

ПРИНЦИП ОТРАЖЕНИЯ В ПЛОСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

А. М. ГОМИЛКО, В. Т. ГРИНЧЕНКО, Е. В. ЛОБОВА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.05.98

В данной работе рассмотрены возможности использования принципа отражения при построении решений внутренних и внешних граничных задач для уравнения Гельмгольца в плоских областях, границы которых содержат прямолинейные отрезки. Основная идея подхода заключается в том, чтобы пользуясь формулой отражения для решения уравнения Гельмгольца через прямолинейные отрезки границы (при однородных граничных условиях), продолжить искомое решение в такую каноническую область как круг. В этом случае решение граничной задачи выражается через ряды по частным решениям уравнения Гельмгольца в полярных координатах и для определения неизвестных коэффициентов этих рядов возможно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. При этом замыкающие уравнения на участках окружности, не являющихся физическими границами исходной области, формулируются исходя из способа отражения искомого решения. Рассмотрены различные примеры граничных задач для уравнения Гельмгольца для прямолинейно-круговой дугочки (внутренняя и внешняя задачи). Показано каким образом возможно учесть локальные особенности волнового поля, связанные с угловыми точками рассматриваемой области и смешанным характером граничных условий. Для одной из задач проведены численные расчеты, свидетельствующие об эффективности предложенного подхода.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ многих акустических ситуаций возможно осуществить в рамках модели, приводящей к решению граничных задач для уравнения Гельмгольца. При изучении различных проблем, связанных с излучением и дифракцией акустических волн, широкое и эффективное применение находит метод частичных областей [1, 2]. Основные результаты, достигнутые с помощью этого метода, относятся к случаям, когда в каждой из частичных областей удается построить общее, в определенном смысле, решение уравнения Гельмгольца. Именно в рамках метода частичных областей наиболее последовательно, по сравнению с другими методами (методами конечных элементов, граничных интегральных уравнений и др.), проводится использование семейств частных решений волновых уравнений в канонических координатных системах для построения аналитических решений в неканонических областях.

Несмотря на богатую историю развития метода частичных областей, в последнее время открываются все новые возможности по расширению области его применимости, связанные с усложнением рассматриваемой геометрии (см., например, [3–5]). Целью данной работы является изложение нового подхода, позволяющего эффективно использовать общие идеи метода частичных областей в комбинации с принципом отражения через прямолинейные отрезки для решений граничных задач для уравнения Гельмгольца.

Следует отметить, что вопросы продолжения решений эллиптических уравнений и, в частнос-

ти, волновых полей, находят широкое применение при исследовании различных задач математической физики. Здесь можно отметить классические результаты Г. Шварца, А. Пуанкаре, