произвольный момент времени определяются точками x_1^* и x_2^* пересечения его контура, т. е. граней клина, с осью Ox по формулам

$$x_1^* = \frac{-r + z_0(\mathrm{ctg}\gamma \sin\psi - \cos\psi)}{\mathrm{ctg}\gamma \cos\psi + \sin\psi}; \qquad x_2^* = \frac{r + z_0(\mathrm{ctg}\gamma \sin\psi + \cos\psi)}{\mathrm{ctg}\gamma \cos\psi - \sin\psi}. \tag{3}$$

Исследуется ранний этап процесса ударного взаимодействия твердого тела с жидкостью, отвечающий следующим ограничениям: рассматриваемые скорости погружения тела малы по сравнению со скоростью звука в жидкости C, т. е. $v_0/C \ll 1$, а глубины погружения тела в жидкость малы по сравнению с его линейными размерами, т. е. $z^*/R \ll 1$, где R - характерный линейный размер поперечного сечения клина.

Затупленность тела и малые глубины погружения дают возможность отождествить линейные координаты вдоль поверхностей жидкости и тела, линеаризовать граничные условия и снести их на невозмущенную поверхность жидкости $z=0$.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{t} = \frac{Ct}{R}; \quad \bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{V} = \frac{V}{C}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{CR}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho C^2}; \quad \bar{F} = \frac{F}{\rho C^2 R}; \quad \bar{M} = \frac{M}{\rho C^2 R^2}, \tag{4}$$

где ρ – плотность жидкости, p – давление, V – скорость, F – сила реакции жидкости, M – момент реакции внешних сил, φ – волновой потенциал. Так как в дальнейшем будут использоваться только безразмерные переменные, черточка над ними опускается.

Потенциал жидкости удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Скорость деформирования поверхности жидкости $V(t,x)$ и гидродинамическое давление $p(t,x)$ определяется по формулам

$$V(t,x) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}, \tag{6}$$

$$p(t,x) = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0}. \tag{7}$$

Сформулируем граничные условия.

В области контакта жидкости с телом его поверхность предполагается непроницаемой для жидкости:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = v_0(t), \qquad x_1^* < x < x_2^*. \tag{8}$$

На свободной поверхности жидкости должно выполняться динамическое условие: давление на ней постоянно и для простоты считаем его равным нулю,

$$-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0} = 0, \quad (x < x_1^*)\bigcup(x > x_2^*). \tag{9}$$

Возмущения, вызванные в жидкости телом, на бесконечности затухают:

$$\varphi \to 0, \qquad x^2 + z^2 \to \infty, \tag{10}$$

Так как до начала взаимодействия тела с жидкостью последняя покоилась, то будем иметь нулевые начальные условия:

$$\varphi|_{t=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

Движение тела при взаимодействии с жидкостью состоит из вертикального поступательного перемещения и вращения около центра масс.

Вертикальное движение тела в жидкости определяется согласно второго закона Ньютона

$$\mu\, \dot{v}_0(t) = -F(t), \quad v_0(0) = v_0, \tag{12}$$

где μ – погонная масса тела, отнесенная к ρR^2; $F(t)$ – гидродинамическая сила сопротивления погружению тела со стороны жидкости, которая в линеаризованном случае определяется как интеграл от давления, распределенного по области контакта тела с жидкостью:

$$F(t) = \int\limits_{x_1^*}^{x_2^*} p(t,x)\, dx. \tag{13}$$

Вращательное движение клина вокруг центра масс его поперечного сечения определяется уравнением

$$I_0\, \ddot{\psi}(t) = -M(t), \qquad \psi(0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0, \tag{14}$$

где I_0 – момент инерции сечения клина относительно центра масс; $M(t)$ – момент реакции внешних сил относительно центра масс, определяемый по формуле

$$M(t) = \int\limits_{x_1^*}^{x_2^*} p(t,x)\, x\, dx. \tag{15}$$

Сформулированная краевая задача в общем случае нелинейна, так как в соотношениях (13), (15) гидродинамическая сила и момент реакции сложным функциональным образом определяются через искомые величины.

