

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЛАВНЫХ ИНФОРМАТИВНЫХ КОМПОНЕНТ

А. Я. КАЛЮЖНЫЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 15.09.98

Показана возможность повышения эффективности решения задач акустической томографии за счет представления поля параметров среды, подлежащих восстановлению, в конечномерном базисе специального вида. В основу предлагаемого подхода положены экстремальные свойства собственных функций информационного оператора Фишера. Построенный на основе этих функций базис представления поля характеристик среды обеспечивает минимизацию ошибки их восстановления. Установлено существование оптимальной размерности базиса, который при заданных условиях проведения томографического эксперимента обеспечивает максимальную точность измерений. Сформулирован критерий для отбора оптимальных базисных функций, учитывающий как флуктуационную, так и систематическую составляющие результирующей погрешности. Предложен проекционный подход к построению базиса, который сочетает преимущества чисто физического описания (наглядность, экономичность) с преимуществами статистико-информационного подхода (минимизация ошибок). Исследована структура информационных операторов для типовых моделей поля измерительного сигнала. Эффективность предлагаемого метода проиллюстрирована на примерах из области акустической томографии океана.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений современной акустики, которое находит все более широкое применение в океанологии, гидрофизике, задачах технической и медицинской диагностики, является акустическая томография [1–8]. Так принято называть комплекс методов восстановления физических характеристик различных сред на основе анализа распространяющихся в них акустических полей. Ниже для определенности будем говорить о задаче восстановления поля скорости звука $c(\mathbf{r})$, хотя это могут быть и некоторые иные поля (гидростатического давления или механического напряжения, плотности, температуры и т.д.), однозначно связанные с полем $c(\mathbf{r})$.

При решении подобных задач часто используется прием, который в общей теории измерений принято называть алгебраизацией задачи [9, 10]. Суть его состоит в том, что восстанавливаемое поле (в нашем случае $c(\mathbf{r})$) раскладывают по некоторому счетному базису

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}) + \sum_k \gamma_k \varphi_k(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $c_0(\mathbf{r})$ – известное (опорное) поле; $\varphi_k(\mathbf{r})$, $k = 1, 2, \dots$ – система линейно независимых в исследуемой области среды базисных функций; γ_k – коэффициенты разложения.

При практическом решении задачи в ряде (1) удерживается конечное число членов. В результате вместо измерения континуального поля $c(\mathbf{r})$

достаточно оценить конечное число коэффициентов разложения $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, что значительно упрощает задачу. Однако значение алгебраизации заключается не только (и не столько) в этом. Ведь все практические схемы томографии оперируют в конечном итоге с ограниченным набором дискретных величин. Более существенным является то обстоятельство, что, как показано ниже, за счет рационального выбора базиса $\{\varphi_k(\mathbf{r})\}_1^N$ можно значительно повысить эффективность решения томографических задач и во многом избежать известных проблем [11], порожденных изначальной некорректностью их постановки.

Известны различные подходы к выбору базиса $\{\varphi_k(\mathbf{r})\}_1^N$. Первоначальному этапу развития акустической томографии было свойственно привлечение чисто физических методов описания восстанавливаемых полей, например, их разложение по собственным функциям уравнений, определяющих возмущение поля $c(\mathbf{r})$. Характерным примером является использование классических океанологических моделей (поля внутренних волн, волн Россби и др.) в основополагающих работах по акустической томографии океана [2, 3]. Статистические факторы исследуемой среды и ошибки измерений при таком подходе не учитывались.

В более поздних работах [5, 6] был предложен метод так называемых эмпирических ортогональных функций. Этот метод можно рассматривать как адаптивную версию широко известного в теории случайных процессов и полей [12] разложения на главные компоненты (разложения Карунена–Лоэва). Согласно традиционной трактовке, глав-

ными компонентами принято называть собственные функции корреляционного оператора оцениваемого поля, которые соответствуют его максимальным собственным числам. При заданной погрешности представления разложение на главные компоненты оказывается наиболее экономичным по числу удерживаемых членов ряда. Однако в томографии нас интересует не погрешность представления оцениваемого поля, а ошибка его восстановления. С этих позиций традиционный метод главных компонент оказывается не оптимальным, так как не все такие компоненты могут быть измерены с приемлемой точностью. Кроме того, этот метод не применим для описания детерминированных полей.

Принципиально иной подход к построению разложения (1) предложен в работе [13]. Здесь при решении задач восстановления изображений были использованы собственные функции информационного оператора Фишера. Такое представление, в отличие от традиционного, исходит из конечного результата – погрешности восстановления оцениваемого поля. При этом главными предлагается считать те компоненты, которые могут быть измерены с минимальной погрешностью. Для того, чтобы отличать данную трактовку от традиционной, будем в дальнейшем называть соответствующие компоненты главными информативными. Метод главных информативных компонент (ГИК) с точки зрения возможности измерений оказывается наиболее экономичным, так как в разложении (1) оставляют только те составляющие оцениваемого поля, которые при заданных условиях проведения эксперимента можно реально восстановить. При этом отсекается фактически ненаблюдаемая часть восстанавливаемого поля, которая и порождает неустойчивость решения обратной задачи.

При выборе главных информативных компонент в [13] исходили лишь из флуктуационной погрешности измерений, обусловленной конечным объемом наблюдений. Ошибки других типов, в частности, систематическая погрешность, в расчет не принимались. Кроме того, не были рассмотрены важные с точки зрения практического использования метода аспекты, связанные с анализом его устойчивости к неточности рабочих моделей, пути снижения объема вычислительных затрат, анализ эффективности метода по отношению к традиционным подходам и ряд других. Целью данной работы является дальнейшее развитие метода главных информативных компонент и анализ целесообразности его использования в задачах акустической томографии среды, где роль

“изображения” играет поле скорости звука $c(\mathbf{r})$.

1. ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА

Прежде, чем рассматривать задачи по оптимизации базиса $\{\varphi_k(\mathbf{r})\}_1^N$, получим общие соотношения для погрешностей оценивания поля $c(\mathbf{r})$. При этом мы ограничимся случаем надежных измерений, когда аномальные ошибки [10] можно не учитывать. Во избежание формальных трудностей и громоздких выкладок, с которыми сопряжено континуальное представление измеряемых полей, предположим, что поле $c(\mathbf{r})$ однозначно определяется своими значениями в узлах некоторой пространственной сетки \mathbf{r}_m , $m=1, \dots, M$. Такое представление соответствует практическим схемам акустической томографии и позволяет воспользоваться экономичными векторно-матричными обозначениями. При этом подразумевается, что сетка “густая”, т. е.

$$M \gg N. \quad (2)$$

Пусть \mathbf{c} – вектор-столбец, компонентами которого являются значения восстанавливаемого поля $c(\mathbf{r}_m)$ в узлах пространственной сетки. Введем матрицу Φ базисных функций размерности $M \times N$ с компонентами

$$\Phi_{mk} = \varphi_k(\mathbf{r}_m),$$

$$m = 1, \dots, M; \quad k = 1, \dots, N.$$

С учетом принятых обозначений оценка восстанавливаемого поля (вектора \mathbf{c}) может быть записана в виде

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_0 + \Phi \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (3)$$

где \mathbf{c}_0 – опорный вектор; $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ – оценка вектора первых N коэффициентов разложения (1), полученная в результате выполнения томографического эксперимента.

Вследствие усечения разложения (1) оценка (3) имеет смещение, т. е. некоторую систематическую ошибку, которая определяется вкладом отброшенных членов ряда. Если предположить, что оценка вектора коэффициентов разложения $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ несмещенная, т. е.

$$\langle \hat{\boldsymbol{\gamma}} \rangle = \boldsymbol{\gamma}$$

(здесь $\langle \cdot \rangle$ – символ статистического усреднения по ансамблю наблюдений), то вектор смещения результирующей оценки восстанавливаемого поля можно записать как

$$\mathbf{b}_c = \langle \hat{\mathbf{c}} \rangle - \mathbf{c} = \Phi \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0). \quad (4)$$

В качестве меры систематической погрешности оценки (3) примем усредненные по исследуемой области среды компоненты вектора смещения (4), а именно:

$$\Delta_c = \mathbf{b}_c^T \mathbf{H} \mathbf{b}_c = \text{Tr} \{ \mathbf{H} (\mathbf{\Phi} \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)) \times (\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{\Phi}^T - (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T) \}, \quad (5)$$

где $\text{Tr} \{ \cdot \}$ – символ следа матрицы; \mathbf{H} – некоторая симметричная и положительно определенная матрица весовых коэффициентов, которая учитывает возможную неравноценность (с точки зрения пользователя) результатов томографического эксперимента для различных точек исследуемой области среды.

