

# ПРОХОЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ДАВЛЕНИЯ ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Л. Б. ЛЕРМАН

СКТБ Института механики НАН Украины им. С. П. Тимошенко, Киев

Получено 1.12.98

Приводится решение нестационарной задачи акустоупругости для пластин Тимошенко конечных размеров. Предполагается, что пластина занимает часть акустически жесткого экрана, который перекрывает волновод прямоугольного сечения произвольных поперечных размеров (вплоть до бесконечно больших). Предусматривается возможность учета конечных размеров области, находящейся за преградой. Рассматриваются две возможные схемы решения задачи, основанные на сведении к различным бесконечным системам интегро-дифференциальных уравнений и обосновывается возможность применения к последним метода редукции. Результаты численных экспериментов, выполненных для практической оценки погрешности, возникающей при усечении бесконечных систем и скорости сходимости итераций при построении решений, иллюстрируются конкретными примерами. Достоверность расчетов подтверждается сравнением с экспериментальными данными.

## ВВЕДЕНИЕ

Стационарные задачи прохождения акустических волн через перегородки конечных размеров, тонкие оболочки и решетки из упругих элементов рассматривались, например, в [1–5], а основные результаты исследований взаимодействия нестационарных волн давления с тонкостенными элементами конструкций приведены в [6–8]. В обзоре [9] приводится весьма подробная библиография по данным вопросам. В статье автора [10] при решении нестационарной задачи акустоупругости для пластины Тимошенко, занимающей часть жесткой перегородки, которая перекрывает волновод произвольных поперечных размеров (вплоть до бесконечно больших), основное внимание было уделено определению характеристик напряженно-деформированного состояния упругого элемента. В настоящем сообщении рассматриваются две возможные схемы решения упомянутой задачи, основанные на сведении к различным бесконечным системам интегро-дифференциальных уравнений. В дополнение к результатам, полученным в [10], обосновано применение к последним метода редукции и реализована возможность учета конечных размеров акустической области, находящейся за преградой. Приводятся численные результаты, подтверждающие эффективность разработанных алгоритмов.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается акустически жесткий тонкий экран, расположенный в плоскости  $xu$  и разделяющий две акустические среды, заполняющие области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причем область  $\Omega_2$  за экраном может быть бесконечной или ограниченной по ко-

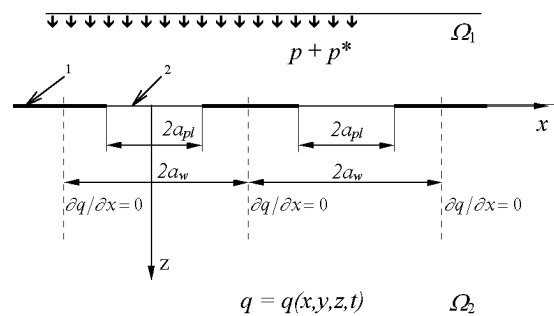


Рис. 1. Расчетная схема задачи:  
1 – экран, 2 – упругие элементы (пластины)

ординате  $z$  абсолютно жесткой перегородкой, параллельной экрану ( $x, y, z$  – декартовы координаты). Предполагается, что часть экрана заменена одной или несколькими периодически расположенными одинаковыми прямоугольными пластинами с размерами  $2a_{pl} \times 2b_{pl}$ , т. е. рассматривается одна из моделей двумерной решетки [2] из упругих элементов с периодами  $2a_w$  и  $2a_w$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно. Начало координат поместим в центр одной из пластин (на рис. 1 показано сечение рассматриваемой системы плоскостью  $y=0$ ).

Пусть из области  $\Omega_1$  набегающая плоская волна давления, вызывающая движение пластины и газа в области  $\Omega_2$ . С учетом того, что для периодической решетки наклонное падение на основании теоремы Флоке [11] всегда можно учесть посредством введения соответствующего множителя [2], ниже рассматривается только нормальное падение волны. Давление в области  $\Omega_1$  представляется в виде суммы  $p + p^*$ , где  $p^* = p^*(x, y, z, t)$  – да-

вление в падающей волне, а  $p=p(x, y, z, t)$  – давление в отраженной волне ( $t$  – время). В области  $\Omega_2$  распространяется прошедшая сферическая (в плоском случае – цилиндрическая) волна с давлением  $q=q(x, y, z, t)$ . Функции давлений в акустическом приближении [2, 6-8, 12] являются решениями волновых уравнений

$$c_1^2 \Delta p = \ddot{p}, \quad c_2^2 \Delta q = \ddot{q}, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – трехмерный оператор Лапласа;  $c_1, c_2$  – скорости звука; точками обозначено дифференцирование по времени.

