

# НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПОРИСТО-УПРУГОМ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОТКРЫТЫХ ПОР

Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 26.03.98*

На основе теории Био изучены дисперсионные характеристики нормальных волн в пористо-упругом слое со свободными поверхностями для случая открытых пор. Даже без учета диссипативных эффектов полученный дисперсионный спектр значительно сложнее, чем для идеально упругой полосы за счет существования трех видов волн в пористой, насыщенной жидкостью среде. В пористо-упругом слое для конкретной частоты существует конечное число действительных корней и бесконечное число чисто мнимых и комплексных корней дисперсионного уравнения. В статье проведено сравнение характеристик нормальных волн в пористо-упругом слое со свободной поверхностью для случая открытых и закрытых пор. Проанализировано поведение первой распространяющейся волны в низкочастотном и высокочастотном пределах.

## ВВЕДЕНИЕ

Модель пористо упругой среды позволяет адекватно описать свойства некоторых реальных сред при изучении волновых процессов в гидроакустике, сейсмология и других областях. Теория распространения волн в пористых средах была развита Био в середине 50-х годов. На основании этой теории было предсказано существование трех типов волн в пористо-упругой среде – поперечной волны, а также медленной и быстрой продольных волн [1–3]. Однако только в 80-е годы было получено экспериментальное подтверждение существования медленной продольной волны [4].

С этого времени значительно возрос интерес к анализу волновых процессов в пористых средах в рамках теории Био. В большинстве работ рассматривались вопросы распространения волн в безграничной пористо-упругой среде. Это позволило проанализировать параметры, характеризующие пористо-упругую среду в целом и определить степень их влияния на волновые процессы в такой среде. Значительно меньше работ посвящено решению граничных задач. Наличие граничных поверхностей приводит к взаимодействию трех типов волн, что значительно усложняет волновую картину. Так, при анализе процесса отражения волн на границе раздела пористо-упругого полупространства и жидкости была обнаружена поверхностная волна типа Стоунли [5], на свободной границе пористо-упругой среды найдены поверхностные волны рэлеевского типа [6].

В случае распространения волн в слое существенную роль в формировании поля играет не только взаимодействие различных типов волн на границе, но и взаимовлияние границ, обуславли-

вающее возникновение дисперсии. К настоящему времени при анализе распространения волн в пористо-упругом слое рассматривались только вопросы прохождения волн через слой, расположенный в жидкости [5], или через систему слоев [7]. Анализ нормальных волн в пористо-упругих волноводах для различных видов условий на его поверхности практически не проводился.

В случае отсутствия напряжений на поверхностях пористо-упругого волновода, насыщенного жидкостью, возможны два типа граничных условий – свободная поверхность с открытыми порами и свободная поверхность с закрытыми порами [5]. В работе [8] изучались дисперсионные характеристики пористо-упругого слоя со свободной поверхностью для случая закрытых пор. В данной статье рассматривается процесс распространения волн в пористо-упругом слое со свободными поверхностями для случая открытых пор. Вязкость жидкости не учитывается.

Для такого типа граничных условий получено дисперсионное уравнение и определены характеристики нормальных волн в слое. Проведено сравнение характеристик волн для двух вариантов граничных условий, описывающих свободную поверхность в пористо-упругом слое. Показано, что наблюдаются значительные различия в дисперсионном спектре для пористо-упругого слоя со свободными поверхностями в случае открытых и закрытых пор.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свойства нормальных волн в пористо-упругом слое ( $-\infty < X < \infty$ ,  $-h \leq Z \leq h$ ) со свободными поверхностями  $Z = \pm h$  в случае от-

крытых пор. Векторы смещений упругого скелета  $\mathbf{u}$  и жидкости  $\mathbf{v}$  в безразмерных переменных  $z = Z/h$ ,  $x = X/h$  удовлетворяют уравнению движения для упругой и жидкой фаз с учетом их взаимодействия [9]:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (H - \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \\ = \rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \rho_f \partial_t^2 \mathbf{w}, \\ C \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = \\ = \rho_f \partial_t^2 \mathbf{u} - \frac{\alpha \rho_f}{m} \partial_t^2 \mathbf{w} - F \partial_t \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(x, \pm 1) = 0, \quad \tau_{xz}(x, \pm 1) = 0, \\ \sigma(x, \pm 1) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\tau_{ij}$  – тензор напряжений, приложенный к упругому скелету;  $\sigma$  – сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды;  $\sigma = -mp_0$ ;  $p_0$  – давление в жидкости;  $m$  – пористость;  $\mathbf{w} = m(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ ;  $H$ ,  $\mu$ ,  $C$ ,  $M$  – коэффициенты, определяемые через характеристики среды [10]:

$$\begin{aligned} H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D - K_b} + K_b + 4\mu/3, \\ C = \frac{K_s(K_s - K_b)}{D - K_b}, \\ M = \frac{K_s^2}{D - K_b}, \\ D = K_s[1 + m(K_s/K_f - 1)]; \end{aligned} \quad (3)$$