Систематическая погрешность (5) зависит от вектора коэффициентов разложения (1). Найдем нижнюю границу этой погрешности. Для этого проварьируем выражение (5) по вектору $\boldsymbol{\gamma}$ и приравняем полученное выражение нулю. В результате придем к уравнению относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$, минимизирующего систематическую ошибку (5):

$$\frac{\partial \Delta_c}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = -2 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) + 2 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение может быть решено при условии, что матричная форма $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi}$ неособенная. В нашем случае это всегда так в силу условия (2), линейной независимости столбцов матрицы $\mathbf{\Phi}$ и положительной определенности весовой матрицы \mathbf{H} [15]. С учетом указанных обстоятельств для вектора $\boldsymbol{\gamma}$ из уравнения (6) имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0). \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в соотношение (5) и используя свойства операции $\text{Tr} \{ \cdot \}$, для нижней границы систематической погрешности получим

$$\Delta_c \geq \text{Tr} \{ (\mathbf{E} - \mathbf{\Pi}) \times \mathbf{H}^{1/2} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T \mathbf{H}^{1/2} \}, \quad (8)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица;

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{H}^{1/2} \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H}^{1/2} \quad \text{—} \quad (9)$$

оператор ортогонального проектирования на подпространство, порожаемое нормированным базисом $\mathbf{H}^{1/2} \mathbf{\Phi}$.

Теперь рассмотрим флуктуационную погрешность, обусловленную конечным объемом наблюдений. Непосредственно из выражения (3) следует, что корреляционную матрицу вектора оценки поля скорости звука $\hat{\mathbf{c}}$

$$\mathbf{K}_c = \langle (\hat{\mathbf{c}} - \langle \hat{\mathbf{c}} \rangle) (\hat{\mathbf{c}} - \langle \hat{\mathbf{c}} \rangle)^T \rangle$$

можно записать как

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{\Phi} \mathbf{K}_\gamma \mathbf{\Phi}^T, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{K}_\gamma = \langle (\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \langle \hat{\boldsymbol{\gamma}} \rangle) (\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \langle \hat{\boldsymbol{\gamma}} \rangle)^T \rangle \quad \text{—}$$

корреляционная матрица оценки вектора коэффициентов разложения (1).

Нижняя граница флуктуационной погрешности может быть получена на основе неравенства информации (неравенства Рао–Крамера) [12, 16]:

$$\mathbf{K}_\gamma \geq \mathbf{I}_\gamma^{-1}, \quad (11)$$

где \mathbf{I}_γ – информационная матрица Фишера задачи оценивания вектора $\boldsymbol{\gamma}$, компоненты которой имеют вид

$$(\mathbf{I}_\gamma)_{ik} = - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \gamma_i \partial \gamma_k} \ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma}) \right\rangle, \quad (12)$$

$$i, k = 1, \dots, N;$$

$p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma})$ – функционал правдоподобия массива наблюдений \mathbf{u} .

В свою очередь, используя правила дифференцирования сложных функций [14], нетрудно показать, что

$$\mathbf{I}_\gamma = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi}, \quad (13)$$

где

$$(\mathbf{I}_c)_{ik} = - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial c_i \partial c_k} \ln p(\mathbf{u}/\mathbf{c}) \right\rangle, \quad (14)$$

$$(i, k = 1, \dots, M) \quad \text{—}$$

информационная матрица задачи оценивания вектора \mathbf{c} .

Таким образом, из выражений (10)–(13) следует неравенство

$$\mathbf{K}_c \geq \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T. \quad (15)$$

В качестве меры флуктуационной погрешности по аналогии с (5) примем средневзвешенные по исследуемой области среды флуктуации оценки $\hat{\mathbf{c}}$, т. е.

$$\sigma_c^2 = \langle (\hat{\mathbf{c}} - \langle \hat{\mathbf{c}} \rangle)^T \mathbf{H} (\hat{\mathbf{c}} - \langle \hat{\mathbf{c}} \rangle) \rangle = \text{Tr} \{ \mathbf{H} \mathbf{K}_c \}. \quad (16)$$

С учетом неравенства (15) для нижней границы флуктуационной погрешности (16) имеем

$$\sigma_c^2 \geq \text{Tr} \{ \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi})^{-1} \}. \quad (17)$$

Объединив выражения (8) и (17), получим нижнюю границу средневзвешенной по исследуемой

области среды общей результирующей погрешности восстановления поля скорости звука

$$d_c^2 = \langle (\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{c})^T \mathbf{H} (\hat{\mathbf{c}} - \mathbf{c}) \rangle \geq \text{Tr} \{ \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi})^{-1} + (\mathbf{E} - \mathbf{\Pi}) \mathbf{H}^{1/2} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T \mathbf{H}^{1/2} \}. \quad (18)$$

Теперь на основании полученных выражений рассмотрим задачу оптимизации базиса $\mathbf{\Phi}$.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА

Прежде всего проанализируем задачу минимизации средневзвешенной флуктуационной погрешности (17). С этой целью проварьируем выражение (17) по матрице $\mathbf{\Phi}$:

$$\frac{\partial \sigma_c^2}{\partial \mathbf{\Phi}} = 2 \mathbf{H} \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi})^{-1} - 2 \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{I}_c \mathbf{\Phi})^{-1}. \quad (19)$$

Нетрудно заметить, что данное выражение обращается в нуль, если базис $\mathbf{\Phi}$ является решением уравнения

$$\mathbf{I}_c \mathbf{\Phi} = \mathbf{H} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}, \quad (20)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица, составленная из N решений $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ уравнения

$$\det (\mathbf{H}^{-1} \mathbf{I}_c - \lambda_k \mathbf{E}) = 0. \quad (21)$$

При выборе в качестве базиса $\mathbf{\Phi}$ решения задачи (20) флуктуационная ошибка (17) составляет

$$\sigma_c^2 = \text{Tr} \{ \mathbf{\Lambda}^{-1} \} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}. \quad (22)$$

Из выражения (22) видно, что для минимизации флуктуационной ошибки в базис $\mathbf{\Phi}$ следует включать те собственные векторы задачи (20), которые соответствуют максимальным собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ оператора $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{I}_c$. Именно в этом и состоит принцип отбора главных компонент, предложенный в [13] для частного случая $\mathbf{H} = \mathbf{E}$. Однако, как показано выше, кроме флуктуационной имеется и систематическая погрешность, возникающая в результате усечения разложения (1). Поэтому данный принцип отбора нуждается в корректировке.

Собственные векторы задачи (20), как известно [15], \mathbf{H} -ортогональны, т. е.

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{H} \mathbf{\Phi} = \mathbf{E}.$$

С учетом данного соотношения нижняя граница результирующей ошибки (18) может быть представлена в виде

$$d_c^2 \geq (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) - \sum_{k=1}^N \left(\gamma_k^2 - \frac{1}{\lambda_k} \right). \quad (23)$$

Из рассмотрения выражения (23) следует, что в базис $\mathbf{\Phi}$ имеет смысл включать лишь те компоненты, для которых выполняется условие

$$\gamma_k^2 - \frac{1}{\lambda_k} \geq 0, \quad (24)$$

так как только такие компоненты уменьшают результирующую погрешность оценивания и, следовательно, могут быть реально измерены. Те компоненты, которые не удовлетворяют условию (24), полезной информации при заданной процедуре измерений фактически не несут. В самом деле, включение в базис $\mathbf{\Phi}$ некоторой k -ой компоненты уменьшает систематическую часть погрешности оценивания на γ_k^2 , но увеличивает ее флуктуационную составляющую на $1/\lambda_k$. Следовательно, расширять базис $\mathbf{\Phi}$ имеет смысл лишь до тех пор, пока уменьшение смещения оценки за счет привлечения дополнительных составляющих будет превосходить прирост флуктуационной ошибки измерения за счет конечного объема наблюдений. Общее количество главных информативных компонент N_0 , для которых выполняется условие информативности (24), может быть полезной характеристикой томографической задачи, так как определяет своего рода ее “разрешающую способность”: чем значение N_0 выше, тем более тонкие детали восстанавливаемого поля можно “рассмотреть”.

