

ПЛОСКАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ ЗАТУПЛЕННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТЬ С УЧЕТОМ ОТРЫВА

В. В. ГАВРИЛЕНКО

Украинский транспортный университет, Киев

Получено 15.04.98

Рассматривается плоская задача удара и погружения затупленного твердого тела общей формы в сжимаемую жидкость с учетом явления отрыва жидкости от тела в пределах его смоченной поверхности. Решение краевой задачи сводится к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В численном примере для жесткого кругового цилиндра проведен сравнительный анализ результатов с учетом и без учета влияния отрыва на процесс погружения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблема ударного взаимодействия жестких и упругих тел с жидкостью остается актуальной, и свидетельством интереса к исследованиям в этой области, связанного с их практическим применением в различных отраслях промышленности, служит большое количество научных трудов, в частности [1–5].

В данной статье решается плоская симметричная задача удара и погружения в сжимаемую жидкость цилиндрического затупленного твердого тела общей формы с учетом влияния на гидродинамические нагрузки, испытываемые телом при ударе и погружении в жидкость, явления нарушения неразрывного контакта тела с жидкостью (отрыва), возникающего в процессе погружения в пределах смоченной поверхности тела.

Задача решается в постановке, не учитывающей подъем поверхности жидкости вблизи погружающегося в жидкость тела. Предполагается непроницаемость поверхности тела для жидкости, а также затухание на бесконечности возмущений, вызванных в жидкости погружающимся в нее телом. Поведение жидкости описывается волновым уравнением, что накладывает ограничения на скорость и глубину погружения: скорость погружения рассматривается малой по сравнению со скоростью звука в жидкости, а глубина погружения – малой по сравнению с линейными размерами тела.

На основе использования методов интегральных преобразований Лапласа по времени, разделения переменных, разложения в ряды Фурье, решение краевой задачи сводится к решению бесконечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов разложения скорости деформирования поверхности жидкости в ряд Фурье по косинусам.

Постановка и решение данной задачи является дальнейшим развитием модели исследования такого сложного многофакторного процесса, каким является процесс ударного взаимодействия тел с жидкостью. Моделирование данного процесса с учетом фактора отрыва усложняет реализацию задачи, однако позволяет описывать этот процесс более точно.

Полученные результаты являются дальнейшим развитием метода решения рассмотренной в работах [6, 7] задачи, в которой учет явления отрыва не производился. Единый подход к решению задач с учетом и без учета отрыва позволяет оценить степень его влияния на искомые гидродинамические нагрузки, возникающие в процессе удара и погружения тела в жидкость.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть бесконечнопротяженное цилиндрическое затупленное твердое тело, двигаясь перпендикулярно поверхности покоящейся жидкости, в некоторый момент $t=0$ достигает этой поверхности и начинает погружаться в жидкость со скоростью $v_0(t)$, причем начальная скорость погружения $v_0=v_0(0)$. Считаем, что образующая поверхности тела на рассматриваемом временном интервале остается параллельной первоначально невозмущенной поверхности жидкости. Жидкость считается невесомой, баротропной, идеальной сжимаемой.

Введем в полупространстве, занимаемом жидкостью, неподвижную декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$: оси Ox и Oy направим по невозмущенной поверхности жидкости, кроме того, ось Oy – параллельно образующей поверхности тела, ось Oz – вглубь жидкости, т.е. невозмущенная поверхность жидкости совпадет с плос-

костью $z=0$. Так как гидродинамическая картина процесса погружения в жидкость тела в произвольном поперечном его сечении повторяется, то можно ограничиться рассмотрением движения в одном из сечений, например, в плоскости xOz .

Контур погружающегося в жидкость затупленного тела в плоскости xOz свяжем с полярной системой координат: θ – полярный угол, откладываемый от положительного направления оси Oz , $f(\theta)$ – полярный радиус, O' – полюс, расположенный на оси Oz на расстоянии R от центральной точки контура тела, т. е. $f(0) = R$, где R – характерный линейный размер тела. Тогда полярные и декартовы координаты будут связаны соотношениями

$$x = f(\theta) \sin \theta; \quad z = f(\theta) \cos \theta + z^* - R, \quad (1)$$

где z^* – глубина погружения тела в жидкость (рис. 1).