$\rho_s$  – плотность упругого скелета;  $K_s$  – модуль всестороннего сжатия упругого скелета;  $\rho_f$  – плотность жидкости;  $K_f$  – модуль всестороннего сжатия жидкости;  $K_b$  – модуль всестороннего сжатия пористой среды;  $\mu$  – модуль сдвига пористой среды;  $\alpha$  – извилистость. Посредством величины  $\alpha$  определяется коэффициент динамической связи упругого скелета и жидкости  $\rho_{12} < 0$  [2]:

$$\rho_{12} = (1 - \alpha)\rho_f m,$$

где  $\rho$  – средняя плотность, связанная с плотностями упругого скелета и жидкости соотношением

$$\rho = (1 - m)\rho_s + m\rho_f.$$

Величина  $F = f(\omega)(\rho_f \nu_f)/K_{pr}$  является частотно зависимой функцией, определяемой характером движения жидкости по порам упругого скелета.

Здесь  $\nu_f$  – кинематическая вязкость;  $K_{pr}$  – проницаемость.

В водонасыщенной пористой среде с линейно-упругим скелетом при постоянном отношении расхода жидкости к градиенту давления (течение Пуазейля) частотную зависимость вязкого сопротивления потоку жидкости можно не учитывать и считать  $f(\omega) \approx 1$  вплоть до частот, при которых вязкие и инерционные силы имеют одинаковый порядок [1, 9, 10].

## 2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Вектор смещения в жидкости и в упругом скелете могут быть представлены через скалярный и векторный потенциалы:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi_s - \operatorname{rot} \psi_s, \quad \operatorname{div} \psi_s = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = \nabla \phi_f - \operatorname{rot} \psi_f, \quad \operatorname{div} \psi_f = 0. \quad (5)$$

При этом скалярный потенциал допускает представление [1]:

$$\phi_s = \phi_0 + \phi_1. \quad (6)$$

Функции  $\phi_j$  определяются как решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta \phi_j + k_j^2 \phi_j = 0, \quad k_j^2 = \frac{\omega^2 h^2}{c^2} s_j, \quad j = 0, 1. \quad (7)$$

Здесь  $s_j$  – корень квадратного уравнения

$$A_1 s_j^2 - B_1 s_j + C_1 = 0, \quad j = 0, 1 \quad (8)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_1 = q_{22}q_{11} - q_{12}^2, \\ B_1 = q_{11}\Gamma_{22} + q_{22}\Gamma_{11} - 2q_{12}\Gamma_{12} + i\Gamma, \\ C_1 = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2 + i\Gamma, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} q_{11} = \frac{H - 2Cm + Mm^2}{H}, \quad q_{22} = \frac{Mm^2}{H}, \\ q_{12} = \frac{Cm - Mm^2}{H}, \quad c^2 = \frac{H}{\rho}. \end{aligned}$$

$$\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12},$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\rho}, \quad \Gamma = \frac{m^2 \rho_f \nu_f}{K_{pr} \rho \omega}.$$

Для потенциала  $\phi_f$  справедливо уравнение

$$\phi_f = M_0 \phi_0 + M_1 \phi_1,$$

с коэффициентами

$$M_j = \frac{\Gamma_{11}q_{22} - \Gamma_{12}q_{12} - A_1s_j + (q_{22} + q_{12})i\Gamma}{\Gamma_{22}q_{12} - \Gamma_{12}q_{22} + (q_{22} + q_{12})i\Gamma}, \quad (9)$$

$$j = 0, 1.$$

Векторный потенциал  $\psi_s$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi_s + k_2^2\psi_s = 0, \quad (10)$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2\rho h^2}{\mu} [\Gamma_{11} + M_2\Gamma_{12} + (1 - M_2)i\Gamma]$$

и соотношению

$$\psi_f = M_2\psi_s, \quad M_2 = \frac{-\Gamma_{12} + i\Gamma}{\Gamma_{22} + i\Gamma}. \quad (11)$$

Уравнения состояния для пористо-упругой среды имеют следующий вид [6]:

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + (Ae + Q\zeta)\delta_{ij}, \quad \sigma = Qe + R\zeta, \quad (12)$$

$$e = \text{div}\mathbf{u}, \quad \zeta = \text{div}\mathbf{v}.$$

Здесь

$$A = H - 2\mu - 2Cm + Mm^2;$$

$$Q = Cm - Mm^2; \quad R = m^2M;$$

$\epsilon_{ij}$  – тензор деформаций;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для частного случая плоской задачи достаточно введения только трех скалярных функций  $\phi_j$  ( $j = 0, 1$ ),  $\psi_y$ . Тогда выражения для нормального и касательного напряжения упругой фазы через потенциалы имеют вид

$$\frac{\tau_{zz}}{2\mu} = \frac{\partial(\phi_0 + \phi_1)}{\partial z} - \frac{\partial\psi_s}{\partial x} - \frac{A + M_jQ}{2\mu}k_j^2\phi_j,$$

$$\frac{\tau_{zx}}{2\mu} = 2\frac{\partial^2(\phi_0 + \phi_1)}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2\psi_s}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_s}{\partial x^2}, \quad (13)$$

$$j = 0, 1,$$

а сила, действующая на жидкость –

$$\frac{\sigma}{2\mu} = -\frac{Q + M_jMm^2}{2\mu}k_j^2\phi_j, \quad j = 0, 1. \quad (14)$$