При конечной энергии сигнала и конечной области наблюдения величина N_0 всегда ограничена. Поэтому данный параметр определяет оптимальную при заданных условиях томографического эксперимента размерность базиса $\mathbf{\Phi}$. В самом деле, результирующая ошибка оценивания минимальна, если в базис $\mathbf{\Phi}$ включены все ГИК. Отступление от этой оптимальной размерности базиса в сторону увеличения будет, очевидно, приводить к росту результирующей погрешности за счет флуктуационной составляющей. Уменьшение размерности базиса также увеличивает результирующую погрешность, но уже за счет систематической ошибки. Если же по техническим ограничениям принята размерность базиса $N < N_0$, то в него следует отбирать те компоненты, для которых параметр информативности в левой части соотношения (24) максимален.

Таким образом, предлагаемая процедура отбора ГИК обеспечивает меньшую результирующую погрешность оценки, чем их отбор по методу, предложенному в [13]. В то же время нельзя утверждать, что значение результирующей погрешности будет при этом минимальным по сравнению с базами иных типов, так как экстремальные свойства собственных функций оператора Фишера проявляются лишь по отношению к флуктуационным ошибкам. Однако подобное утверждение справедливо по отношению к любым методам прямого восстановления поля $c(\mathbf{r})$ на пространственной “сетке”. В самом деле, для несмещенных методов прямого восстановления поля $c(\mathbf{r})$ средневзвешенная результирующая погрешность оценивания будет определяться выражением

$$(d_c^2)_{\text{пр}} \geq \text{Tr} \{ \mathbf{I}_c^{-1} \mathbf{H} \} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k}, \quad (25)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ – полная система решений уравнения (21).

Сопоставим эту погрешность с выражением (23). Для этого разложим вектор $(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)$ по полной (не усеченной) системе собственных векторов задачи (20). С учетом \mathbf{H} -ортогональности этих векторов для средневзвешенной энергии оцениваемого поля можно записать

$$(\mathbf{c} - \mathbf{c}_0)^T \mathbf{H} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \sum_{k=1}^M \gamma_k^2.$$

Используя это выражение, погрешность (23) можно представить в виде

$$d_c^2 = \sum_{k=N+1}^M \gamma_k^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}. \quad (26)$$

Теперь рассмотрим разность выражений (25) и (26):

$$(d_c^2)_{\text{пр}} - d_c^2 = \sum_{k=N+1}^M \left(\frac{1}{\lambda_k} - \gamma_k^2 \right). \quad (27)$$

Если в базис Φ включены все N_0 ГИК, удовлетворяющих условию (24), то все слагаемые выражения (27) положительны. Отсюда следует, что

$$(d_c^2)_{\text{пр}} > (d_c^2)_{\text{опт}}.$$

Таким образом, хотя ограничение числа членов разложения (1) и приводит к смещению оценки восстанавливаемого поля, тем не менее суммарная

погрешность при этом оказывается ниже, чем для несмещенных “прямых” методов восстановления.

Непосредственное практическое использование предложенного выше метода построения базиса не всегда удобно. Во-первых, при надежных измерениях (больших отношениях сигнал/помеха) общее количество ГИК может быть велико (десятки и сотни). Во-вторых, сами по себе ГИК не имеют прозрачного физического содержания. В то же время при описании полей скорости звука в неоднородных средах широко используется их модовое представление [2–8], т.е. разложение по собственным функциям уравнений, определяющих возмущение поля $c(\mathbf{r})$. При этом количество учитываемых мод обычно невелико (3–5). Достоинством такого подхода является физическая наглядность и экономичность, недостатком – игнорирование статистического характера процедуры измерений. В данной работе предлагается принципиально иной, комбинированный подход к описанию восстанавливаемых полей, который объединяет преимущества чисто физического описания с преимуществами метода ГИК.

Предположим, что исходное поле $c(\mathbf{r})$ имеет следующую структуру:

$$c(\mathbf{r}) = c_0(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^{N_m} \beta_k \vartheta_k(\mathbf{r}), \quad (28)$$

где $\vartheta_k(\mathbf{r})$ – моды возмущения поля $c(\mathbf{r})$, реально присутствующие в среде; β_k – коэффициенты возбуждения мод; N_m – количество распространяющихся мод. Перейдем, как и выше, к векторно-матричным обозначениям. Введем модовую матрицу Θ размерности $M \times N_m$ с компонентами

$$\Theta_{mk} = \vartheta_k(\mathbf{r}_m),$$

$$(m = 1, \dots, M; \quad k = 1, \dots, N_m).$$

В матричных обозначениях выражение (28) примет вид

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \Theta \boldsymbol{\beta}, \quad (29)$$

где, как и ранее, \mathbf{c} – M -мерный вектор-столбец значений восстанавливаемого поля $c(\mathbf{r}_m)$ в узлах пространственной сетки; $\boldsymbol{\beta}$ – N_m -мерный вектор-столбец коэффициентов возбуждения мод.

Теперь разложим вектор (29) по базису Φ . Вектор коэффициентов разложения $\boldsymbol{\gamma}$ с учетом (7) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = (\Phi^T \mathbf{H} \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{H} \Theta \boldsymbol{\beta}. \quad (30)$$

Структура данного выражения позволяет прийти к заключению, что по аналогии с (3) оценку вектора \mathbf{c} можно искать в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_0 + \Theta_{\phi} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (31)$$

где $\hat{\beta}$ – оценка вектора коэффициентов возбуждения мод;

$$\Theta_\phi = \mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{\Pi} \mathbf{H}^{1/2} \Theta \quad (32)$$

некоторый новый базис размерностью N_m , который образован в результате проектирования модовой матрицы Θ на подпространство нормированных ГИК; $\mathbf{\Pi}$ – проекционный оператор (9).

Представление (31) оценки поля $c(\mathbf{r})$ имеет наглядный физический смысл. В самом деле, при абсолютно надежных измерениях (отношение сигнал/помеха $\rightarrow \infty$) размерность базиса ГИК совпадает с общим числом точек пространственной “сетки” M . В силу полноты собственных векторов положительно определенного оператора $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{I}_c$ в этом асимптотическом случае матричная форма $\mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{\Pi} \mathbf{H}^{1/2} \rightarrow \mathbf{E}$ и базис (32) совпадает с модовой матрицей Θ . Однако реально размерность подпространства ГИК N_0 всегда меньше M . В этом случае оператор $\mathbf{H}^{-1/2} \mathbf{\Pi} \mathbf{H}^{1/2}$ воздействует на модовую матрицу Θ как фильтр, отсеивающий те компоненты мод поля $c(\mathbf{r})$, которые при заданном плане томографического эксперимента фактически не могут быть восстановлены. Тем самым в изначально физическом описании можно учесть статистический характер процедуры измерений. Такой подход имеет неоспоримые преимущества и по сравнению с методом ГИК в “чистом” виде. Во-первых, размерность проекционного базиса Θ_ϕ равна числу мод, количество которых невелико, во-вторых, такое описание более физично.

Заметим, что проекционный базис (32) и базис ГИК, вообще говоря, не эквивалентны с точки зрения погрешности измерений. В первом случае оцениванию подлежат коэффициенты возбуждения мод β , в то время как при использовании базиса ГИК измеряемые величины – коэффициенты разложения (1), связанные с вектором β линейным преобразованием (30).

3. СТРУКТУРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Предложенная выше методология алгебраизации имеет достаточно общий характер и может быть использована не только для решения томографических задач акустики, но и для широкого круга родственных по постановке задач смежных наук (радиофизики, оптики и др.). Теперь перейдем к наполнению этой методологии конкретным физическим содержанием. Прежде сформулируем рабочие модели. Предположим, что прием акустического сигнала, прошедшего через исследуемую среду, осуществляется в дискретных точках

пространства с координатами \mathbf{r}_p^A , $p = 1, \dots, P$. Для квазистационарных на ограниченном временном интервале $(0, T)$ акустических полей целесообразно воспользоваться спектральной областью наблюдений:

$$U(\omega_l, \mathbf{r}_p^A) = S(\omega_l, \mathbf{r}_p^A) + N(\omega_l, \mathbf{r}_p^A), \quad (33)$$

где $U(\omega, \mathbf{r})$ – спектр Фурье наблюдаемого акустического поля $u(t, \mathbf{r})$, вычисленный на $t \in (0, T)$; $S(\omega, \mathbf{r})$ и $N(\omega, \mathbf{r})$ – соответственно спектры Фурье полей сигнала и помех. Спектр наблюдений (33) задан для дискретного ряда круговых частот ω_l , $l = 1, \dots, L$, следующих в пределах рабочей полосы с шагом $\Delta\omega \leq \pi/T$, что, согласно теореме отсчетов [18], обеспечивает возможность однозначного представления сигнала ограниченной длительности T . Таким образом, наблюдения в принятой модели представляют собой дискретную выборку объемом $P \times L$ отсчетов.

В модель (33) параметры исследуемой среды в явном виде не входят. Эти характеристики связаны с наблюдаемым полем некоторыми динамическими уравнениями, описывающими процесс распространения акустических колебаний в исследуемой среде. В частности, для объемно-упругих неоднородных сред (например, жидких) поле $S(\omega, \mathbf{r})$ приближенно удовлетворяет уравнению Гельмгольца [19]:

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})} \right] S(\omega, \mathbf{r}) = -P_s(\omega, \mathbf{r}), \quad (34)$$

где $P_s(\omega, \mathbf{r})$ – спектр Фурье функции источника. Кроме уравнения (34), поле $S(\omega, \mathbf{r})$ должно удовлетворять граничным условиям и условию излучения.

Для полного описания модели необходимо задать вероятностные характеристики наблюдаемых полей. Поле помех будем полагать гауссовским. Относительно характеристик поля измерительного сигнала $S(\omega, \mathbf{r})$ рассмотрим ряд типовых моделей.

Вначале предположим, что поле сигнала точно известно. В этой ситуации функционал правдоподобия массива наблюдений (33) имеет вид [18]:

$$p(\mathbf{u}/c) = \alpha \exp \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[T \sum_{l=1}^L (s_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{u}_l - \frac{1}{2} s_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} s_l) \right] \right\}, \quad (35)$$

где α – множитель, не зависящий от гипотезы относительно оцениваемого вектора \mathbf{c} ; \mathbf{u}_l – P -

мерный вектор-столбец наблюдений на l -ой частоте, составленный из значений спектров принимаемого поля $U(\omega_l, \mathbf{r}_p^A)$ по всем точкам приема; \mathbf{s}_l – составленный по аналогичному правилу из значений спектра поля $S(\omega_l, \mathbf{r}_p^A)$ сигнальный вектор; \mathbf{K}_l – матрица пространственных корреляций поля помех на частоте ω_l ; \dagger – символ сопряжения и транспонирования матриц; $\mathbf{Re}[\cdot]$ – символ вещественной части числа.

Подставив (35) в формулу (14) и выполнив необходимые вычисления, найдем информационную матрицу задачи оценивания поля скорости звука:

$$\mathbf{I}_c = 2 \mathbf{Re} \left\{ T \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \mathbf{s}_l}{\partial \mathbf{c}} \right)^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}_l}{\partial \mathbf{c}} \right\}, \quad (36)$$

где $\partial \mathbf{s}_l / \partial \mathbf{c}$ – матрица $P \times M$ производных сигнального вектора по вектору \mathbf{c} с компонентами

$$\left(\frac{\partial \mathbf{s}_l}{\partial \mathbf{c}} \right)_{pm} = \frac{\partial S(\omega_l, \mathbf{r}_p^A)}{\partial c_m}, \quad (37)$$

$$p = 1, \dots, P; \quad m = 1, \dots, M.$$

В условиях реального топографического эксперимента точный прогноз поля измерительного акустического сигнала, как правило, невозможен. Всегда имеют место неточности расчетно-аналитических схем, ошибки в определении местоположения излучателей и приемников, аппаратные погрешности и т.п. В результате поле сигнала $S(\omega, \mathbf{r})$ следует рассматривать как случайное. Случайность поля $S(\omega, \mathbf{r})$ может быть как параметрической, так и функциональной. Для топографических систем более типичен параметрический вариант случайности, поскольку форма сигнала, излучаемого в среду, обычно доступна для контроля.

Достаточно общий подход к построению соответствующих моделей состоит в разложении поля сигнала $S(\omega, \mathbf{r})$ на совокупность некоторых известных составляющих $S_q(\omega, \mathbf{r})$ с неизвестными комплексными коэффициентами $\eta_q(\omega)$:

$$S(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q \eta_q(\omega) S_q(\omega, \mathbf{r}). \quad (38)$$

Для определенности будем отождествлять элементарную составляющую $S_q(\omega, \mathbf{r})$ с q -ым излучателем, хотя для целей настоящего исследования это и непринципиально.

В векторно-матричной форме модель (38) имеет вид

$$\mathbf{s}_l = \mathbf{S}_l \boldsymbol{\eta}_l, \quad (39)$$

где \mathbf{s}_l – введенный выше сигнальный вектор на частоте ω_l ; \mathbf{S}_l – сигнальная матрица $P \times Q$ с компонентами

$$(\mathbf{S}_l)_{pq} = S_q(\omega_l, \mathbf{r}_p^A),$$

$$p = 1, \dots, P, \quad q = 1, \dots, Q;$$

$\boldsymbol{\eta}_l$ – вектор-столбец, составленный из значений случайных коэффициентов $\eta_1(\omega_l), \dots, \eta_Q(\omega_l)$.

Подставим модель (39) в формулу (35). В результате получим условный функционал правдоподобия массива наблюдений, соответствующий фиксированным гипотезам о значении информативного параметра \mathbf{c} и “мешающих” параметров $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L$:

$$p(\mathbf{u}/\mathbf{c}; \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L) = \alpha \exp \left\{ T \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\eta}_l^\dagger \mathbf{v}_l + \sum_{l=1}^L \mathbf{v}_l^\dagger \boldsymbol{\eta}_l - T \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\eta}_l^\dagger \mathbf{W}_l \boldsymbol{\eta}_l \right\}, \quad (40)$$

где

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{u}_l \quad \text{—}$$

Q -мерный вектор выходных напряжений парциальных каналов обработки элементарных составляющих поля сигнала (38) на частоте ω_l ;

$$\mathbf{W}_l = \mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{S}_l \quad \text{—}$$

корреляционная матрица помех на выходе парциальных каналов.

Байесовские методы оценивания полезного параметра \mathbf{c} при наличии “мешающих” параметров $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L$ предусматривают усреднение условного функционала правдоподобия (40) по ансамблю реализаций $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L$. Однако такой путь решения требует принятия некоторых гипотез об априорном распределении параметров $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L$, которые не всегда могут быть обоснованы. Кроме того, последующие вычисления часто наталкиваются на математические трудности.

Альтернативный байесовскому подход состоит в использовании асимптотических свойств оценок максимального правдоподобия (ОМП). Известно, что такие оценки для случая надежных измерений, т.е. при больших отношениях сигнал/помеха на выходе приемной системы, имеют практически ту же эффективность, что и байесовские. В то же время расчет погрешностей ОМП значительно проще. С учетом того обстоятельства, что в данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только информативных компонент, т.е. вполне корректным со статистической точки зрения оцениванием, асимптотические свойства ОМП могут

быть использованы и для решения исследуемой задачи.