В случае бесконечной решетки характеристики акустических полей описываются периодическими по координатам  $x, y$  функциями [2], и граничные условия можно задать, потребовав равенства нулю нормальных компонент скоростей на плоскостях  $x = \pm a_w, y = \pm b_w$ . Формально эти условия совпадают с условиями, которые должны выполняться на жестких стенках волновода постоянного прямоугольного сечения с размерами  $2a_w \times 2b_w$ , что позволяет говорить об эквивалентности соответствующих акустических задач. Дополнительно для прошедшей волны в случае конечной области  $\Omega_2$ , ограниченной абсолютно жесткой перегородкой, нормальная компонента вектора скорости на этой перегородке также должна обращаться в ноль. Выражая скорости через давления, получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} p_{,x} \Big|_{x=\pm a_w} = 0, \quad p_{,y} \Big|_{y=\pm b_w} = 0, \\ q_{,x} \Big|_{x=\pm a_w} = 0, \quad q_{,y} \Big|_{y=\pm b_w} = 0, \quad (2) \\ q_{,z} \Big|_{z=d} = 0, \end{aligned}$$

где нижним индексом после запятой обозначено дифференцирование по координате;  $d$  – расстояние от экрана до перегородки. В случае бесконечной области  $\Omega_2$  последнее из условий (2) заменяется на условия излучения (при  $z \rightarrow \infty$ ). На границе областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  нормальная компонента скорости равна нулю на жесткой части экрана и совпадает со скоростью поперечных перемещений пластины в деформируемой части. Для тонкой пластины эти условия можно перенести на ее срединную поверхность  $\Gamma$  [1, 2] и записать в виде

$$(p + p^*)_{,z} \Big|_{z=0} = v_1(x, y, t), \quad (3)$$

$$q_{,z} \Big|_{z=0} = v_2(x, y, t),$$

где функции  $v_1(x, y, t)$  и  $v_2(x, y, t)$  задаются следу-

ющим образом:

$$\begin{aligned} v_1(x, y, t) &= \begin{cases} -\rho_1 \ddot{w}, & (x, y) \in \Gamma, \\ 0, & (x, y) \notin \Gamma, \end{cases} \\ v_2(x, y, t) &= \begin{cases} \rho_2 \ddot{w}, & (x, y) \in \Gamma, \\ 0, & (x, y) \notin \Gamma, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее  $w=w(x, y, t)$  – прогиб срединной поверхности пластины;  $\rho_1, \rho_2$  – плотности акустических сред.

При описании переходных процессов движение тонкостенных элементов целесообразно [9] описывать уравнениями гиперболического типа, например, уравнениями уточненной линейной теории пологих слоистых ортотропных оболочек типа С. П. Тимошенко [13]. Дополненные силами сопротивления [14], пропорциональными скорости, эти уравнения представляются в виде

$$L\mathbf{u} + B_\rho \dot{\mathbf{u}} = C_\rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}(x, y, t)$  – вектор обобщенных перемещений, включающий в себя кроме прогиба функции сдвига;  $B_\rho, C_\rho$  – матрицы диссипативных членов и инерции;  $\mathbf{f}$  – вектор поверхностных нагрузок. В рассматриваемой задаче единственная отличная от нуля нормальная компонента вектора нагрузок равна разности давлений  $f_z = (p + p^* - q) \Big|_{z=0}$ . На контуре пластины предполагается выполнение граничных условий, исключающих ее смещение как твердого тела [1, 6].

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИН

Для построения решений исходных задач (1) – (3) для волновых уравнений, также как и в [10], применяется преобразование Фурье по координатам  $x, y$  для бесконечного экрана с одной пластиной и конечное интегральное преобразование для периодической задачи (волновода). В первом случае ядром преобразования является функция

$$U(x, y, \lambda, \mu) = \exp[i(\lambda x + \mu y)],$$

где  $\lambda, \mu$  – переменные преобразования. Во втором случае ядра – это функции вида

$$U_{nm}(x, y) = (4\varepsilon_{nm}/(a_w b_w)) \cos(\lambda_n x) \cos(\mu_m y),$$

где  $\lambda_n = n\pi/(2a_w); \mu_m = m\pi/(2b_w);$

$$\varepsilon_{nm} = \begin{cases} 1/4, & \text{при } n = m = 0, \\ 1/2, & \text{при } nm = 0, \quad n \neq 0 \text{ или } m \neq 0, \\ 1, & \text{при } n \neq 0 \text{ и } m \neq 0, \end{cases}$$