### 3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Представление для скалярных потенциалов и одной компоненты векторного потенциала ищем в виде [11]:

$$\phi_j = (A_j \cos \alpha_j z + B_j \sin \alpha_j z)e^{-i\xi x},$$

$$j = 0, 1. \quad (15)$$

$$\psi_y = (E \cos \alpha_2 z + F \sin \alpha_2 z)e^{-i\xi x},$$

где  $\xi$  – постоянная распространения;

$$\alpha_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2}, \quad j = 0, 1, 2;$$

$k_j$  – нормированные частоты. Для случая гармонических волн временной множитель  $e^{-i\omega t}$  всюду далее опускается. Подставляя (15) в граничные условия (3) с учетом (12)–(14) получим дисперсионное уравнение в виде

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 = 0. \quad (16)$$

Как и для пористо-упругого слоя со свободными поверхностями с закрытыми порами, полная система нормальных волн в данном случае распадается на два класса, отвечающих обращению в нуль по отдельности каждого из сомножителей дисперсионного уравнения (16).

$$\Delta_1 = r_0 k_0^2 \cos \alpha_0 (\tau_1 \beta \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \xi^2 \alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1) - r_1 k_1^2 \cos \alpha_1 (\tau_0 \beta \sin \alpha_2 \cos \alpha_0 + \xi^2 \alpha_0 \alpha_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_0) \quad (17)$$

$$\Delta_2 = r_0 k_0^2 \sin \alpha_0 (\tau_1 \beta \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \xi^2 \alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) - r_1 k_1^2 \sin \alpha_1 (\tau_0 \beta \cos \alpha_2 \sin \alpha_0 + \xi^2 \alpha_0 \alpha_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_0). \quad (18)$$

Здесь введены обозначения

$$r_j = \frac{Q + M_j M m^2}{2\mu}, \quad \beta = -\xi^2 + k_2^2/2,$$

$$t_i = \frac{A + M_j Q}{2\mu}, \quad \tau_i = -\xi^2 + (1 + t_i)k_j^2, \quad (19)$$

$$j = 0, 1.$$

Уравнение (17) соответствует симметричным нормальным волнам ( $B_0 = 0, B_1 = 0, E = 0$ ):

$$u_z(-z) = -u_z(z), \quad u_x(-z) = u_x(z),$$

$$v_z(-z) = -v_z(z), \quad v_x(-z) = v_x(z), \quad (20)$$

а уравнение (18) – антисимметричным нормальным волнам ( $A_0 = 0, A_1 = 0, F = 0$ ) – смещения антисимметричны относительно плоскости  $z = 0$ :

$$u_z(-z) = u_z(z), \quad u_x(-z) = -u_x(z),$$

$$v_z(-z) = v_z(z), \quad v_x(-z) = -v_x(z). \quad (21)$$

Для симметричной деформации смещения в среде записываются в виде

$$\begin{aligned}
 u_z &= -r_1 k_1^2 \alpha_1 \frac{\sin \alpha_0 z}{\cos \alpha_0} + r_0 k_0^2 \alpha_0 \frac{\sin \alpha_1 z}{\cos \alpha_1} + \\
 &\quad + \frac{\tau_0 r_1 k_1^2 - \tau_1 r_0 k_0^2}{\alpha_2} \frac{\sin \alpha_2 z}{\cos \alpha_2}, \\
 u_x &= i\xi \left( r_1 k_1^2 \frac{\cos \alpha_0 z}{\cos \alpha_0} - r_0 k_0^2 \frac{\cos \alpha_1 z}{\cos \alpha_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_0 r_1 k_1^2 - \tau_1 r_0 k_0^2}{\xi^2} \frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2} \right), \\
 v_z &= -M_0 r_1 k_1^2 \alpha_1 \frac{\sin \alpha_0 z}{\cos \alpha_0} + M_1 r_0 k_0^2 \alpha_0 \frac{\sin \alpha_1 z}{\cos \alpha_1} + \\
 &\quad + M_2 \frac{\tau_0 r_1 k_1^2 - \tau_1 r_0 k_0^2}{\alpha_2} \frac{\sin \alpha_2 z}{\cos \alpha_2}, \\
 v_x &= i\xi \left( M_0 r_1 k_1^2 \frac{\cos \alpha_0 z}{\cos \alpha_0} - M_1 r_0 k_0^2 \frac{\cos \alpha_1 z}{\cos \alpha_1} + \right. \\
 &\quad \left. + M_2 \frac{\tau_0 r_1 k_1^2 - \tau_1 r_0 k_0^2}{\xi^2} \frac{\cos \alpha_2 z}{\cos \alpha_2} \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Как и для случая пористо-упругого слоя с закрытыми порами рассматривается частный случай стационарного течения невязкой жидкости ( $\nu_f = 0$ ), диссипацией в упругом скелете также пренебрегаем ( $\mu$  – вещественная величина). Рассматриваются только симметричные относительно плоскости  $z=0$  деформации, соответствующие дисперсионному уравнению (17). Если  $\nu_f = 0$  и  $\mu$  – вещественная величина, то коэффициенты дисперсионного уравнения будут или действительными, или чисто мнимыми. Диссипация энергии в такой среде отсутствует.