Исследуется ранний этап процесса погружения в жидкость тела со слабо искривленным контуром в пределах области контакта его с жидкостью при следующих ограничениях: рассматриваемые скорости погружения тела малы по сравнению со скоростью звука в жидкости C , т. е. $v_0/C \ll 1$, а глубины погружения тела в жидкость малы по сравнению с его линейными размерами, т. е. $z^*/R \ll 1$. В этом случае величина угла θ также будет мала, а из выражений (1) будет следовать приближенное соотношение

$$|x| \approx R\theta. \quad (2)$$

Затупленность рассматриваемых тел и малые глубины погружения их в жидкость дают возможность отождествить линейные координаты вдоль поверхностей жидкости и тела, что позволяет линеаризовать граничные условия и снести их на невозмущенную поверхность жидкости $z=0$.

Пусть в плоскости xOz в произвольный момент времени t форма поверхности погружающегося в жидкость тела с учетом соотношения (2) задается уравнением

$$z = \Phi(t, \theta), \quad (3)$$

где $\Phi(t, \theta)$ – некоторая четная, слабо искривленная, кусочно-гладкая функция.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{Ct}{R}; \quad \bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{CR}; \\ \bar{V} &= \frac{V}{C}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho C^2}; \quad \bar{F} = \frac{F}{\rho C^2 R}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ – плотность жидкости. Так как в дальнейшем будут использоваться только безразмерные переменные, то черточка над ними опускается.

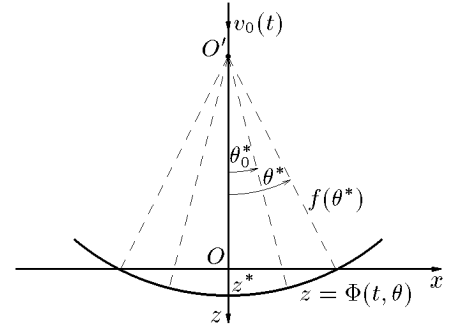


Рис. 1. Схема погружения затупленного твердого тела в жидкость

Движение жидкости описывается в силу соотношения (2) волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где φ – волновой потенциал, определяющий скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, \theta)$ и гидродинамическое давление $p(t, \theta)$ по формулам

$$V(t, \theta) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (6)$$

$$p(t, \theta) = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0}. \quad (7)$$

В задаче осуществляется поиск области отрыва части смоченной поверхности тела от поверхности жидкости (способ ее обнаружения предложен ниже в конце раздела). Если область отрыва в процессе погружения тела в жидкость на рассматриваемом временном интервале образуется, то поверхность жидкости может быть разбита на три области: на свободную поверхность жидкости; область контакта тела с жидкостью; область отрыва, являющуюся внутренней по отношению к области контакта.

В пределах области отрыва и на свободной поверхности жидкости должно выполняться динамическое условие: давление в этих областях постоянно и для простоты считаем его равным нулю

$$- \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0^*, \quad (8)$$

$$- \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} = 0, \quad \theta > \theta^*, \quad (9)$$

где угол θ_0^* в каждый момент времени определяет внутреннюю границу области контакта тела с жидкостью, а угол θ^* – ее внешнюю границу.