( $n, m = 0, 2, 4 \dots$ ), образующие полную ортогональную систему в прямоугольнике  $2a_w \times 2b_w$  и удовлетворяющие краевым условиям (2). Применение преобразований к уравнениям (1) и граничным условиям (3) приводит к начально-краевым задачам вида

$$u_{,zz} - \gamma^2 u = c^{-2} \ddot{u}, \quad u_{,z} = v(t), \quad (6)$$

где  $\gamma, c$  – неотрицательные постоянные;  $v(t)$  – некоторая известная функция. Для полуоси  $0 \leq z < \infty$  решение задачи (6) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$u = -c \int_0^{t-z/c} v(\tau) J_0(c\gamma \sqrt{(t-\tau)^2 + z^2/c^2}) d\tau, \quad (7)$$

где  $J_0(x)$  – функция Бесселя своего аргумента (в случае полуоси  $-\infty < z \leq 0$  решение получается из (7) заменой  $z$  на  $-z$ ). Для конечного промежутка решение уравнения (6) представляется в виде ряда по функциям  $\cos(\beta_l z)$ , где  $\beta_l = l\pi/d$  ( $l = 1, 2, \dots$ ):

$$u = \frac{2c}{d} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t v(\tau) \sin \left[ c(t-\tau) \sqrt{\beta_l^2 + \gamma_l^2} \right] d\tau \right\} \times \cos(\beta_l z) / \sqrt{\beta_l^2 + \gamma_l^2}. \quad (8)$$

Применение формул обратных преобразований к выражениям (7), (8) дает необходимые расчетные формулы. Например, для давления  $q$  в случае бесконечной области за преградой получаем

$$q = \frac{c_2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x\lambda + y\mu)} d\lambda d\mu \times \int_0^{t+z/c_2} v_2^F(\lambda, \mu, \tau) J_0 \left( \gamma c_2 \sqrt{(t-\tau)^2 + z^2/c_2^2} \right) d\tau, \quad (9)$$

$$q = -c_2 \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{m=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{\|U_{nm}\|^2} \times \left\{ \int_0^{t+z/c_2} v_{nm}^{(2)}(\tau) J_0 \left( c_2 \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \times \sqrt{(t-\tau)^2 + z^2/c_2^2} \right) d\tau \right\} U_{nm}(x, y), \quad (10)$$

причем формула (9) соответствует бесконечному экрану с одной пластиной, а (10) – периодической задаче. В (9), (10)  $\gamma^2 = \lambda^2 + \mu^2$ ;  $\|U_{nm}\|$  – норма функции;  $v_2^F(\lambda, \mu, t)$  – Фурье-образ;  $v_{nm}^{(2)}$  – образ

функции  $v_2(x, y, t)$  после применения конечного интегрального преобразования. Для получения расчетной формулы при рассмотрении ограниченной области следует интегралы по времени в (9) и (10) заменить на выражения (8), в которых в зависимости от типа рассматриваемой задачи следует положить  $v(t) = v_2^F(\lambda, \mu, t)$  или  $v(t) = v_{nm}^{(2)}(t)$ . Аналогичные формулы выписываются и для давления отражения в области  $\Omega_1$ . Полученные формулы выражают давление в произвольной точке областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , через функции  $v_1(x, y, t)$ ,  $v_2(x, y, t)$ , задающие распределение скоростей на границе раздела  $z=0$ , т.е. позволяют решить задачу определения акустических полей при известном законе движения пластины.

Решения уравнений движения упругого элемента (5) представим в виде рядов по собственным формам колебаний (СФК) пластины в вакууме  $S_k = S_k(x, y)$ , образующих в области  $\Gamma$  полную ортогональную систему. Тогда, в частности, для прогиба будем иметь ряд

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|S_k\|^2} w_k(t) S_k(x, y), \quad (11)$$

где  $\|S_k\|$  – норма функции. Коэффициенты ряда (11), являющиеся решениями модальных уравнений, удобно записать в виде интегралов Дюамеля

$$w_k(t) = \frac{1}{j_0 b_k} \left\{ \int_0^t \left[ p_k^*(\tau) + p_k(\tau) - q_k(\tau) \right] \times e^{-c_k(t-\tau)} \sin \left[ b_k(t-\tau) \right] d\tau \right\}, \quad (12)$$

где  $b_k^2 = \omega_k^2 - c_k^2$ ;  $\omega_k$  – собственные частоты колебаний (СЧК) пластины в вакууме без учета потерь;  $c_k$  – коэффициенты затухания [14];  $p_k^*(t)$ ,  $p_k(t)$ ,  $q_k(t)$  – коэффициенты разложений функций  $p^*$ ,  $p$ ,  $q$  по СФК пластины, вычисленные при  $z=0$ ;  $k$  – номер СЧК, а сами частоты считаются упорядоченными в порядке возрастания (с учетом их возможной кратности).

### 3. ВЫВОД БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ К НИМ МЕТОДА РЕДУКЦИИ

Приведенные в предыдущем пункте формулы позволяют определить как функции давлений при известной скорости поперечного движения пластины, так и перемещения (скорость, ускорения)

пластины при известных нагрузках. Связь между искомыми функциями задают условия (3). В принятой схеме решения задачи эти функции представлены рядами (для бесконечного экрана интегралами) по системам ортогональных функций. Поэтому дальнейшие этапы решения задачи состоят в нахождении связи между коэффициентами разложения искомым функциям давления и прогиба. Один из возможных путей решения этой задачи состоит в подстановке разложений (11) в условия совместности (3), т.е. принимается, что

$$v_i(x, y, t) = \mp \rho_i \sum_s \ddot{w}_s(t) S_s(x, y) \quad (i = 1, 2).$$

Таким способом в [10] получены следующие формулы для коэффициентов давлений:

$$p_k = p_{от,k} + c_1 \rho_1 \sum_s \int_0^t \ddot{w}_s(\tau) B_{ks}^{(1)}(t - \tau) d\tau, \quad (13)$$

$$q_k = -c_2 \rho_2 \sum_s \int_0^t \ddot{w}_s(\tau) B_{ks}^{(2)}(t - \tau) d\tau,$$

где  $p_{от,k}$  – коэффициент разложения давления отражения от жесткой стенки, а выражения для ядер интегралов приведены в [10]. В случае конечной области  $\Omega_2$  функция Бесселя в соответствующих формулах заменяется рядом

$$(2c_2/d) \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left[ c_2 \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} (t - \tau) \right] / \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \quad (14)$$

где  $\gamma^2 = \lambda^2 + \mu^2$  для бесконечного экрана и  $\gamma^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2$  для волновода.

Уравнения (12) связывают  $k$ -ый коэффициент разложения прогиба с  $k$ -ми коэффициентами разложений давлений, а (13) – выражают коэффициенты давлений через коэффициенты ускорений, причем  $k$ -ый коэффициент давлений оказывается связанным с бесконечным числом коэффициентов ускорений. Таким образом, в совокупности эти уравнения представляют собой бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра относительно коэффициентов разложений искомым функций, причем все разложения выполняются по СФК пластины.

Второй подход к выводу бесконечной системы удобно изложить на примере эквивалентного волновода. На этот раз раскладываем функцию прогиба в ряд Фурье по функциям  $U_{nm}(x, y)$ , имеющим тот же смысл, что и выше, т.е. полагаем в условиях (3)

$$w(x, y, t) = \sum_{n,m} \frac{1}{\|U_{nm}\|^2} W_{nm}(t) U_{nm}(x, y)$$

(для отличия от разложений по СФК пластины коэффициенты разложений обозначены большими буквами). Следует отметить, что в случаях, когда пластина не полностью перекрывает волновод, при нахождении коэффициентов функцию прогиба вне области  $\Gamma$  следует доопределить нулем. В итоге для вычисления коэффициентов давлений на границе раздела сред получаем формулы:

$$P_{nm}(t) = c_1 \rho_1 \int_0^t \ddot{W}_{mn}(\tau) J_0[c_1(t - \tau)] d\tau + c_1 \rho_1 \int_0^t P_{mn,z}^0(0, \tau) J_0[c_1(t - \tau)] d\tau, \quad (15)$$

$$Q_{nm}(t) = c_2 \rho_2 \int_0^t \ddot{W}_{mn}(\tau) J_0[c_2(t - \tau)] d\tau. \quad (16)$$

Для ограниченной области функция Бесселя в (16) заменяется рядом (14).