Указанные допущения существенно упрощают модель и позволяют проанализировать влияние условий, которые налагаются на поведение жидкости на свободной поверхности. В случае закрытых пор (задача, рассмотренная в [8]) жидкость не может “перетекать” по свободной поверхности, и для открытых пор ограничений на течение жидкости по поверхности не ставится.

Решение уравнения (17) приведено в традиционной форме графического представления дисперсионных кривых – в виде зависимости постоянной распространения  $\xi$  от безразмерной частоты  $\Omega = k_2$ . Частоты  $k_0$ ,  $k_1$  выражаются через  $\Omega$  при помощи соотношений (8)–(11). Расчет выполнен для пористо-упругой среды с характеристиками [9]:  $m = 0.3$ ,  $\mu = 5 \cdot 10^7$  Па,  $\alpha = 1.25$ ,  $\rho_s = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_s = 3.6 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_f = 2.9 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\nu_f = 0$ .

При построении дисперсионных кривых выполнялся принцип, согласно которому каждая ветвь должна быть непрерывной и прослеживаться от начала на плоскости  $\Omega=0$  до бесконечности. В общем случае дисперсионная ветвь может иметь вещественный, чисто мнимый и комплексный участки. Комплексные участки ветви входят и выходят на мнимую или действительную плоскость  $\xi$  в точках относительного экстремума под углом  $90^\circ$ .

Для фактического определения вещественных корней прежде всего следует найти частоты запираения. Полагая  $\xi=0$  в уравнении (17), получаем

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sin k_2 \cos k_0 \cos k_1 \delta = 0, \\
 \delta &= r_0(1+t_1) - r_1(1+t_0),
 \end{aligned} \tag{23}$$

откуда находим три набора частот запираения:

$$\cos k_0 = 0, \quad k_0 = \frac{2p-1}{2}\pi, \quad p=0, 1, 2, \dots, \tag{24}$$

$$\cos k_1 = 0, \quad k_1 = \frac{2m-1}{2}\pi, \quad m=0, 1, 2, \dots, \tag{25}$$

$$\sin k_2 = 0, \quad k_2 = n\pi, \quad n=0, 1, 2, \dots \tag{26}$$

В отличие от пористо-упругого слоя с закрытыми порами в данном случае последовательность частот запираения определяется независимо для каждого из трех типов волн в бесконечной пористо-упругой среде (поперечные, медленные и быстрые продольные). Частоты запираения первого и второго типа (уравнения (24), (25)) характеризуются наличием только толщинных движений. Для этого типа движений  $\phi_0 \neq 0$ ,  $\phi_1 \neq 0$ ,  $\psi = 0$ . Для третьего типа (уравнение (26)) характерны сдвиговые движения,  $\phi_0 = 0$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\psi \neq 0$ . В случае открытых пор на частотах запираения при нормальном падении не происходит трансформации волн при отражении от свободной границы. При закрытых порах на частотах запираения, связанных с продольными волнами (уравнение (19) [8]), при нормальном падении продольных волн одного типа на свободную границу в отраженном поле возникают продольные волны обоих типов (как быстрые, так и медленные).

Обозначим частоты запираения, связанные с  $k_0$ , через  $k_p^{(0)}$ , связанные с  $k_1$  – через  $k_p^{(1)}$  и с  $k_2$  – через  $k_p^{(2)}$ . Здесь  $p$  – номер частоты запираения. При этом частоты запираения  $k_p^{(1)}$  появляются значительно реже, чем  $k_p^{(0)}$  и  $k_p^{(2)}$ , а частоты запираения  $k_p^{(2)}$  не зависят от  $H$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $m$ .