Известны два основных метода вычисления ошибок ОМП полезного параметра при наличии “мешающих” [17]. Первый из них (“блочный”) состоит в рассмотрении задачи совместного оценивания параметров \mathbf{c} и $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L$ с последующим выделением той части составной информационной матрицы, которая относится к полезному параметру. Другая возможность заключается в рассмотрении линии максимумов условного функционала правдоподобия (40) по “мешающим” параметрам:

$$\hat{p}(\mathbf{u}/\mathbf{c}) = p(\mathbf{u}/\mathbf{c}; \hat{\boldsymbol{\eta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\eta}}_L), \quad (41)$$

где $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\eta}}_L$ – решение системы уравнений

$$\left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_l} \ln p(\mathbf{u}/\mathbf{c}; \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L) \right|_{\{\boldsymbol{\eta}_i = \hat{\boldsymbol{\eta}}_i\}_1^L} = 0, \quad (42)$$

$$l = 1, \dots, L.$$

Далее по функционалу (41) находятся ошибки оценивания параметра \mathbf{c} . Оба метода полностью эквивалентны и отличаются только техникой вычислений [17]. Применим к исследуемой задаче последний подход, который нам представляется в данном случае более простым. При этом рассмотрим две модели флуктуаций поля сигнала.

3.1. Независимые по частоте флуктуации

В этом случае полагаем, что векторы “мешающих” параметров $\boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_L$ на разных частотах не связаны между собой. Подобная модель флуктуаций может иметь место, например, при использовании широкополосных сигналов в условиях неконтролируемого дрейфа приемно-излучающих систем. Подставляя функционал условного правдоподобия (40) в (42) и решая полученную систему уравнений относительно векторов $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\eta}}_L$, находим

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_l = \mathbf{W}_l^{-1} \mathbf{v}_l. \quad (43)$$

Предполагается, что матрица \mathbf{W}_l неособенная, для чего необходимо выполнение условия $P > Q$.

С учетом данного решения линия локальных максимумов условного функционала правдоподобия (40) будет определяться выражением

$$\hat{p}(\mathbf{u}/\mathbf{c}) = \alpha \exp \left\{ T \sum_{l=1}^L \mathbf{v}_l^\dagger \mathbf{W}_l^{-1} \mathbf{v}_l \right\}. \quad (44)$$

Вычислив для данного функционала обработки информационную матрицу задачи оценивания век-

тора \mathbf{c} , получим

$$(\mathbf{I}_c)_{ik} = \text{Tr} \left\{ T \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\alpha}_l \left[\frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_i} \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_k} + \frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_k} \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_i} - \left(\frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_i} \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{S}_l \right) \mathbf{W}_l^{-1} \left(\mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_k} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_k} \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{S}_l \right) \mathbf{W}_l^{-1} \left(\mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_i} \right) \right] \right\}, \quad (45)$$

$$i, k = 1, \dots, M,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_l = \langle \boldsymbol{\eta}_l \boldsymbol{\eta}_l^\dagger \rangle$ – ковариационная матрица комплексных амплитуд элементарных составляющих поля сигнала на частоте ω_l .

3.2. Дружные по частоте флуктуации

Для узкополосных сигналов более реалистична модель полностью связанных по частоте флуктуаций, которым соответствует значение $\boldsymbol{\eta}_l \equiv \boldsymbol{\eta}$. В этом случае функционал условного правдоподобия (40) можно представить в виде

$$p(\mathbf{u}/\mathbf{c}; \boldsymbol{\eta}) = \alpha \exp \{ \boldsymbol{\eta}^\dagger \mathbf{v} + \mathbf{v}^\dagger \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^\dagger \mathbf{W} \boldsymbol{\eta} \}, \quad (46)$$

где

$$\mathbf{v} = T \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{u}_l \quad \text{—}$$

вектор выходных напряжений парциальных каналов обработки элементарных составляющих сигнала, усредненный по частоте;

$$\mathbf{W} = T \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{S}_l \quad \text{—}$$

усредненная по частоте матрица корреляций помех на выходе парциальных каналов.

Для функционала (46) решение уравнения (42) имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{v},$$

с учетом которого линия локальных максимумов определяется выражением

$$\hat{p}(\mathbf{u}/\mathbf{c}) = \alpha \exp \{ \mathbf{v}^\dagger \mathbf{W}^{-1} \mathbf{v} \}.$$

Соответствующая информационная матрица

задачи оценивания вектора \mathbf{c} имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I}_c)_{ik} = \text{Tr} \left\{ \mathbf{a}^T \sum_{l=1}^L \left[\frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_i} \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_k} + \frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_k} \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_i} \right] - \right. \\
 \left. - \mathbf{a}^T \left(T \sum_{l=1}^L \frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_i} \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{S}_l \right) \mathbf{W}^{-1} \left(T \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_k} \right) - \right. \\
 \left. - \mathbf{a}^T \left(T \sum_{l=1}^L \frac{\partial \mathbf{S}_l^\dagger}{\partial c_k} \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{S}_l \right) \mathbf{W}^{-1} \left(T \sum_{l=1}^L \mathbf{S}_l^\dagger \mathbf{K}_l^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_l}{\partial c_i} \right) \right\}, \\
 i, k = 1, \dots, M, \quad (47)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{a} = \langle \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^\dagger \rangle$ – ковариационная матрица случайных амплитуд элементарных составляющих измерительного сигнала.

Заметим, что выражения для информационных матриц (45) и (47) получены без какой-либо детализации характера флуктуаций поля сигнала. Это могут быть как флуктуации фаз, так и флуктуации фаз и амплитуд, коррелированные и некоррелированные. В частности, при $\mathbf{a} = \mathbf{E}$ имеем случай чисто фазовых независимых флуктуаций, при котором выражение (47) аналогично результату работы [8], полученному “блочным” методом.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Рассмотрим некоторые численные примеры, характеризующие эффективность предлагаемого метода. Одной из наиболее значимых областей практического применения акустической томографии является океанология [2–8] (проблема средней температуры океана, исследование крупномасштабных океанических образований типа синоптических вихрей, планетарных волн и т.п.). Поэтому рассматриваемые ниже численные иллюстрации относятся именно к этой области. Ограничимся частной, но практически важной моделью вертикально-стратифицированного океанического волновода, в котором

$$c(\mathbf{r}) = c(\boldsymbol{\rho}, z) = c(z), \quad (48)$$

т.е. скорость звука зависит только от вертикальной координаты z точки наблюдения \mathbf{r} и не зависит от вектора ее горизонтальных координат $\boldsymbol{\rho}$.

Предположим, что прием сигнала осуществляется вертикальной линейкой приемников, расположенных в точках с координатами $\mathbf{r}_p^A = \{ \boldsymbol{\rho}^A, z_p^A \}$, $p = 1, \dots, P$. Излучение сигнала происходит в точке $\mathbf{r}^S = \{ \boldsymbol{\rho}^S, z^S \}$. При этом полагаем, что волновые

размеры излучателя достаточно малы для того, чтобы его можно было считать точечным. Тогда для поля сигнала $S(\omega, \mathbf{r}_p^A)$ на приемной антенне в модовом представлении можно записать [19]:

$$\begin{aligned}
 S(\omega, \mathbf{r}_p^A) = S(\omega; \boldsymbol{\rho}^A, z_p^A) = \\
 = S_0(\omega) G(\omega; \boldsymbol{\rho}^A, z_p^A / \boldsymbol{\rho}^S, z^S), \quad (49)
 \end{aligned}$$

где $S_0(\omega)$ – спектр излучаемого сигнала;

$$\begin{aligned}
 G(\omega; \boldsymbol{\rho}, z / \boldsymbol{\rho}^S, z^S) = \pi j \sum_n v_n(\omega, z) \times \\
 \times v_n(\omega, z^S) H_0^{(1)}(\xi_n(\omega) | \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^S |) \quad (50)
 \end{aligned}$$

функция Грина волновода; $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка; $\xi_n(\omega)$ и $v_n(\omega, z)$ – собственные числа и собственные функции волновода.