Главной целью при расмотрении данной задачи является определение на раннем этапе процесса ударного взаимодействия клина с жидкостью испытываемых им гидродинамических нагрузок. Как показывают расчеты, искомые гидродинамические нагрузки достигают своих максимальных значений за столь малые с начала удара и погружения отрезки времени, что сопутствующее погружению явление формирования струй на гранях клина не успевает достаточно развиться и его влиянием на ход процесса пренебрегаем.

Следует также остановиться на оценке пределов применимости используемой акустической модели и метода Вагнера снесения линеаризованных граничных условий на невозмущенную поверхность жидкости.

Использование акустического приближения для описания движения жидкости накладывает ограничение на величину скорости погружения $v_0(t)$. Имеются различные оценки предельных значений скорости погружения. Так, в статье [17] показано, что при использовании акустического приближения в диапазоне скоростей погружения $0 < v_0(t) \le 200$ м/с получены результаты, совпадающие с экспериментальными.

Линеаризация граничных условий и снесение их, согласно теории Вагнера, на невозмущенную поверхность жидкости накладывает ограничение на глубину погружения z^* и, следовательно, на углы килеватости граней клина. В монографиях [18, 19] отмечается, что теория Вагнера достаточно хорошо описывает процесс погружения в жидкость затупленного тела, у которого углы килеватости не превышают 30°, т.е. $\beta_1(t) \le 30^\circ$, $\beta_2(t) \le 30^\circ$. Отсюда с учетом соотношений (1) получаем ограничение для угла асимметрии $\psi(t) \le \gamma - 60^\circ$.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Ограничивая рассмотрение процесса малыми временами, будем искать решение сформулированной задачи для полуполосы $-l \le x \le l$, $z \ge 0$. Величина l выбирается из условия, согласно которому в течение рассматриваемого временного интервала отраженные от боковых граней полуполосы волны не достигают области контакта. Ниже положено $l = \pi$. Граничные условия на боковых гранях полуполосы выбираются из соображений удобства разделения переменных.

В дальнейшем при использовании метода разложения функций в ряды Фурье по косинусам и синусам для удобства записи будем представлять ряд Фурье в виде

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ f_n^{(1)}(t) \cos nx + f_n^{(2)}(t) \sin nx \Big\},$$

$$f_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi k_n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t,x)\, \cos nx\, dx,$$

$$f_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\pi k_n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t,x)\, \sin nx\, dx,$$

$$k_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n = \overline{1,\infty}, \end{cases}$$

полагая, что коэффициент $f_0^{(2)}(t) \equiv 0$.

Раскладываем скорость деформирования поверхности жидкости $V(t,x)$ и гидродинамическое давление $p(t,x)$ в ряды Фурье по $\cos nx$ и $\sin nx$:

$$V(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ V_n^{(1)}(t) \cos nx + V_n^{(2)}(t) \sin nx \Big\}, \quad (16)$$

$$p(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ p_n^{(1)}(t) \cos nx + p_n^{(2)}(t) \sin nx \Big\}. \quad (17)$$

Применяя к уравнению (5) преобразование Лапласа по времени t с параметром s, получаем в пространстве изображений уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} - s^2 \varphi^L = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности (10), имеет вид

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z\sqrt{s^2+n^2}} \Big\{ A_n \cos nx + B_n \sin nx \Big\}, \quad (19)$$

где A_n, B_n – постоянные коэффициенты.

Применяя к выражениям (6), (7) и разложениям (16), (17) преобразование Лапласа и учитывая соотношение (19), получаем формулу, связывающую коэффициенты $V_n^{(i)L}(s)$ и $p_n^{(i)L}(s)$:

$$V_n^{(i)L}(s) = \frac{\sqrt{s^2+n^2}}{s}\, p_n^{(i)L}(s), \qquad n = \overline{0,\infty}, \quad i = \overline{1,2}. \quad (20)$$

Тогда по теореме о свертке оригиналов двух функций из соотношений (20) получаем зависимости [8]

$$V_n^{(i)}(t)=p_n^{(i)}(t)+\int\limits_0^t p_n^{(i)}(\tau)f_n(t-\tau)d\tau, \qquad n=\overline{0,\infty},\quad i=\overline{1,2}, \tag{21}$$

связывающие коэффициенты $V_n^{(i)}(t)$ и $p_n^{(i)}(t)$. Здесь

$$f_n(t)=\int\limits_0^t \frac{nJ_1(n\xi)}{\xi}\,d\xi,$$

$J_1(t)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода первого порядка.