В области контакта жидкости с телом его поверхность предполагается непроницаемой для жидкости

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = v_0(t), \quad \theta_0^* < \theta < \theta^*. \quad (10)$$

Так как до начала взаимодействия тела с жидкостью последняя покоилась, то будем иметь нулевые начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

Возмущения, вызванные в жидкости телом, на бесконечности затухают

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \theta^2 + z^2 \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Закон движения тела в жидкости определяется из второго закона Ньютона

$$\mu \frac{dv_0(t)}{dt} = -F(t), \quad v_0(0) = v_0, \quad (13)$$

где μ – погонная масса тела, отнесенная к ρR^2 ; $F(t)$ – гидродинамическая сила сопротивления погружению тела со стороны жидкости, которая определяется, с учетом соотношения (2), как интеграл от давления, распределенного по области контакта тела с жидкостью, формулой

$$F(t) = 2 \int_{\theta_0^*}^{\theta^*} p(t, \theta) d\theta. \quad (14)$$

Если в постановке задачи не учитывать подъем свободной поверхности жидкости вблизи погружающегося в нее тела, внешняя граница области контакта тела с жидкостью задается величиной угла θ^* , которая в каждый момент времени t определяется точкой пересечения контура тела, имеющего уравнение (3), с невозмущенной поверхностью жидкости $z=0$, т.е. из уравнения

$$\Phi(t, \theta) = 0, \quad (15)$$

по известной в данный момент глубине погружения

$$z^* = \int_0^t v_0(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Внутренняя граница области контакта тела с жидкостью (внешняя граница области отрыва) задается в каждый момент времени t величиной угла θ_0^* , определяемой соотношением:

$$\theta_0^* = \sup\{\theta \in [0, \theta^*] : p(t, \theta) = 0\}, \quad (17)$$

которое позволяет построить соответствующий итерационный процесс.

Сформулированная краевая задача (5), (8) – (17) является в общем случае нелинейной, так как в соотношении (14) гидродинамическая сила сложным функциональным образом определяется через искомые величины.

Следует отметить, что рассмотренная в [6, 7] постановка задачи, не учитывающая явления отрыва, представляет собой частный случай данной постановки, если на всем рассматриваемом отрезке времени угол $\theta_0^* = 0$, т.е. явление отрыва отсутствует.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Применяя к уравнению (5) преобразование Лапласа по времени t с параметром s [8], получаем в пространстве изображений уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} - s^2 \varphi^L = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности (12), имеет вид

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-z\sqrt{s^2+n^2}} \cos n\theta, \quad (19)$$

где A_n – постоянные коэффициенты.

Раскладываем скорость деформирования поверхности жидкости $V(t, \theta)$ и гидродинамическое давление $p(t, \theta)$ в ряды Фурье по косинусам

$$V(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cos n\theta, \quad (20)$$

$$p(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos n\theta. \quad (21)$$

Применяя к выражениям (6), (7) и разложениям (20), (21) преобразования Лапласа по t и учитывая соотношения (19), получаем формулу, связывающую коэффициенты $V_n^L(s)$ и $p_n^L(s)$:

$$p_n^L(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2+n^2}} V_n^L(s), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (22)$$

Так как на основании [9] оригиналом функции $s/\sqrt{s^2+n^2}$ является выражение $\delta(t) - nJ_1(nt)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $J_1(t)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода первого порядка, то по теореме о свертке оригиналов двух

функций [8] из выражения (22) получаем формулу

$$\begin{aligned} p_n(t) &= V_n(t) - \int_0^t V_n(\tau) g_n(t-\tau) d\tau, \\ g_n(t) &= n J_1(nt), \quad n = \overline{0, \infty}, \end{aligned} \quad (23)$$

связывающую коэффициенты $V_n(t)$ и $p_n(t)$.

Учитывая соотношения (6), (7), граничные условия (8) – (10), разложения (20), (21), а также формулу (23), получаем

$$\begin{aligned} V(t, \theta) &= H((\theta_0^* - \theta)(\theta - \theta_0^*)) v_0(t) + \\ &+ H(\theta_0^* - \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t V_n(\tau) g_n(t-\tau) d\tau \right) \cos n\theta + \\ &+ H(\theta - \theta_0^*) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t V_n(\tau) g_n(t-\tau) d\tau \right) \cos n\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

где $H(\theta)$ – функция Хевисайда, имеющая вид

$$H(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta > 0; \\ 0, & \text{если } \theta < 0. \end{cases}$$