Система интегро-дифференциальных уравнений (12), (15), (16) относительно неизвестных  $w_k$ ,  $p_k$ ,  $q_k$ ,  $W_{mn}$ ,  $P_{mn}$ ,  $Q_{mn}$  содержит коэффициенты разложений искомым функций по различным системам функций. В силу того, что функции  $S_k(x, y)$ ,  $U_{nm}(x, y)$  образуют полные ортогональные системы, связь между коэффициентами можно установить сравнением соответствующих разложений функций  $p(x, y, 0, t)$ ,  $q(x, y, 0, t)$ ,  $w(x, y, t)$  по этим системам, имеющим место в области  $\Gamma$ . В результате такой процедуры получают следующие ряды

$$W_{mn}(t) = \frac{1}{\|U_{mn}\|^2} \sum_k A_{kmn} w_k(t),$$

$$\{p_k(t), q_k(t)\} = \frac{1}{\|S_k\|^2} \sum_k A_{kmn} \times \{P_{mn}(t), Q_{mn}(t)\}, \quad (17)$$

где коэффициенты  $A_{kmn}$  определяются интегралами вида

$$A_{kmn} = \int_{\Gamma} S_k(x, y) U_{nm}(x, y) dx dy.$$

Если пластина полностью перекрывает волновод, то эти интегралы с точностью до нормирующего множителя представляют собой коэффициенты Фурье при разложениях функций  $S_k(x, y)$  по собственным функциям волновода или функций  $U_{nm}(x, y)$  по СФК пластины. Аналогичные формулы в [8] получены с использованием формулы

Грина для волнового уравнения. Подстановка выражений (17) в (12) и (15), (16) приводит к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений, в которой каждый коэффициент давления (прогиба) выражается через бесконечное число коэффициентов прогиба (давлений). Можно показать, что такие системы эквивалентны полученной ранее, однако на практике они могут оказаться удобней ввиду более простого строения ядер. Кроме того, в случае выполнения условий “плавающей заделки” для пластины [1, 13] ее СФК и собственные функции волновода совпадают, ряды (17) вырождаются в простые равенства, а матрица бесконечной системы приобретает диагональный вид.

Для обоснования возможности применения метода редукции к полученным системам покажем, что, например, система уравнений (12), (13) является квазирегулярной [12]. Доказательство проведем для случая одинаковых сред, применяя преобразование Лапласа. С учетом теоремы о свертке и правила преобразования производных в пространстве изображений получим бесконечную систему алгебраических линейных уравнений, структура которых позволяет исключить одну группу неизвестных. Исключая, например, изображения коэффициентов прогиба  $w_k$ , получим систему относительно только неизвестных коэффициентов давлений  $p_k$  вида

$$x_k - \sum_{s=1}^{\infty} a_{ks}(p)x_s = f_k(p) \quad (k = 1, 2), \quad (18)$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа. В выражении (18) использованы следующие обозначения:

$$x_k = p_k^L, \quad (19)$$

$$a_{ks}(p) = \frac{2c_1\rho_1}{j_0} \frac{p^2 B_{ks}^L}{(p+c_s)^2 + b_s^2},$$

$$\begin{aligned} f_k(p) &= p_{от,k}^L + c_1\rho_1 \sum_{s=1}^{\infty} B_{ks}^L w_s^{*L} = \\ &= p_{от,k}^L + \frac{c_1\rho_1}{j_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p^2 B_{ks}^L}{(p+c_s)^2 + b_s^2} p_s^{*L}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $j_0$  – элемент матрицы инерции.

Коэффициенты системы (18) при всех конечных  $p$  обладают свойствами:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} a_{ks}(p) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ks}(p) &= 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(p) = 0, \quad (21) \\ &(s = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Первое утверждение вытекает из того, что собственная частота  $b_s$  с ростом  $s$  неограниченно возрастает. Второе и третье следует из того, что функции  $B_{ks}^{(1,2)}(t) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  как коэффициенты Фурье [10] непрерывной функции. Заметим, что по той же причине  $B_{ks}^{(1,2)}(t) \rightarrow 0$  и при  $s \rightarrow \infty$ . Таким образом, в силу (21) при достаточно больших  $k$  и  $s$  коэффициенты уравнений становятся как угодно малыми за исключением диагональных, которые будут близки к единице. Поэтому определитель системы при любых  $k$  и  $s$  всегда будет отличным от нуля, а сама система разрешимой. При этом правая часть также становится как угодно малой, из чего следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Для доказательства первого признака квазирегулярности системы (18) заметим, что, как указывалось,  $B_{ks}^{(1,2)}(t) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и, значит,  $B_{ks}^L(p) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому при любом конечном  $p$  для любого наперед заданного  $\eta$  существует такой номер  $N$ , что при всех  $k > N$  будет иметь место  $|B_{ks}^L| < \eta$ . В силу этого для ряда, составленного из модулей коэффициентов строк, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} |a_{ks}| &< \frac{2c_1\rho_1\eta}{j_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p^2}{(p+c_s)^2 + b_s^2} < \\ &< \frac{2c_1\rho_1\eta p^2}{j_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{b_s^2} < \frac{2c_1\rho_1\eta p^2}{j_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_s^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ряд в правой части (22) сходится, что и доказывает сходимость ряда в левой части при любом конечном  $p$ . Обозначив его сумму через  $S_\omega$  и выбрав  $\eta < j_0/(2c_1\rho_1 p^2 S_\omega)$ , получим для всех  $k > N$  оценку