С учетом разложений (16), (17) и соотношений (21) получаем связь между скоростью $V(t,x)$ и давлением $p(t,x)$

$$V(t,x)=p(t,x)+\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\int\limits_0^t\Bigl\{p_n^{(1)}(\tau)\cos nx+ +p_n^{(2)}(\tau)\sin nx\Bigr\}f_n(t-\tau)d\tau\Bigr). \tag{22}$$

Удовлетворяя с помощью соотношения (22) граничные условия (8) и (9), получаем

$$p(t,x)=H((x-x_1^*)(x_2^*-x))\times \times\Bigl\{v_0(t)-\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\int\limits_0^t\Bigl\{p_n^{(1)}(\tau)\cos nx+ +p_n^{(2)}(\tau)\sin nx\Bigr\}f_n(t-\tau)\,d\tau\Bigr)\Bigr\}, \tag{23}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, имеющая вид

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Представляя в виде рядов Фурье левую и правую часть выражения (23) и приравнивая коэффициенты при соответствующих косинусах и синусах, получаем бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов $p_n^{(1)}(t)$, $p_n^{(2)}(t)$, $(n=\overline{0,\infty})$:

$$\begin{aligned}
p_n^{(1)}(t)&=v_{0n}^{(1)}(t)-\\
&-\sum_{m=0}^{\infty}\Bigl(\beta_{mn}^{(1)}(x_1^*,x_2^*)\int\limits_0^t p_m^{(1)}(\tau)f_m(t-\tau)d\tau+\\
&+\beta_{mn}^{(2)}(x_1^*,x_2^*)\int\limits_0^t p_m^{(2)}(\tau)f_m(t-\tau)d\tau\Bigr),\\
p_n^{(2)}(t)&=v_{0n}^{(2)}(t)-\\
&-\sum_{m=0}^{\infty}\Bigl(\beta_{mn}^{(3)}(x_1^*,x_2^*)\int\limits_0^t p_m^{(1)}(\tau)f_m(t-\tau)d\tau+\\
&+\beta_{mn}^{(4)}(x_1^*,x_2^*)\int\limits_0^t p_m^{(2)}(\tau)f_m(t-\tau)d\tau\Bigr),
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$v_{0n}^{(1)}(t)=\frac{v_0(t)}{\pi k_n}\int\limits_{x_1^*}^{x_2^*}\cos nx\,dx;$$

$$v_{0n}^{(2)}(t)=\frac{v_0(t)}{\pi k_n}\int\limits_{x_1^*}^{x_2^*}\sin nx\,dx;$$

$$\beta_{mn}^{(1)}(x_1^*,x_2^*)=\frac{1}{\pi k_n}\int\limits_{x_1^*}^{x_2^*}\cos mx\cos nx\,dx;$$

$$\beta_{mn}^{(2)}(x_1^*,x_2^*)=\frac{1}{\pi k_n}\int\limits_{x_1^*}^{x_2^*}\sin mx\cos nx\,dx;$$

$$\beta_{mn}^{(3)}(x_1^*,x_2^*)=\frac{1}{\pi k_n}\int\limits_{x_1^*}^{x_2^*}\cos mx\sin nx\,dx;$$

$$\beta_{mn}^{(4)}(x_1^*,x_2^*)=\frac{1}{\pi k_n}\int\limits_{x_1^*}^{x_2^*}\sin mx\sin nx\,dx.$$

После преобразований коэффициенты $v_{0n}^{(i)}(t)$ $(i=\overline{1,2})$ и $\beta_{mn}^{(j)}(x_1^*,x_2^*)$ $(j=\overline{1,4})$ принимают вид

$$v_{0n}^{(i)}(t)=\frac{v_0(t)}{\pi k_n}\,g_n^{(i)}(x_1^*,x_2^*), \tag{25}$$

$$\beta_{mn}^{(j)}(x_1^*,x_2^*)=\frac{1}{2\pi}\,q_{mn}^{(j)}(x_1^*,x_2^*), \tag{26}$$