Раскладывая в ряды Фурье по косинусам каждый член выражения (24) и приравнявая коэффициенты при соответствующих косинусах, получаем бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно коэффициентов $V_n(t)$ ($n = \overline{0, \infty}$):

$$\begin{aligned} V_n(t) &= v_{0n}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (\beta_{mn}(\theta_0^*) + \alpha_{mn}(\theta^*)) \times \\ &\times \int_0^t V_m(\tau) g_m(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} k_n &= \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ 2, & \text{если } n = \overline{1, \infty}; \end{cases} \\ v_{0n}(t) &= \frac{k_n}{\pi} v_0(t) \int_{\theta_0^*}^{\theta^*} \cos n\theta d\theta; \\ \alpha_{mn}(\theta^*) &= \frac{k_n}{\pi} \int_{\theta^*}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta; \\ \beta_{mn}(\theta_0^*) &= \frac{k_n}{\pi} \int_0^{\theta_0^*} \cos m\theta \cos n\theta d\theta. \end{aligned}$$

После преобразований коэффициенты $v_{0n}(t)$, $\alpha_{mn}(\theta^*)$ и $\beta_{mn}(\theta_0^*)$ принимают вид

$$v_{0n}(t) = \begin{cases} \frac{v_0(t)}{\pi} (\theta^* - \theta_0^*), & n = 0; \\ \frac{2v_0(t)}{\pi} \cdot \frac{\sin n\theta^* - \sin n\theta_0^*}{n}, & n = \overline{1, \infty}; \end{cases} \quad (26)$$

$$\alpha_{mn}(\theta^*) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} \theta^*, & m = n = 0; \\ -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin m\theta^*}{m}, & m \neq n, n = 0; \\ 1 - \frac{1}{\pi} \left(\theta^* + \frac{\sin 2m\theta^*}{2m} \right), & m = n, n \neq 0; \\ -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(m-n)\theta^*}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\theta^*}{m+n} \right), & m \neq n, n \neq 0; \end{cases} \quad (27)$$

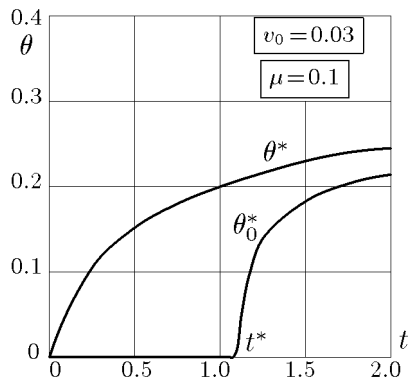
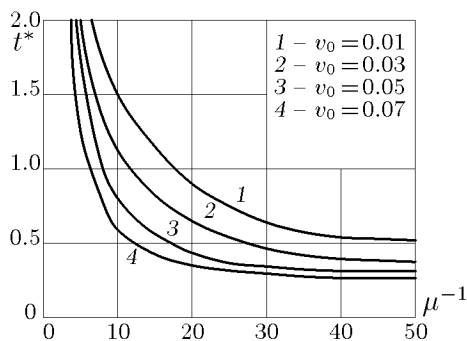
$$\beta_{mn}(\theta_0^*) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \theta_0^*, & m = n = 0; \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin m\theta_0^*}{m}, & m \neq n, n = 0; \\ \frac{1}{\pi} \left(\theta_0^* + \frac{\sin 2m\theta_0^*}{2m} \right), & m = n, n \neq 0; \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(m-n)\theta_0^*}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\theta_0^*}{m+n} \right), & m \neq n, n \neq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Коэффициенты $p_n(t)$ с учетом найденных коэффициентов $V_n(t)$ определяются по формуле (23), а искомое гидродинамическое давление $p(t, \theta)$ – по формуле (21). Используя соотношения (14) и (21), получаем гидродинамическую силу сопротивления погружению тела в жидкость:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \left\{ p_0(t) (\theta^* - \theta_0^*) + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \frac{\sin n\theta^* - \sin n\theta_0^*}{n} \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