Уравнение (23) справедливо также при условии

$$r_0(1+t_1) - r_1(1+t_0) = 0. \tag{27}$$

Это уравнение не зависит от частоты. Учитывая соотношения для  $r_j$  и  $t_j$ ,  $j=0, 1$ , данное уравнение преобразуем к виду

$$m^2 M \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{M_0 - M_1}{2\mu} = 0.$$

Для упругой среды (из (3)  $K_s \neq 0$ ,  $M \neq 0$ ,  $\nu > 0.5$ ) с ненулевой пористостью ( $m \neq 0$ ) уравнение (27) выполняется при  $M_0 = M_1$ . В этом случае, учитывая (7)–(9),  $k_0 = k_1$ ,  $r_0 = r_1$ ,  $\tau_0 = \tau_1$  и из (22) следует, что смещения упругой и жидкой фаз равны нулю. Другими словами, при условии (27) движений в пористо-упругом слое не происходит.

В пористо-упругом слое со свободными поверхностями, как и в идеально упругом слое, для конкретной частоты существует ограниченное число вещественных корней дисперсионного уравнения (17). Комплексных корней для конкретной частоты бесконечно много. Для их анализа необходимо найти точки выхода комплексных корней на плоскость  $\Omega=0$ . Они определяются из уравнения

$$\xi^2 \cosh \xi (a\xi + b \sinh 2\xi) = 0, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a &= r_0(\delta_{21} - 1) - r_1(\delta_{20} - 1); \\ b &= r_0(0.5 + t_1) - r_1(0.5 + t_0); \\ \delta_{21} &= \frac{(\Gamma_{11} + M_2 \Gamma_{12})H}{\mu s_1}; \\ \delta_{20} &= \frac{(\Gamma_{11} + M_2 \Gamma_{12})H}{\mu s_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем два набора корней:

$$\cosh \xi = 0, \quad \xi = i \frac{2n-1}{2} \pi; \quad (29)$$

$$a\xi + b \sinh 2\xi = 0,$$

$$\xi \approx i \frac{(4n-1)\pi}{4} \mp \frac{\ln(2\pi na/b)}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Для второго уравнения приведено асимптотическое значение корней для больших номеров. Сравним точки выхода корней дисперсионных уравнений на плоскость  $\Omega = 0$  для слоя со свободной поверхностью с закрытыми и открытыми порами. В случае закрытых пор первый набор корней (чисто мнимые корни, уравнение (21) [8]) аналогичен корням в жидком слое с абсолютно жесткими или абсолютно мягкими стенками, а в случае открытых пор (уравнение (29)) – жидкому слою с одной жесткой и одной мягкой стенкой. Второй набор корней совпадает с корнями для идеально упругого слоя в статических задачах, если  $a = 2$ ,  $b = 1$  независимо

от условий, налагаемых на течение жидкости по свободной поверхности.

При вычислении комплексных корней уравнения (17) применялся метод Ньютона [12]. При движении по ветви с ростом частоты в качестве начальных приближений принимали значения корней (29) и (30). Счет выполнялся для каждой дисперсионной кривой. Мнимые и действительные корни находились методом половинного деления.

На рис. 1 показаны мнимые и действительные участки дисперсионных кривых. В области чисто мнимых значений точки 1, 2 соответствуют точкам выхода комплексных участков ветвей на мнимую плоскость значений  $\xi$ .

В отличие от дисперсионного спектра для слоя с закрытыми порами, в данном случае с нулевой частоты начинается только одна вещественная ветвь. Для этой ветви можно существенно упростить дисперсионное уравнение. В области малых частот в окрестности начала координат уравнение (17) значительно упрощается за счет малости  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ . При этом с точностью до  $\xi^3$  получаем соотношение

$$\xi = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \Omega.$$

Это дисперсионное уравнение совпадает с уравнением для продольных волн в тонких пластинах для идеально упругой среды [11].

В области высоких частот для первой вещественной ветви дисперсионное уравнение также упрощается за счет того, что это единственная ветвь, которая попадает в зону, где  $\xi > \Omega$  и  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  становятся чисто мнимыми. При стремлении  $\xi \rightarrow \infty$  вдоль первой ветви  $|\alpha_0| \rightarrow \infty$ ,  $|\alpha_1| \rightarrow \infty$ ,  $|\alpha_2| \rightarrow \infty$  и уравнение (17) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \xi^2 \alpha_2 \left( (\alpha_0 - \alpha_1) \frac{k_2^2}{2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\alpha_0 k_1^2 - \alpha_1 k_0^2) \right) + \\ + \beta^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Разделив это уравнение на  $\xi^6$  и введя обозначения  $c_0 = \omega/k_0$ ,  $c_1 = \omega/k_1$ ,  $c_2 = \omega/k_2$  скоростей медленной, быстрой продольной и поперечной волн в безграничной среде соответственно, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_2 \left( (\gamma_0 - \gamma_1) \frac{c^2}{2c_2^2} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( \frac{c^2}{c_1^2} \gamma_0 - \frac{c^2}{c_0^2} \gamma_1 \right) \right) + \\ + \left( \frac{c^2}{2c_2^2} - 1 \right)^2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( \frac{c^2}{c_1^2} - \frac{c^2}{c_0^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\gamma_j = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_j^2}}, \quad j = 0, 1, 2.$$