где

$$z_1(n)=\frac{\sin nx_2^*-\sin nx_1^*}{n};$$

$$z_2(n)=\frac{\cos nx_1^*-\cos nx_2^*}{n};$$

$$g_n^{(1)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}x_2^*-x_1^*, & n=0;\\ z_1(n), & n=\overline{1,\infty};\end{cases}$$

$$g_n^{(2)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}0, & n=0;\\ z_2(n), & n=\overline{1,\infty};\end{cases}$$

$$q_{mn}^{(1)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}x_2^*-x_1^*, & m=n,\ n=0;\\ z_1(m), & m\neq n,\ n=0;\\ x_2^*-x_1^*+z_1(2m), & m=n,\ n\neq 0;\\ z_1(m-n)+z_1(m+n), & m\neq n,\ n\neq 0;\end{cases}$$

$$q_{mn}^{(2)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}0, & m=n,\ n=0;\\ z_2(m), & m\neq n,\ n=0;\\ z_2(2m), & m=n,\ n\neq 0;\\ z_2(m-n)+z_2(m+n), & m\neq n,\ n\neq 0;\end{cases}$$

$$q_{mn}^{(3)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}0, & m=n,\ n=0;\\ 0, & m\neq n,\ n=0;\\ z_2(2m), & m=n,\ n\neq 0;\\ z_2(m+n)-z_2(m-n), & m\neq n,\ n\neq 0;\end{cases}$$

$$q_{mn}^{(4)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}0, & m=n,\ n=0;\\ 0, & m\neq n,\ n=0;\\ x_2^*-x_1^*-z_1(2m), & m=n,\ n\neq 0;\\ z_1(m-n)-z_1(m+n), & m\neq n,\ n\neq 0.\end{cases}$$

После того, как коэффициенты $p_n^{(i)}(t)$ определены из решения системы (24), коэффициенты $V_n^{(i)}(t)$ определяются по формуле (21), а скорость деформирования поверхности жидкости $V(t,x)$ и гидродинамическое давление $p(t,x)$ – соответственно по формулам (16), (17).

Используя соотношения (13) и (17), получаем гидродинамическую силу сопротивления погружению тела в жидкость в виде

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{p_n^{(1)}(t)\,g_n^{(1)}(x_1^*,x_2^*)+ +p_n^{(2)}(t)\,g_n^{(2)}(x_1^*,x_2^*)\Big\}. \tag{27}$$

Дифференциальное уравнение (12) принимает вид

$$\mu\,\dot v_0(t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{p_n^{(1)}(t)\,g_n^{(1)}(x_1^*,x_2^*)+ +p_n^{(2)}(t)\,g_n^{(2)}(x_1^*,x_2^*)\Big\},\qquad v_0(0)=v_0. \tag{28}$$

Используя соотношения (15) и (17), получаем момент реакции

$$M(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{p_n^{(1)}(t)\,h_n^{(1)}(x_1^*,x_2^*)+ +p_n^{(2)}(t)\,h_n^{(2)}(x_1^*,x_2^*)\Big\}, \tag{29}$$

где

$$h_n^{(1)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}\dfrac{(x_2^*+x_1^*)(x_2^*-x_1^*)}{2}, & n=0,\\ \dfrac{x_2^*\sin nx_2^*-x_1^*\sin nx_1^*-z_2(n)}{n}, & n=\overline{1,\infty};\end{cases}$$

$$h_n^{(2)}(x_1^*,x_2^*)=\begin{cases}0, & n=0,\\ \dfrac{x_1^*\cos nx_1^*-x_2^*\cos nx_2^*+z_1(n)}{n}, & n=\overline{1,\infty}.\end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (14) принимает вид

$$I_0\,\ddot\psi(t)=-\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{p_n^{(1)}(t)\,h_n^{(1)}(x_1^*,x_2^*)+ +p_n^{(2)}(t)\,h_n^{(2)}(x_1^*,x_2^*)\Big\},\qquad \psi(0)=\psi_0,\quad \dot\psi(0)=\dot\psi_0. \tag{30}$$

Таким образом, разрешающая система уравнений состоит из бесконечной системы интегральных уравнений (24), уравнений поступательного перемещения (28), вращательного движения (30) и соотношения (3), определяющего границы области контакта x_1^*, x_2^*.