Для вычисления информационного оператора Фишера необходимо записать вариацию (37) поля сигнала (49) по параметру среды $c_m = c(\mathbf{r}_m)$. Дифференцируя выражение (49) по c_m , имеем

$$\frac{\partial S(\omega; \boldsymbol{\rho}, z)}{\partial c_m} = S_0(\omega) \frac{\partial G(\omega; \boldsymbol{\rho}, z / \boldsymbol{\rho}^S, z^S)}{\partial c_m}, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G}{\partial c_m} = \pi j \sum_n \left[\left(\frac{\partial v_n(\omega, z)}{\partial c_m} v_n(\omega, z^S) + \right. \right. \\
 \left. \left. + v_n(\omega, z) \frac{\partial v_n(\omega, z^S)}{\partial c_m} \right) H_0^{(1)}(\xi_n(\omega) | \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^S |) - \right. \\
 \left. - | \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^S | \frac{\partial \xi_n(\omega)}{\partial c_m} v_n(\omega, z) v_n(\omega, z^S) \times \right. \\
 \left. \times H_1^{(1)}(\xi_n(\omega) | \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^S |) \right] \quad (52)
 \end{aligned}$$

производная функции Грина волновода по параметру c_m .

Используя теорию возмущений [14], нетрудно показать, что фигурирующие в (52) производные собственных чисел и собственных функций волновода по параметру среды c_m в случае “густой” пространственной сетки имеют вид

$$\frac{\partial \xi_n(\omega)}{\partial c_m} \cong - \frac{\Delta z_m \omega^2}{\xi_n(\omega) c_m^3} v_n^2(\omega, z_m), \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_n(\omega, z)}{\partial c_m} \cong \frac{2 \omega^2 \Delta z_m}{c_m^3} \times \\
 \times \sum_{k \neq n} \frac{v_n(\omega, z_m) v_k(\omega, z_m)}{\xi_k^2(\omega) - \xi_n^2(\omega)} v_k(\omega, z), \quad (54)
 \end{aligned}$$

где Δz_m – шаг пространственной сетки на горизонте z_m .

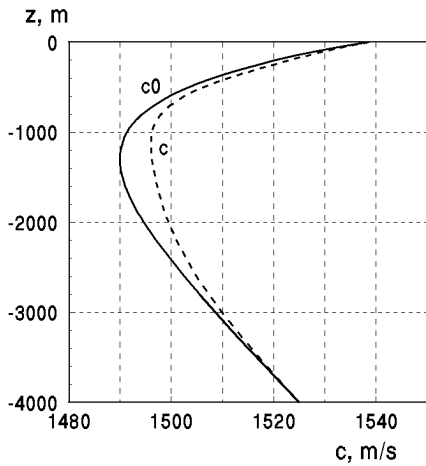


Рис. 1 Среднестатистический и фактический

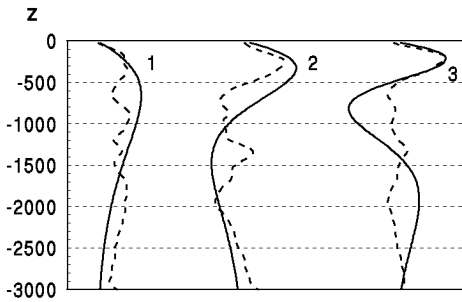
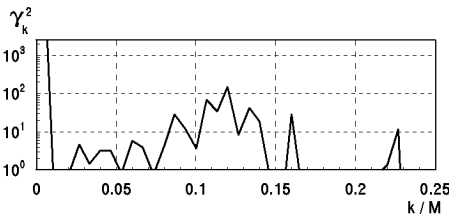
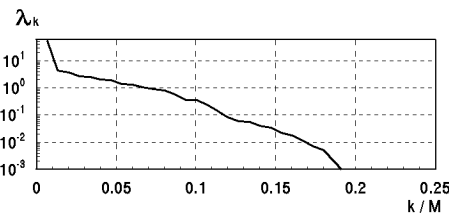


Рис. 2. Первые три моды профиля скорости звука:
штриховые – проекции мод на подпространство ГИК



а



б

Рис. 3. Параметры, определяющие информативность собственных векторов матрицы Фишера:

а – квадраты коэффициентов разложения восстанавливаемого поля,

б – собственные числа информационной матрицы Фишера

Используя выражения (51) – (54), можно непосредственно перейти к вычислению информационных операторов с последующим вычислением ГИК. Для конкретных расчетов примем следующую зависимость скорости звука от глубины $z \in (0, H)$:

$$c(z) = c_0(z) + \sum_{k=1}^{N_m} \beta_k \vartheta_k(z). \quad (55)$$

В модели (55) первое слагаемое – среднестатистический профиль скорости звука, последующие члены – моды поля скорости звука, описывающие возмущение профиля под воздействием факторов среды. Для среднестатистического профиля воспользуемся канонической моделью Манка [2]:

$$c_0(z) = c_0 [1 + (B\gamma_A/2)(\exp(-\eta(z)) + \eta(z) - 1)], \quad (56)$$

где $c_0 = 1490$ м/с – скорость звука на оси канала; $\eta(z) = 2(z - z_0)/B$ – безразмерное удаление от оси канала; $z_0 = 1300$ м – глубина залегания канала; $B = 1300$ м – ширина канала; $\gamma_A = 1.14 \cdot 10^{-5}$ – частный адиабатический градиент.

Далее полагаем, что возмущение профиля (55) происходит под влиянием бароклиных мод волны Росби [7, 20], для которых

$$\vartheta_k(z) = C_k N^{1/2}(z) \sin \left[\pi k \frac{N_0 - N(z)}{N_0 - N_H} \right], \quad (57)$$

$$k = 1, \dots, N_m,$$

где C_k – нормализующие константы; $N(z) = N_0 \exp(-z/B)$ – частота плавучести на горизонте z , $N_0 = N(0) = 3$; $N_H = N(H)$, $N_m = 5$ – количество бароклиных мод.

В последующих численных примерах значения коэффициентов возбуждения мод приняты равными

$$\beta_k = 200 \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Среднестатистический и фактический профили скорости звука, соответствующие принятой модели, показаны на рис. 1. На рис. 2 представлены первые три моды поля скорости звука, вычисленные согласно выражению (57).

Рис. 3 иллюстрирует процесс формирования оптимального базиса ГИК: на рис. 3, а представлены квадраты коэффициентов разложения “возмущенной” части профиля скорости звука $c - c_0$ по собственным векторам матрицы Фишера \mathbf{I}_c , на рис. 3, б – соответствующие этим векторам собственные числа. Расчет матрицы \mathbf{I}_c выполнялся по формуле (36), соответствующей детерминированной модели источника. Центральная частота измерительного сигнала была принята равной

10 Гц, поверхность волновода – акустически абсолютно мягкой, дно – абсолютно жестким, дистанция между излучателем и приемной антенной составляла 150 км, отношение сигнал/помеха в точке излучения $\mu = 100$ дБ, заглубление излучателя и верхнего приемника антенны 200 м, число приемников $P = 32$, межэлементное расстояние 75 м. Матрица весов ошибок оценивания \mathbf{H} была принята единичной. Из рис. 3 видно, что критерию информативности (24) в данном примере удовлетворяет примерно 11% собственных векторов задачи (20).

На рис. 4 для данного примера представлена зависимость средних по z погрешностей от размерности базиса ГИК. Из рисунка видно, что с расширением базиса ГИК систематическая погрешность Δ_c убывает, флуктуационная ошибка σ_c растет. В результате при относительной размерности базиса $N_0/M = 0.113$ наблюдается оптимум по величине суммарной погрешности d_c . Для сравнения проводился расчет погрешности при использовании непосредственно физического базиса $\{\vartheta_k(z)\}_1^{N_m}$. В этом случае систематическая погрешность, очевидно, отсутствует, а все ошибки обусловлены лишь конечным объемом наблюдений. Соответствующий уровень погрешности показан на рис. 4 штриховой линией. Нетрудно видеть, что оптимизация базиса по предлагаемой методике обеспечивает в данном примере снижение результирующей ошибки оценивания поля $c(z)$ почти в 3 раза. При дальнейшем расширении базиса ГИК, начиная с относительной размерности $N/M = 0.182$, эффективность физического базиса оказывается выше.

На рис. 5 показаны аналогичные результаты для базиса (32), образованного проектированием мод $\vartheta_k(z)$ поля $c(z)$ на подпространство ГИК. Первые три функции такого базиса показаны на рис. 2 штриховыми линиями. Заметим, что в отличие от базиса ГИК в “чистом” виде в данном случае фактическая размерность базиса такая же, как для физического базиса, т.е. равна количеству мод $\vartheta_k(z)$. Так что параметром, отложенным по оси абсцисс на рис. 5, является относительная размерность вспомогательного базиса ГИК, формирующего проектор (9).