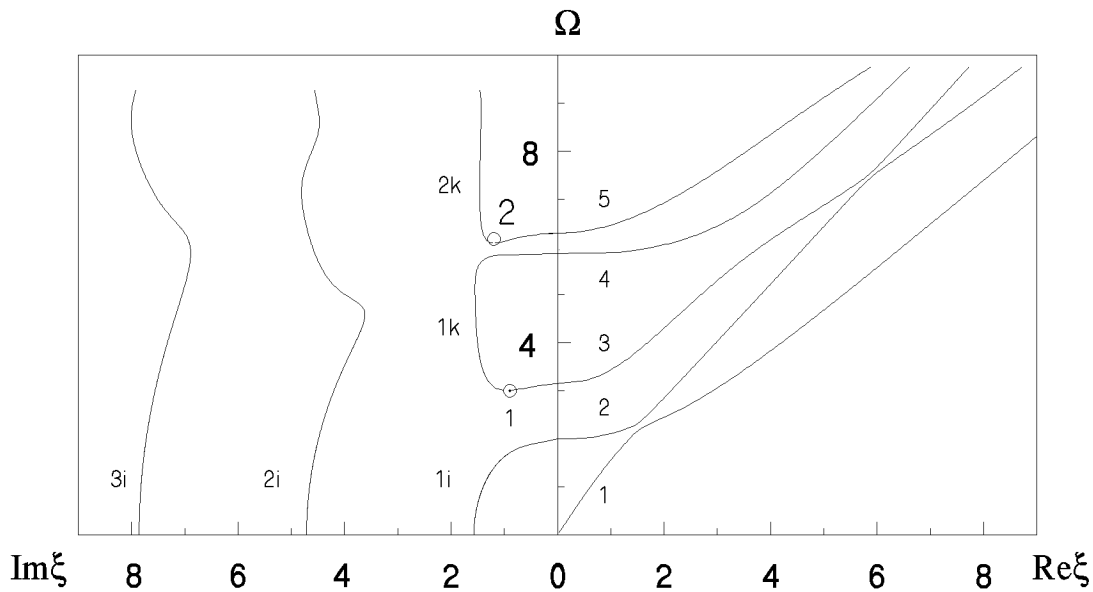


Рис. 1. Мнимые и действительные участки дисперсионных кривых

В такой форме при  $c_0 \rightarrow \infty$  (т.е. при отсутствии медленной продольной волны), с учетом связи между  $c_1, c_2$  в идеально упругой среде, уравнение (32) совпадает с уравнением для скорости волны Рэлея [11].

Следовательно, если диссипация в пористо-упругой среде не учитывается, то первая нормальная мода становится бездисперсионной в высокочастотном пределе. Скорость распространения этой волны зависит от коэффициента Пуассона и скоростей трех волн в безграничной пористо-упругой среде ( $c_j, j = 0, 1, 2$ ). Для заданных параметров среды  $c_0 = 200.51$  м/с,  $c_1 = 2107.6$  м/с,  $c_2 = 161.58$  м/с,  $c = 149.04$  м/с. В идеально упругой среде с параметрами, соответствующими пористой среде ( $\mu = \mu_{пор} = 5 \cdot 10^7$  Па,  $\rho = \rho_{пор} = (1-m)\rho_s + m\rho_f = 2155$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ), скорость волны Рэлея, вычисленная по аппроксимации

$$c_r = c_2 \frac{0.879 + 1.12\nu}{1 + \nu},$$

составляет  $c_r = 142.4$  м/с. Фазовая скорость первой нормальной волны в пористо-упругом слое со свободной поверхностью при открытых порах превышает скорость поверхностной волны Рэлея в идеально упругой среде с параметрами, соответствующими приведенным характеристикам пористой среды. В работе [6] также отмечено, что “скорость волны Рэлея в однородной упругой среде несколько ниже, чем волны в пористо-упругой насыщенной жидкостью”.

Анализ выражений для смещений первой распространяющейся моды в высокочастотном пределе показывает, что это волна с убывающей от поверхности амплитудой. Для  $0 \leq z \leq 1$  выражения для смещений имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x &= -i\xi \left( \alpha_0 \eta_1 e^{\alpha_0(z-1)} - \alpha_1 \eta_0 e^{\alpha_1(z-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2) \left( \xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) \frac{e^{\alpha_2(z-1)}}{\xi^2} \right), \\ u_z &= -i \left( \alpha_0 \eta_1 e^{\alpha_0(z-1)} - \alpha_1 \eta_0 e^{\alpha_1(z-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{1-2\nu} (k_1^2 - k_0^2) \left( \xi^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) \frac{e^{\alpha_2(z-1)}}{\alpha_2} \right), \\ \eta_j &= k_2^2 - \frac{1-\nu}{1-2\nu} k_j^2, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Для  $-1 \leq z \leq 0$  в выражениях для смещений следует заменить показатель экспоненты  $\alpha_j(z-1)$  на  $-\alpha_j(z+1)$ . При этом выражение для  $u_z$  меняет знак.