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Решение краевой задачи в общем случае сведено к решению системы интегральных уравнений (24) совместно с дифференциальными уравнениями (28), (30) по определяемым в каждый момент времени t границам области контакта тела с жидкостью из соотношений (3).

Решение задачи осуществлялось на конечном отрезке времени $[0;T]$, который разбивался на равные части длиной Δt, и в полученных узлах разбиения вычислялись все искомые величины.

Бесконечная система интегральных уравнений (24) и ряды в дифференциальных уравнениях (28), (30) подвергались усечению. Степень усечения определялась из соображений практической сходимости. В системе (24) все интегралы вычислялись по квадратурным формулам трапеций и Симпсона. Решение системы интегральных уравнений (24) и дифференциальных уравнений (28), (30) осуществлялось итерационным методом последовательных приближений. Для улучшения сходимости рядов Фурье применялись σ – множители Гиббса.

В вычислениях на временном интервале $[0;2]$ варьировались следующих параметры: начальный

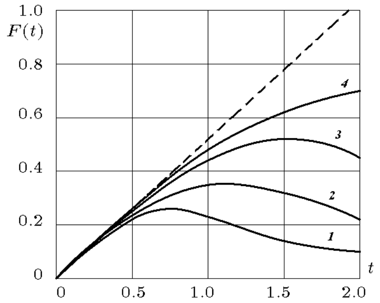

Рис. 2. Временные зависимости гидродинамической силы для клиньев различной массы

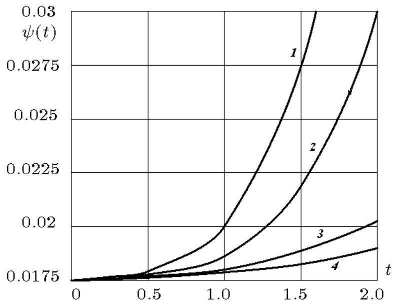

Рис. 3. Временные зависимости угла асимметрии для клиньев различной массы

угол асимметрии $\psi_0=0°\div 10°$, начальная скорость вращения $\dot{\psi}_0=0\div 0.1$, масса тела $\mu=0.1\div 100$, начальная скорость погружения $v_0=0.01\div 0.15$.

На рис. 2 – 5 приведены некоторые результаты численного решения при следующих параметрах: $v_0=0.15$, $\dot{\psi}_0=0$, $\rho_0=2.7$, угол полураствора клина $\gamma=85°$, начальное значение угла асимметрии $\psi_0=1°$ и, следовательно, начальные значения углов килеватости $\beta_1(0)=6°$, $\beta_2(0)=4°$.

На рис. 2 показана зависимость от времени гидродинамической силы $F(t)$ для клиньев различной массы.

Цифрами *1 – 4* на рис. 2 отмечены кривые, соответствующие следующим значениям массы клина $\mu=2.5$; 5; 10; 20. Штриховая линия соответствует случаю погружения клина с постоянной скоростью и полностью совпадает с кривой аналитического решения автомодельной задачи несимметричного удара тупого клина с постоянной скоростью погружения и неизменяющимися углами килеватости [15, 16].

Из рис. 2 можно заметить, что гидродинамическая сила, равная нулю в начальный момент процесса погружения клина в жидкость, растет до своего максимального значения, а затем убывает, причем:

- гидродинамическая сила убывает тем быстрее, чем легче тело;
- чем легче тело, тем раньше достигается максимум гидродинамической силы;
- чем легче тело, тем меньше максимальное значение гидродинамической силы, действующее на тело со стороны жидкости.

На рис. 3 показана зависимость от времени t угла асимметрии $\psi(t)$ для различных значений массы клина. Цифрами *1 – 4* отмечены кривые, соответствующие следующим значениям массы клина $\mu=5$; 10; 20; 40.

Из рис. 3 можно заметить, что:

- угол асимметрии растет, причем тем быстрее, чем меньше масса клина;
- так как на исследуемом временном интервале угол асимметрии является возрастающей функцией времени t для произвольных значений масс, то клин стремится опрокинуться и лечь на свою грань.

На рис. 4 показана зависимость от времени t чисел Маха $M_1(t)$, $M_2(t)$ граней клина при различных значениях массы клина для начальных значений чисел Маха $M_1(0)=1.427$, $M_2(0)=2.145$. Цифрами *1 – 3* отмечены кривые, соответствующие следующим значениям массы клина: $\mu=5$; 10; 20. Штриховые линии соответствуют случаю погружения клина с постоянной скоростью.