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{ks}| < 1.$$

Нетрудно заметить, что и второй признак квазирегулярности, накладывающий ограничения на свободные члены в бесконечной системе, также выполняется. Действительно, согласно [12] должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} |f_k(p)| &= \left| p_{от,k}^L + \frac{c_1\rho_1}{j_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p^2}{(p+c_s)^2 + b_s^2} p_s^{*L} \right| < \\ &< K \left| 1 - \sum_{s=N+1}^{\infty} |a_{ks}| \right|, \end{aligned} \quad (23)$$

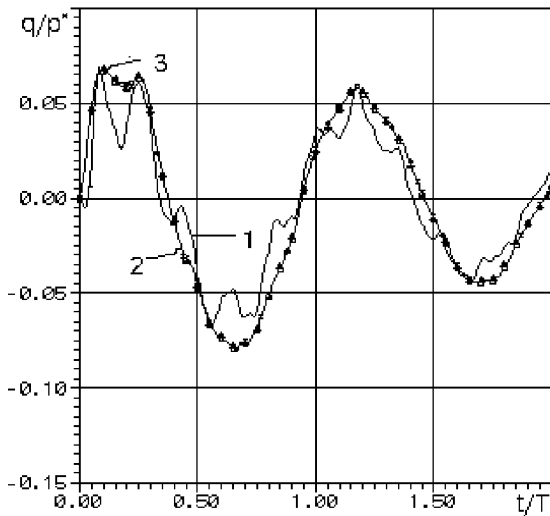


Рис. 2. Временная зависимость первого члена ряда в разложении давления на тыльной стороне пластины при различном числе удержанных слагаемых для условия ее жесткого защемления (цилиндрический изгиб):

- 1 - при удержании 3-х членов ряда,
- 2 - при удержании 4-х членов ряда,
- 3 - при удержании 5-ти членов ряда

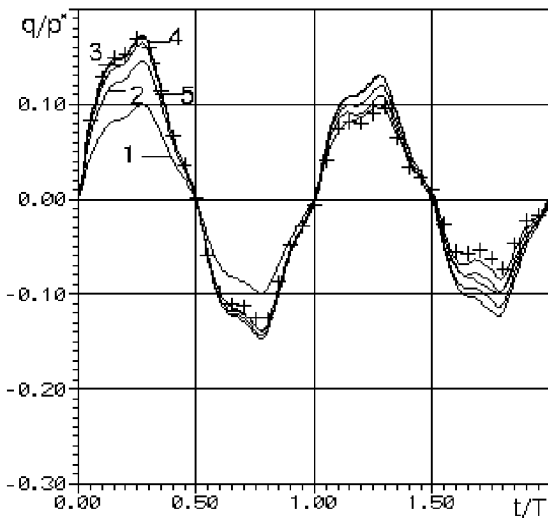


Рис. 3. Временные зависимости величины давления в центре тыльной стороны шарнирно опертой квадратной пластины при различном числе итераций (цифры возле кривых обозначают число итераций)

где  $K$  – положительная константа. Ряд в левой части неравенства (23) сходится, а коэффициенты Фурье  $p_{от,k}^L$  сходящегося ряда ограничены. Так как остаток сходящегося ряда в правой части (23) может быть сделан как угодно малым за счет выбора  $N$ , неравенство будет выполнено, если взять  $K > |p_{от,1}^L + S_1|$  ( $S_1$  – сумма ряда в левой части при  $k=1$ ).

Таким образом, система (18) является квазирегулярной и имеет решение такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Следовательно, к ней применим метод редукции, и с возрастанием порядка систем их решения будут сходиться к искомому единственному решению. Заметим, что полученные оценки сохраняют свою силу как при  $p \rightarrow 0$ , так и при  $p \rightarrow \infty$ , в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой с учетом того, что асимптотическое поведение коэффициента  $B_{ks}^L$  определяется выражением  $[p^2 + c^2(\lambda_n^2 + \mu_m^2)]^{-1/2}$ . Поэтому из непрерывности преобразования Лапласа следует, что метод редукции применим и к исходным системам интегро-дифференциальных уравнений. Аналогичное утверждение о квазирегулярности и единственности решения можно доказать и для системы уравнений (12), (15) – (17).