Рассмотрим особенности поведения чисто мнимых участков ветвей дисперсионного спектра. Из рис. 1 видно, что существует ветвь, начинающаяся с  $\xi = i\pi/2$ , которая вырождается в вещественную на частоте запертия  $\Omega = k_1^{(0)}$ , эта ветвь обозначена 1i.

Как и для идеально упругой полосы со свободными границами, для пористо-упругого слоя с закрытыми порами частотный интервал между час-

татами запирання різних семейств (в даному випадку  $k_1^{(2)}$ ,  $k_2^{(0)}$ ) являється основою для петлі в області чисто мнимих значень  $\xi$  (см. рис. 1, крива 1k).

Аналізуючи поведінку комплексних ветвей другого типу (уравнение (30)), відзначимо, що перші три корні виходять на площину мнимих значень  $\xi$ . Якщо в області чисто мнимих значень  $\xi$  утворюється петля між частотами запирання різних типів, то вони входять в точку відносительного мінімуму петлі. Якщо віть в області чисто мнимих величин постійної розповсюдження уходящая і не починається з  $\xi = i(2n-1)\pi/2$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$ , то комплексні корні другого типу входять і виходять з точок відносительного екстремума цієї ветви.

Відзначимо, що в розглянутому частотному діапазоні (до 7 розповсюджуються мод) при даних параметрах середовища комплексних ділянок ветвей, що з'єднують ветви, що починаються з  $\xi = i(2n-1)\pi/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  і мнимі ділянки ветви, що починаються з частот запирання виявлено не було. Це суттєво відрізняє дисперсійний спектр для даного випадку від дисперсійного спектра для шару з закритими порами. Зміна параметрів середовища дозволяє суттєво перебудувати дисперсійний спектр. На рис. 2 представлений спектр для чисто мнимих значень  $\xi$  при різних значеннях коефіцієнта Пуассона (а відповідає  $\nu = 0.1$ , б -  $\nu = 0.2$ , в -  $\nu = 0.4$ ). Для малих величин  $\nu$  форма ветви, що починається з  $\xi = i\pi/2$  (позначена 1i), практично збігається з першою мнимією ветвою для жидкого шару. З ростом коефіцієнта Пуассона ця віть трансформується з чверть кола в чверть еліпса з більшою піввіссю, що лежить на осі  $0\Omega$ . Для  $\nu = 0.45$  відношення осей еліпса становить 2.19. Поведінку ветви 2i, що починається з  $\xi = 3i\pi/2$ , змінюється ще суттєвіше з ростом  $\nu$ . Для малих значень коефіцієнта Пуассона поведінку цієї ветви подібно 1i аж до частоти трохи нижче  $k_2^{(0)}$ . Однак дана віть не вироджується в дійсний на частоті запирання  $k_2^{(0)}$ , а має мінімум нижче  $k_2^{(0)}$ . З ростом  $\nu$  цей мінімум все далі відходить від осі  $0\Omega$  і форма петлі сильно змінюється.

Трансформація мимієї петлі між  $k_1^{(2)}$  і  $k_2^{(0)}$  з ростом коефіцієнта Пуассона подібно ідеальному пружному шару [11]. З збільшенням  $\nu$  петля між  $k_1^{(2)}$  і  $k_2^{(0)}$  збільшується в розмірах і для  $\nu \geq 0.4$  стає уходящою.

При зміні пористості розглянутої середовища спостерігаються ще більш значимі пере-