Из рис. 4 видно, что:

- кривые чисел Маха $M_1(t)$, $M_2(t)$ убывают тем быстрее, чем легче тело;
- в начальный момент процесса оба числа Маха граней клина являются “сверхзвуковыми” и на рассматриваемом отрезке времени
  - оба числа Маха остаются “сверхзвуковыми” для клина массой $\mu=20$;
  - для клина массой $\mu=10$ большее число Маха остается “сверхзвуковым”, а меньшее переходит в “дозвуковое”;
  - оба числа Маха переходят в “дозвуковые” для клина массой $\mu=5$.

На рис. 5 показана зависимость от времени момента реакции $M(t)$ для клиньев различной массы. Цифрами *1 – 4* отмечены кривые, соответствующие следующим значениям массы клина: $\mu=2.5$; 5; 10; 20.

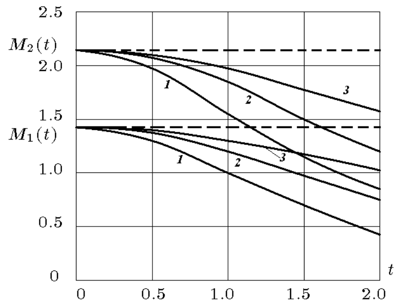

Рис. 4. Временные зависимости чисел Маха граней клина для клиньев различной массы

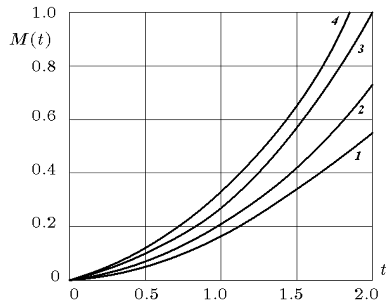

Рис. 5. Временные зависимости момента реакции для клиньев различной массы

Из рис. 5 видно, что момент реакции $M(t)$, равный нулю в начале процесса погружения клина в жидкость, возрастает, причем тем быстрее, чем легче тело.

На рис. 6, 7 приведены отдельные результаты численного решения при следующих параметрах: $v_0=0.15$, $\dot{\psi}_0=0$, $\rho_0=2.7$, $\mu=5$, угол полураствора клина $\gamma=82°$.

На рис. 6 показана зависимость от времени гидродинамической силы $F(t)$ для клина при различных начальных значениях угла асимметрии ψ_0, а, следовательно, начальных значениях углов килеватости $\beta_1(0)$, $\beta_2(0)$. Цифрами *1–3* на рис. 6 отмечены кривые, соответствующие следующим начальным значениям угла асимметрии: $\psi_0=2°$; $3°$; $4°$. Штриховая линия соответствует решению симметричной задачи для клина (начальное значение угла асимметрии $\psi_0=0°$, т. е. $\beta_1(0)=\beta_2(0)$).

Из рис. 6 можно заметить, что:

- чем меньше начальный угол асимметрии ψ_0, тем раньше достигается максимум гидродинамической силы;
- чем меньше начальный угол асимметрии ψ_0, тем меньше максимальное значение гидродинамической силы, действующее на тело со стороны жидкости.

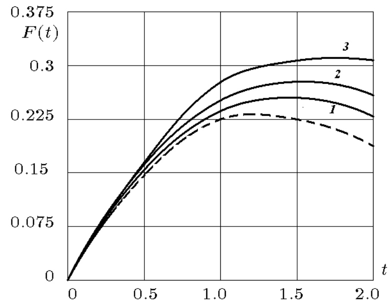

Рис. 6. Временные зависимости гидродинамической силы для клина при различных начальных значениях угла асимметрии

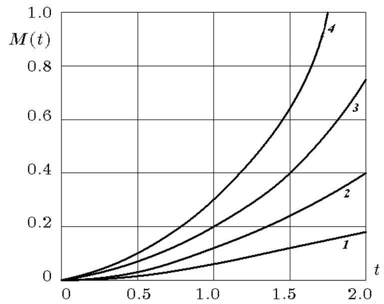

Рис. 7. Временные зависимости момента реакции для клина при различных начальных значениях угла асимметрии

На рис. 7 показана зависимость от времени момента реакции $M(t)$ для клина при различных начальных значениях угла асимметрии ψ_0. Цифрами *1–4* отмечены кривые, соответствующие начальным значениям угла асимметрии: $\psi_0=1°$; $2°$; $3°$; $4°$.