Из сопоставления рис. 4 и рис. 5 видно, что эффективность проекционного базиса для рассматриваемых условий почти в 1.5 раза выше, чем для непосредственно базиса ГИК. Достигается такое повышение эффективности главным образом за счет снижения систематической составляющей ошибки измерений, что обеспечивается привлечением дополнительной априорной информации о модовой структуре поля $c(z)$. При этом оптималь-

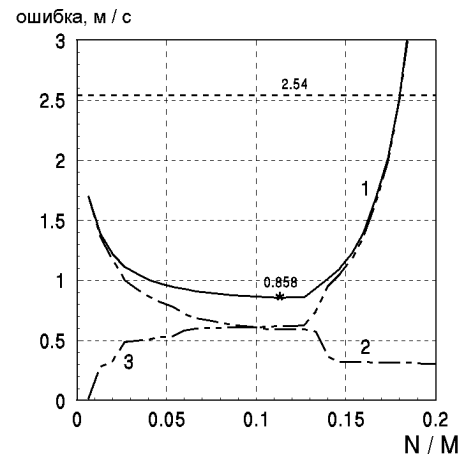


Рис. 4. Зависимость погрешностей от относительной размерности базиса ГИК:

1 – полная ошибка, 2 – систематическая ошибка, 3 – среднеквадратичное отклонение

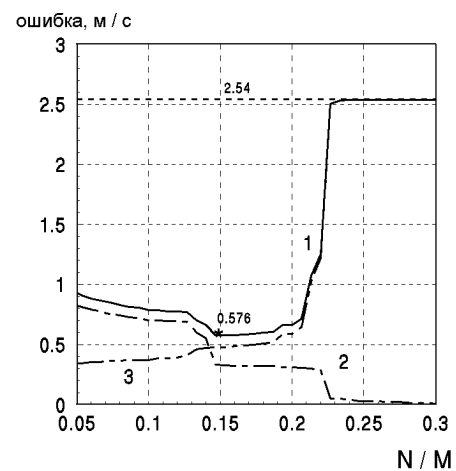


Рис. 5. Зависимость погрешностей от относительной размерности базиса ГИК для базиса, полученного проектированием мод на подпространство ГИК

ная относительная размерность вспомогательного базиса ГИК, формирующего проектор (9), составляет 0.149, что выше оптимальной размерности базиса ГИК, равной 0.113. Следовательно, в состав вспомогательного базиса в точке оптимума вошли и некоторые из компонент, не удовлетворяющие условию (24). Еще одной отличительной чертой проекционного базиса по сравнению с базисом ГИК является то, что его эффективность не может быть ниже, чем исходного физического базиса. Так, на рис. 5 начиная с относительной размерности вспомогательного базиса $N/M = 0.23$ эффективности проекционного и физического базисов одинаковы.

Заметим, что и при физическом подходе к пред-

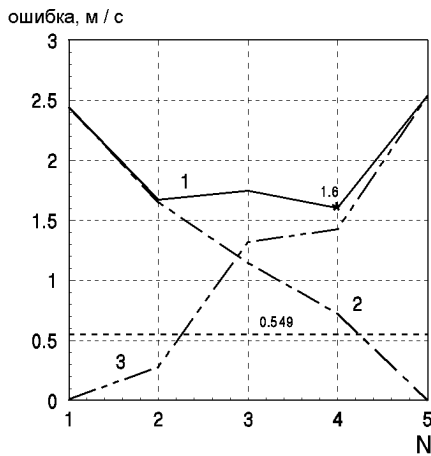


Рис. 6. Зависимость погрешностей от числа учитываемых мод для физического базиса:
штриховая – полная ошибка для проекционного базиса,
остальное – как на рис.4

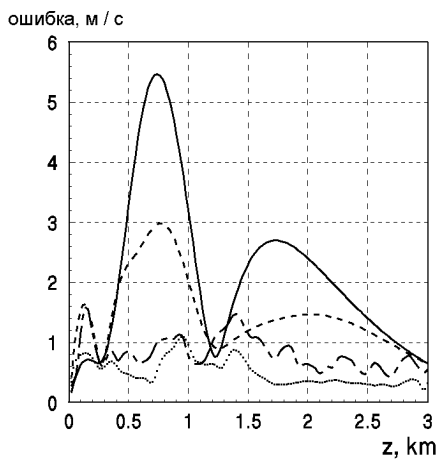


Рис. 7. Распределение результирующей погрешности оценивания поля скорости звука по глубине:
сплошная кривая – физический базис,
штриховая – оптимизированный физический базис,
штрих-пунктирная – базис ГИК,
точечная кривая – проекционный базис

ставлению поля $c(z)$ можно ставить задачу оптимизации размерности базиса $\{\vartheta_k(z)\}_1^{N_m}$. Действительно, моды поля $c(z)$ неодинаковы по уровню. Слабые моды не играют существенной роли с точки зрения снижения смещения оценки, но дают практически такой же вклад в флуктуационную часть погрешности, что и сильные моды. Можно ожидать, что при ограничении количества учитываемых мод за счет отбрасывания самых слабых из них результирующая погрешность уменьшится. Эту возможность иллюстрирует рис. 6, на котором представлены зависимости погрешностей оценивания поля скорости звука от размерности

физического базиса. Из рис. 6 видно, что для принятых в данном примере условий оптимум физического базиса имеет место при учете четырех мод из пяти, присутствующих фактически. Но практически можно было бы ограничиться и двумя модами, так как результирующая погрешность при этом возрастает всего лишь на 4%. Оптимизация физического базиса несколько уменьшает его проигрыш в точности оценивания по сравнению с проекционным базисом. Тем не менее, абсолютная величина выигрыша проекционного базиса по сравнению с физическим и в этом случае остается достаточно высокой (почти в 3 раза). При этом следует учесть, что и для проекционного базиса при ограничении числа учитываемых мод погрешность несколько снижается (до 0.549 при учете 4-х мод вместо 0.576 при учете всех мод).

До сих пор рассматривались результаты расчетов средних по z погрешностей. На рис. 7 представлено распределение результирующей погрешности по глубине для 4-х типов базиса: физического с учетом всех мод, физического с оптимизацией числа учитываемых мод, базиса ГИК и проекционного базиса. Преимущества предлагаемого подхода проявляются и при таком методе сравнения: погрешность, соответствующая проекционному базису, при всех z ниже, чем для базисов других типов.

В завершение обсудим некоторые практические аспекты использования метода ГИК. Как следует из вышеизложенного, ГИК полностью определяются свойствами информационной матрицы I_c . В свою очередь, матрица I_c зависит от оцениваемого поля $c(\mathbf{r})$, которое априори неизвестно. Это традиционная трудность статистической теории оценивания, требующая предварительной формулировки гипотез о характере измеряемых величин. Поскольку в данном случае рассматривается детерминированная модель среды, то неизбежно возникает необходимость принятия набора гипотез о конкретном виде оцениваемого поля. Каждой из таких гипотез будет, вообще говоря, соответствовать своя система ГИК, что ставит под сомнение практическую ценность предлагаемого метода. В этой связи можно заметить следующее.

Прежде всего, предварительный анализ задачи восстановления ГИК поля скорости звука может иметь самостоятельное значение для выявления потенциальной эффективности планируемого томографического эксперимента. Далее, в практической акустической томографии интересуются, как правило, не абсолютными значениями поля $c(\mathbf{r})$, а его отклонениями (“пертурбациями”) от невозмущенного поля $c_0(\mathbf{r})$. Эти “пертурбации” обычно

достаточно малы. В то же время информационная матрица Фишера, как показано в [8], имеет некоторую зону нечувствительности (неопределенности) по оцениваемому полю $c(\mathbf{r})$. Другими словами, свойства матрицы \mathbf{I}_c практически не меняются при малых изменениях поля $c(\mathbf{r})$. Поэтому для реальных пределов изменения $c(\mathbf{r})$, имеющих место на практике, вполне может оказаться пригодной единая система главных компонент.