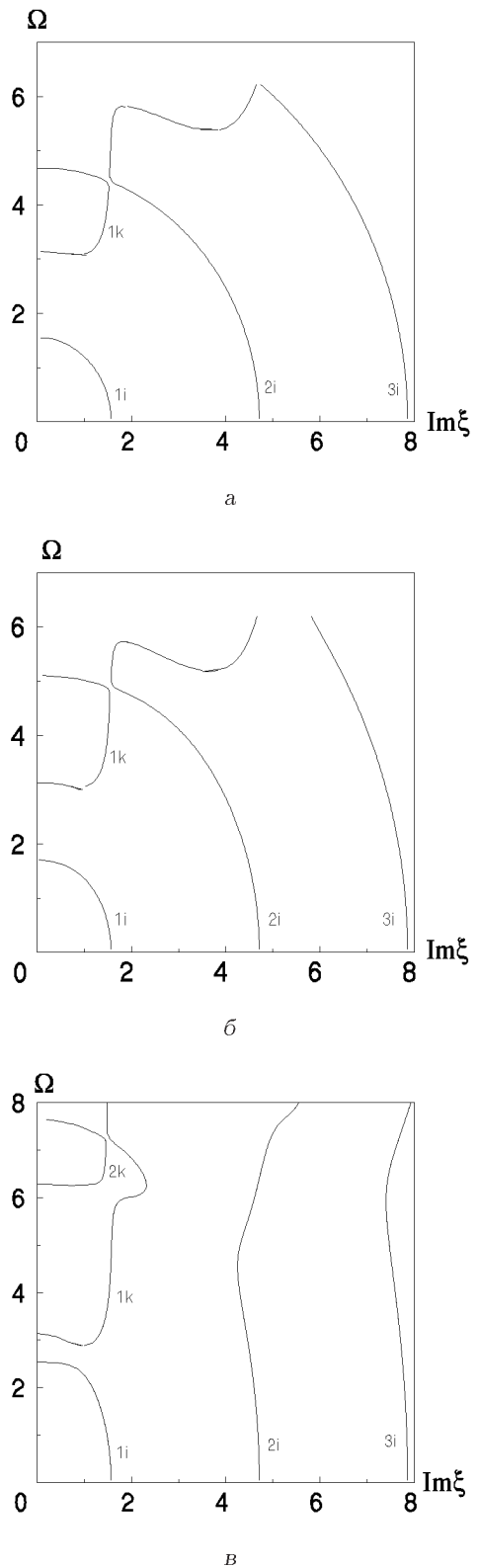


Рис. 2. Спектри для чисто мнимих значень  $\xi$  при різних значеннях коефіцієнта Пуассона  $\nu$ :

а -  $\nu = 0.1$ , б -  $\nu = 0.2$ , в -  $\nu = 0.4$

стройка спектра, однако в данной работе на особенностях поведения дисперсионных ветвей для различных значения пористости останавливаться не будем. Отметим только, что для пористости  $m \leq 0.1$  и для  $m \geq 0.6$  первый комплексный корень второго типа (уравнение (30)) вырождается в вещественный и в пористо-упругом слое существует “обратная” волна.

## ВЫВОДЫ

Дисперсионный спектр для пористо-упругого слоя со свободными поверхностями, даже без учета диссипативных эффектов, значительно сложнее, чем для упругого, за счет существования трех типов волн в пористой среде. Однако наблюдается и много общих свойств. Это конечное число вещественных и бесконечное число комплексных корней дисперсионного уравнения для конечной частоты; наличие частот запираания различных семейств; возможность перестройки спектра за счет изменения параметров среды.

Отличительной особенностью дисперсионного спектра пористо-упругого слоя, независимо от того, открыты или закрыты поры, является существование бесконечного числа чисто мнимых ветвей для конкретной частоты. В упругом слое существует конечное число мнимых ветвей.

Следует отметить значительные различия дисперсионного спектра пористо-упругого слоя с открытыми и закрытыми порами. Для случая открытых пор только одна вещественная ветвь проходит через начало координат  $\xi = 0$ ,  $\Omega = 0$ , для случая закрытых пор – две. Эта ветвь в низкочастотном пределе описывает поведение продольных волн в тонкой упругой пластине, а в высокочастотном пределе – поверхностную волну. Для открытых пор существует три набора частот запираания, соответствующих трем типам волн в безграничной пористой, насыщенной жидкостью среде. Для закрытых пор таких наборов только два. При этом частоты запираания, связанные с продольными волнами, зависят от фазовой скорости как быстрой, так и медленной продольных волн в бесконечной среде. Взаимовлияние ветвей, начинающихся с нулевой частоты и соответствующих

чисто мнимым (уравнение (29)) и комплексным корням (30) дисперсионного уравнения для случая открытых пор меньше, чем для закрытых.

В целом дисперсионные спектры пористо-упругого слоя со свободными поверхностями для случая открытых и закрытых пор существенно отличаются. Эти различия необходимо учитывать при экспериментальном определении механических характеристик пористо-упругих сред, которое основано на измерении фазовых скоростей нормальных волн в слое.

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer.– 1956.– 28, N 2.– P. 168–191.
2. Био М. А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей.– 1963.– 6, N 82.– С. 103–134.
3. Био М. А. Обобщенная теория распространения акустических волн в диссипативных пористых средах // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей.– 1963.– 6, N 82.– С. 135–155.
4. Plona T. J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // Appl. Phys. Let.– 1980.– 36.– P. 259–261.
5. Wu K., Xue Q., Adler L. Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary // J. Acoust. Soc. Amer.– 1990.– 87, N 6.– P. 2349–2358.
6. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания волны в слоистых средах.– К.: Наук. думка, 1990.– 222 с.
7. Sun F., Banks-Lee, Peney H Wave propagation in anisotropic periodically layered fluid-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– 93, N 3.– P. 1277–1285.
8. Городецкая Н. С. Симметричные колебания пористо-упругой полосы со свободными поверхностями для случая закрытых пор // Акуст. вісн.– 1998.– 1, N 1.– С. 17–24.
9. Albert G. D. A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials // J. Appl. Phys.– 1993.– 73, N 1.– P. 28–36.
10. Столл Р. Д. Акустические волны в водонасыщенных осадках // Акустика морских осадков.– М., 1977.– С. 28–46.
11. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
12. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.– М.: Мир, 1975.– 559 с.