Из рис. 7 видно, что момент реакции $M(t)$, равный нулю в начале процесса погружения клина в жидкость, возрастает, причем тем быстрее, чем больше угол асимметрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует подчеркнуть, что за исключением результатов для несимметричного тупого клина, приведенных в монографиях Сагомоняна А. Я. [15, 16], отсутствуют публикации, посвященные решению несимметричных задач вертикального удара затупленных тел о жидкость. В [15, 16] решена автомодельная задача вертикального погружения в сжимаемую жидкость с постоянной скоростью несимметричного тупого клина и получены аналитические формулы для определения гидродинамического давления и гидродинамической силы при постоянных углах килеватости в случаях, когда:

1) оба числа Маха граней клина являются "сверхзвуковыми";

2) одно число Маха является "сверхзвуковым", а другое – "дозвуковым";

3) оба числа Маха являются "дозвуковыми".

В данной же работе решена плоская несимметричная задача вертикального удара и погружения в сжимаемую жидкость с изменяющимися скоростью и углами килеватости тупого клина конечной массы с учетом не только его поступательного вертикального перемещения вниз, но и вращательного движения клина вокруг своего центра масс. Как частный предельный случай, если рассматривать задачу удара для клина бесконечной массы, получаются результаты, приведенные в работах [15, 16].

1. *Веклич Н. А.* Удар прямоугольной пластины о жидкое полупространство // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1992.– N 5.– С. 120–126.
2. *Гавриленко В.В.* Плоская симметричная задача удара тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости с учетом отрыва // Акуст. вiсн.– 1998.– **1**, N 2.– С. 34–40.
3. *Горшков А. Г., Дробышевский Н. И.* Применение метода граничных элементов к задаче о проникновении тел в жидкость // Изв. РАН. Мех. тверд. тела.– 1995.– N 6.– С. 99–103.
4. *Ерошин В. А.* Высокоскоростной вход в воду тяжелого диска под малым углом к свободной поверхности // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1995.– N 6.– С. 13–18.
5. *Коробкин А. А.* Акустическое приближение в задаче погружения затупленного контура в идеальную жидкость // Прикл. мех. и техн. физ.– 1992.– N 4.– С. 48–54.
6. *Норкин М. В.* Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1995.– N 5.– С. 161–165.
7. *Ye Qu Ynau, He You Sheng* Perturbation solution to the nonlinear problem of oblique water exit of an axisymmetric body with a large exit–angle // Appl. Math. and Mech.– 1991.– **12**, N 4.– P. 327–338.
8. *Кубенко В. Д.* Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость.– Киев: Наук. думка, 1981.– 160 с.
9. *Гавриленко В. В.* Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика.– 1990.– Вып. 62.– С. 34–39.
10. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В.* Плоская задача проникания тонких упругих цилиндрических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 9.– С. 66–75.
11. *Гавриленко В. В.* Определение напряженно – деформированного состояния проникающих в сжимаемую жидкость тонких упругих сферических оболочек // Прикл. механика.– 1988.– **24**, N 9.– С. 30–37.
12. *Гавриленко В. В.* Удар тонкой упругой сферической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика.– 1990.– Вып. 61.– С. 17–24.
13. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В.* Осесимметричная задача проникания жестких тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1987.– **23**, N 1.– С. 53–60.
14. *Кубенко В. Д., Гавриленко В. В.* Осесимметричная задача проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1988.– **24**, N 4.– С. 63–74.
15. *Сагомонян А. Я.* Проникание.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.– 300 с.
16. *Сагомонян А. Я.* Удар и проникание тел в жидкость.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.– 172 с.
17. *Баженов В. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В.* Анализ нелинейных эффектов при высокоскоростном проникании тел в сжимаемую жидкость // Прикл. мех.– 1986.– **22**, N 2.– С. 125–127.
18. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение).– Л.: Судостроение, 1976.– 199 с.
19. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами.– Киев: Наук. думка, 1969.– 216 с.