тогда дифференциальное уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{dv_0(t)}{dt} &= -2 \left\{ p_0(t) (\theta^* - \theta_0^*) + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \frac{\sin n\theta^* - \sin n\theta_0^*}{n} \right\}, \\ v_0(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Рис. 2. Зависимость от времени значений углов θ_0^* и θ^* Рис. 3. Зависимость параметра t^* от величины μ^{-1} для различных v_0

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Решение краевой задачи в данной постановке, не учитывающей подъем поверхности жидкости вблизи погружающегося в нее тела, сводится к решению системы интегральных уравнений (25) совместно с дифференциальным уравнением (30) по определяемым в каждый момент времени t внешней и внутренней границам области контакта тела с жидкостью из уравнения (15) и условия (17).

Реализация задачи осуществлялась на конечном отрезке времени $[0; T]$, который разбивался на равные части длиной Δt , и в полученных узлах разбиения вычислялись все искомые величины.

Бесконечная система интегральных уравнений (25) и дифференциальное уравнение (30) подвергались усечению. Порядок усечения выбирался из соображений практической сходимости решения (расчеты для 75, 100 и 150 членов ряда Фурье дали близкие по значению результаты). В системе (25) все интегралы вычислялись по квадратурным формулам трапеций и Симпсона [10]. Реше-

ния системы интегральных уравнений (25) и дифференциального уравнения (30), а также определение внешней и внутренней границ области контакта тела с жидкостью осуществлялось итерационным методом последовательных приближений. Для улучшения сходимости рядов Фурье применялись σ -множители Гиббса [11].

В вычислениях наряду с изменением геометрической формы погружающегося в жидкость тела на временном интервале $[0; 2]$ варьировались следующие параметры: масса тела $\mu = 0.01 \div 20, \infty$; начальная скорость погружения $v_0 = 0.001 \div 0.1$.

На рис. 2–5 приведены результаты решения задачи исследования явления отрыва в процессе погружения в жидкость жесткого кругового цилиндра.

На рис. 2 показана зависимость от времени значений углов θ_0^* и θ^* , определяющих внутреннюю и внешнюю границы области контакта тела с жидкостью, для значений параметров $v_0 = 0.03$ и $\mu = 0.1$.

Из рис. 2 видно, что:

- процесс отрыва начинается в момент времени t^* , равный для данного конкретного случая 1.1;
- с появлением зоны отрыва площадь области контакта тела с жидкостью уменьшается по сравнению со случаем, когда отрыв не учитывается (см. [6, 7]).

На рис. 3 показана зависимость параметра t^* , определяющего время начала процесса отрыва, от величины μ^{-1} для $v_0 = 0.01; 0.03; 0.05; 0.07$. Кривые, соответствующие перечисленным значениям скорости v_0 , отмечены на рисунке цифрами 1–4.

Из рис. 3 можно заметить, что:

- на рассматриваемом временном интервале $[0; 2]$ для относительно тяжелых тел ($\mu^{-1} < 5$), а также для случая погружения с постоянной скоростью ($\mu^{-1} = 0$) при различных начальных скоростях погружения v_0 явление отрыва не проявлялось;
- чем больше масса погружающегося тела μ , тем позже наступает момент начала процесса отрыва t^* , однако:
- время начала процесса отрыва t^* жидкости от поверхности легких тел ($\mu^{-1} > 40$) при всех рассмотренных значениях v_0 практически не зависит от массы, но зависит от скорости v_0 , причем чем выше начальная скорость погружения v_0 , тем раньше наступает время начала процесса отрыва t^* .

На рис. 4 показана зависимость от времени гидродинамического давления p в лобовой точке сферы для значений массы $\mu=0.2; 0.1; 0.05$ при $v_0=0.05$. Кривые, соответствующие перечисленным значениям массы μ , отмечены на рисунке цифрами 1–3.