Эту возможность иллюстрирует рис. 8, который аналогичен по содержанию рис. 5 с тем лишь отличием, что, во-первых, матрица Фишера \mathbf{I}_c вычислялась не для фактического профиля $c(z)$, а для среднестатистического профиля $c_0(z)$, во-вторых, вместо параметра информативности (24) для отбора ГИК использовались непосредственно собственные числа информационной матрицы, т.е. предпочтение отдавалось компонентам с максимальными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. При таком методе построения проекционного базиса априорная информация о виде восстанавливаемого поля, очевидно, не требуется. В то же время, как следует из рис. 8, преимущества предлагаемого подхода сохраняются. При этом снижение эффективности по сравнению со случаем полной априорной информации составляет $\sim 10\%$ при выигрыше относительно физического базиса в ~ 4 раза.

Результаты численного анализа подытожены на рис. 9, где представлены зависимости средних результирующих погрешностей оценивания поля $c(z)$ от величины отношения сигнал/помеха в точке излучения μ для 4-х рассматриваемых типов базисов. Как видно из рисунка, в широком диапазоне значений параметра μ сохраняется значительное преимущество проекционного базиса над базисами иных типов. При увеличении мощности сигнала эффективность всех методов, как это понятно и из общих соображений, совпадает. Из представленных на рис. 9 результатов также следует, что проекционный базис более устойчив к неточности задания априорной информации, чем базис ГИК в "чистом" виде. Так, при расчете ГИК с использованием вместо фактического профиля скорости звука среднестатистического, снижение эффективности проекционного метода (штриховая кривая) составляет в среднем 5–10%, в то время, как для базиса ГИК (штрих-пунктирная кривая) ухудшение достигает 10–16%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важным этапом решения томографических задач является их алгебраизация, в основе которой

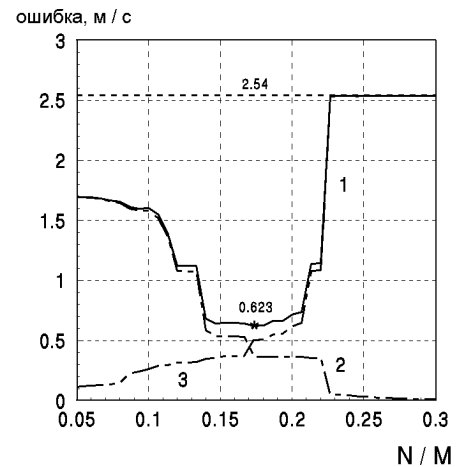


Рис. 8. Зависимость погрешностей от относительной размерности базиса ГИК при использовании вместо фактического профиля $c(z)$ среднестатистического профиля $c_0(z)$

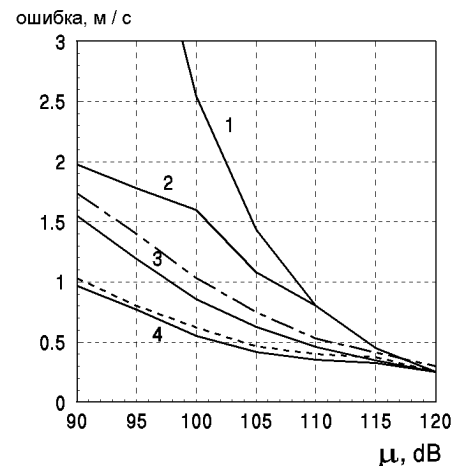


Рис. 9. Зависимость результирующих погрешностей от отношения сигнал/помеха в точке излучения:

1 — физический базис, 2 — физический базис с оптимизацией числа учитываемых мод, 3 — базис ГИК, использующий полную априорную информацию, 4 — проекционный базис в условиях полной априорной информации, штрих-пунктирная — базис ГИК, сформированный под среднестатистический профиль $c_0(z)$; штриховая — соответствующий среднестатистическому профилю проекционный базис

лежит разложение поля характеристик среды, подлежащих восстановлению, по некоторому счетному базису. За счет рационального выбора такого базиса эффективность решения томографических задач может быть существенно повышена. В основу предлагаемого в работе подхода к построению базиса положены экстремальные свойства собственных функций информационного оператора Фишера. Такие функции, удовлетворяющие критерию (24), названы в работе главными

информативными компонентами (ГИК).

Установлено существование оптимальной размерности базиса ГИК, который при заданных условиях проведения томографического эксперимента обеспечивает минимизацию результирующей ошибки измерений с учетом как флуктуационной, так и систематической ее части. Предложена важная в практическом отношении модификация метода ГИК, основанная на проектировании некоторого физического базиса представления восстанавливаемого поля на подпространство ГИК. При этом оператор проектирования действует на исходный физический базис как фильтр, отсеивающий те его компоненты, которые при заданном плане томографического эксперимента фактически не могут быть восстановлены. Тем самым в изначально физическом описании можно учесть статистический характер процедуры измерений. Такой подход имеет неоспоримые преимущества и по сравнению с методом ГИК в “чистом” виде, так как позволяет снизить размерность базиса и придать ему более физичное содержание.

Эффективность предлагаемого подхода проиллюстрирована на примерах из области акустической томографии океана. В частности, рассмотрена задача восстановления профиля скорости звука в вертикально стратифицированной океанической среде, возмущаемой бароклинными модами волны Росби. Численные расчеты погрешности восстановления профиля скорости звука для этой модели показывают значительное преимущество предлагаемого подхода по сравнению с традиционным физическим описанием, непосредственно основанном на использовании бароклиных мод. Однако для окончательных выводов о целесообразности практического применения метода ГИК необходимы дополнительные исследования для более широкого круга условий выполнения томографических экспериментов.

1. Greenleaf J. F. Computer tomography with ultrasound // Proc. IEEE.– 1983.– 71.– P. 330–337.
2. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: a scheme for large scale monitoring // Deep-Sea Res.– 1979.– 26A (2).– P. 123–161.
3. Shang E. C. Ocean acoustic tomography based on adiabatic mode theory // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– 85.– P. 1531–1573.
4. Tolstoy A., Diachok O., Frazer L. N. Acoustic tomography via matched field processing // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– 89.– P. 1119–1127.
5. Tolstoy A. Linearization of the matched field processing approach to acoustic tomography // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– 91.– P. 781–789.
6. Goncharov V. V., Voronovich A. G. An experiment on matched-field acoustic tomography with continuous wave signals in the Norway Sea // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– 93.– P. 1873–1881.
7. Athanassoulis G. A., Skarsoulis E. K. Arrival-time perturbations of broadband tomographic signals due to sound-speed disturbances. A wave-theoretic approach // J. Acoust. Soc. Amer.– 1995.– 97.– P. 3575–3588.
8. Бородин В. В. Статистический подход в задаче томографии океана. Границы Крамера–Рао точности восстановления поля скорости звука // Акуст. ж.– 1994.– 40.– С. 909–914.
9. Sensor Y. Finite series-expansion reconstruction methods // Proc. IEEE.– 1983.– 71.– P. 409–419.
10. Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием.– М.: Радио и связь, 1989.– 296 с.
11. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1979.– 286 с.
12. Боровков А. А. Математическая статистика.– М.: Наука, 1984.– 472 с.
13. Теребиж В. Ю. Восстановление изображений при минимальной априорной информации // Успехи физических наук.– 1995.– 165.– С. 143–176.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. с англ. под ред. И. Г. Арамановича.– М.: Наука, 1970.– 720 с.
15. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Пер. с англ. под ред. Х. Д. Икрамова.– М.: Мир, 1989.– 655 с.
16. Балакришнан А. В. и др. Теория связи / Пер. с англ. под ред. Б. Р. Левина.– М.: Связь, 1972.– 392 с.
17. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех.– М.: Сов. радио, 1978.– 296 с.
18. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1.– М.: Сов. радио, 1972.– 744 с.
19. Акустика океана / Ред. акад. Л. М. Бреховских.– М.: Наука, 1974.– 695 с.
20. Baer R. N., Jacobson J. Analysis of the effect of a Rossby wave on sound speed in the ocean // J. Acoust. Soc. Amer.– 1974.– 55.– P. 1178–1189.