#### 4. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Полученные выше системы интегро-дифференциальных уравнений относятся к уравнениям типа Вольтерра второго рода. Так как возможность редукции обоснована, для решения систем конечного порядка можно использовать любой из известных методов. Как и в [10], в данной работе применяется метод последовательных приближений, имеющий в своей основе физическую интерпретацию (нулевое приближение – это отражение от жесткой стенки). В случае его применения к системе уравнений (12), (14) – (16) формулы (16), осуществляющие переход от одной системы коэффициентов к другой, используются на каждом шаге итерационного процесса. Фактически при выполнении итераций задача сводится к вычислению интегралов с переменным верхним пределом при известных подынтегральных функциях. После нахождения коэффициентов определение полей давлений сводится к суммированию соответствующих рядов. Следует отметить, что ядра уравнений вычисляются до входа в итерационный процесс, а сходимость удается ускорить, используя среднее арифметическое предыдущих приближений.

Практический интерес прежде всего представляет оценка фактической погрешности вычисления давлений при усечении рядов, а также скорости сходимости последовательных приближений. Некоторые характерные результаты выполненных с этой целью расчетов для пластины в бесконечном экране и для пластины в волноводе представлены на рис. 2, 3. В первом случае

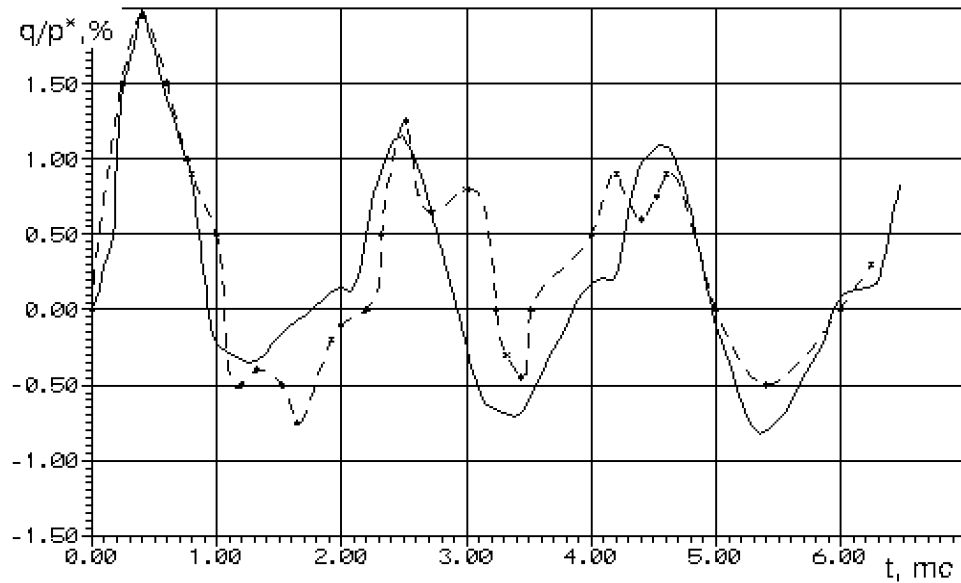


Рис. 4. Временные зависимости величины давления на тыльной стороне пластины в ее центральной зоне: сплошная – расчет, штриховая – эксперимент

рассматривалась плоская задача, и края пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, предполагались жестко заземленными. Во втором примере считалось, что шарнирно опертая квадратная пластина полностью перекрывает волновод квадратного сечения. Расчеты выполнены для пластин с относительной толщиной  $h/(2a_{pl})=0.01$  при следующих значениях физико-механических характеристик: модуль упругости пластин  $E=18$  МПа, модули сдвига  $G_{12}=7.5$  МПа,  $G_{13}=G_{23}=2.5$  МПа, плотность  $\rho=1.2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; для шарнирной пластины силы сопротивления не учитывались, а для заземленной коэффициент затухания  $\alpha=0.05$ . В обоих случаях давление в падающей волне описывалось функцией Хевисайда (прямоугольный импульс бесконечной длительности), а в качестве акустических сред принимался воздух. На рис. 2 показаны временные зависимости (в качестве масштаба времени  $T$  принят период колебаний основного тона пластины в вакууме) первого коэффициента в разложении функции давления  $q$  по СФК пластины при различном числе удержанных членов ряда. Кривые, представленные на рис. 3, позволяют судить о сходимости последовательных приближений при вычислении давления излучения. Расчеты выполнены при удержании 25 членов в двойных рядах с использованием схемы переразложения неизвестных в процессе итераций.