Из рис. 4 видно, что:

- при $t=0$ величина p определяется согласно гипотезе о плоской волне, а в дальнейшем давление быстро убывает, достигая своего нулевого уровня;
- давление убывает тем быстрее, чем меньше масса погружающегося в жидкость тела.

На рис. 5 показана зависимость от времени гидродинамической силы $F(t)$ для значений массы $\mu=0.2; 0.1; 0.05$ при $v_0=0.05$. Кривые, соответствующие перечисленным значениям массы μ , отмечены на рисунке цифрами 1–3.

Из рис. 5 можно заметить, что:

- в широком диапазоне масс гидродинамическая сила, равная нулю в начальный момент процесса погружения тела в жидкость, растет до своего максимального значения, а затем убывает, причем:
- гидродинамическая сила убывает тем быстрее, чем меньше масса погружающегося в жидкость тела;
- чем меньше масса тела, тем меньше максимальное значение гидродинамической силы, действующее на него со стороны жидкости;
- чем меньше масса тела, тем раньше достигается максимум гидродинамической силы.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами работ [6, 7]: эти результаты полностью совпадают для относительно тяжелых тел ($\mu > 0.2$), так как для них на рассматриваемом временном интервале процесс отрыва не наблюдается. Для относительно легких тел начало процесса отрыва происходит в момент, когда уже абсолютные значения гидродинамического давления близки к нулю, поэтому влияние этого процесса на величины гидродинамических нагрузок незначительно (соответствующие графики гидродинамических нагрузок, полученные с учетом и без учета явления отрыва, мало отличаются друг от друга).

1. Веклич Н.А. Удар прямоугольной пластины о жидкое полупространство // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1992.– N 5.– С. 120–126.

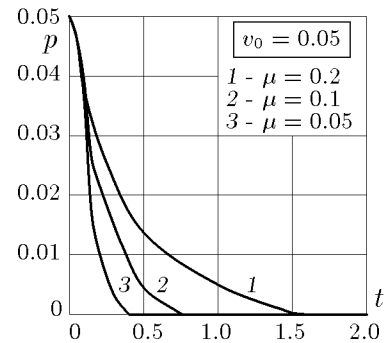


Рис. 4. Зависимость от времени гидродинамического давления p в лобовой точке сферы для различных значений

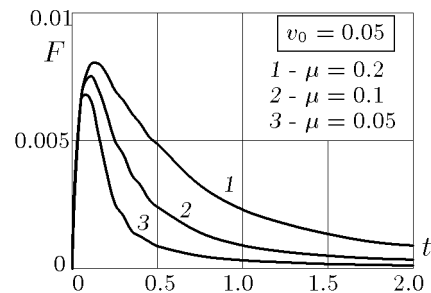


Рис. 5. Зависимость от времени гидродинамической силы $F(t)$ для различных значений массы μ

2. Горшков А.Г., Дробышевский Н.И. Применение метода граничных элементов к задаче о проникновении тел в жидкость // Изв. РАН. Мех. тверд. тела.– 1995.– N 6.– С. 99–103.
3. Ерошин В.А. Высокоскоростной вход в воду тяжелого диска под малым углом к свободной поверхности // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1995.– N 6.– С. 13–18.
4. Коробкин А.А. Акустическое приближение в задаче погружения затупленного контура в идеальную жидкость // Прикл. мех. и техн. физ.– 1992.– N 4.– С. 48–54.
5. Норкин М.В. Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1995.– N 5.– С. 161–165.
6. Гавриленко В. Н., Кубенко В. Д. Плоская задача проникания жестких тел в сжимаемую жидкость // Прикл. механика.– 1985.– 21, N 4.– С. 41–49.
7. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость.– Киев: Наук. думка, 1981.– 160 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1965.– 751 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.– М.: Наука, 1966.– 296 с.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.– М.: Наука, 1977.– 456 с.
11. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа.– М.: Физматгиз, 1961.– 524 с.