Из этих графиков и результатов других вы-

полненных численных экспериментов следует, что в практических расчетах достаточно удержать весьма незначительное число членов в разложениях искомых величин. Это объясняется тем, что ввиду быстрой сходимости основной вклад дают первые члены рассматриваемых рядов. При этом, если число членов ряда недостаточно, то на кривой давления наблюдаются флуктуации (кривая 1 на рис. 2), которые исчезают при увеличении числа учитываемых коэффициентов. Как следует из рис. 3, реализованная схема метода последовательных приближений оказывается также весьма эффективной. В рассмотренных примерах оказывается достаточным 4–5 итераций даже для относительно тонких пластин ( $h/a < 0.01$ ), когда давление  $q$  наиболее существенно. Расхождение в последовательных итерациях находится в пределах 3–5%, и при необходимости может быть уменьшено.

Уместно отметить, что достоверность расчетов в частных случаях подтверждена сравнением с экспериментальными данными, полученными в ударной трубе по методике, изложенной в [8]. В дополнение к результатам такого сравнения, приведенным в [10], на рис. 4 показаны расчетные и экспериментальные (штриховые линии) временные зависимости давления  $q$  через стальную прямоугольную пластину, полностью перекрывающую волновод и находящуюся в условиях цилиндрического изгиба (короткие кромки заземлены).

Следует отметить удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных. Некоторое отличие расчетных и экспериментальных данных объясняется малостью абсолютной величины давления  $q$  (не более 2% от давления падающей волны) и связанной с этим высокой погрешностью измерения, а также некоторым несоответствием фактических и принятых в расчете условий закрепления краев пластины.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение уместно отметить, что приведенные результаты показывают высокую эффективность разработанного подхода. Так как для оценки характеристик прохождения импульсов любой формы и длительности достаточно выполнить операцию свертки построенных решений с известной функцией, то это открывает возможность его использования при рассмотрении конкретных прикладных задач, например, для определения фильтрующих свойств акустических решеток. Так, представляющие интерес при оценке звукоизоляции частотные уравнения [1, 2], получаются из формул (17)–(19) заменой параметра преобразования Лапласа на величину  $i\omega$  ( $i$  – мнимая единица). Эти же соотношения могут быть использованы и для асимптотической оценки поведения исследуемых функций при больших временах.

1. Борисов Л. П., Гужас Д. Р. Звукоизоляция в промышленности.– М.: Машиностроение, 1990.– 256 с.
2. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рас-

сеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.

3. Каузов Д. П., Никитин Г. Л. О прохождении акустических волн сквозь тонкую перегородку в цилиндрическом волноводе // Вестн. Ленингр. ун-та.– 1984.– Вып. 4.– С. 24–30.
4. Лукьянов В. Д., Никитин Г. Л. О резонансном рассеянии нормальных волн мембраной в акустическом волноводе // Акуст. ж.– 1996.– 42, N 5.– С. 653–660.
5. Шендеров Е. Л. Прохождение звуковой волны сквозь тонкую пластину с промежуточными опорами // Акуст. ж.– 1963.– 9, N 3.– С. 359–367.
6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Теория нестационарной аэро-гидроупругости оболочек / Методы расчета оболочек, в 5 томах.– Т. 5).– К.: Наук. думка, 1982.– 400 с.
7. Григорюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек.– Л.: Судостроение, 1974.– 208 с.
8. Динамика тел, взаимодействующих со средой / Гузь А. Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. Ред. А. Н. Гузя.– К.: Наук. думка, 1991.– 392 с.
9. Луговой Л. З. Динамика оболочечных конструкций при импульсных нагрузках (обзор) // Прикл. мех.– 1990.– 26, N 8.– С. 3–19.
10. Лерман Л. Б. Упругое деформирование пластины в жестком экране и акустическом волноводе при воздействии слабых ударных волн // Прикл. мех.– 1998.– 34, N 5.– С. 104–110.
11. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 830 с.
12. Канторович Л. В., Крылов А. И. Приближенные методы высшего анализа.– Л.–М.: Гостехиздат, 1949.– 695 с.
13. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.– К.: Наук. думка, 1986.– 172 с.
14. Лерман Л. Б. Определение динамических реакций в упругих деформируемых системах с промежуточными опорами при импульсном нагружении // Прикл. мех.– 1995.– 31, N 5.– С. 48–54.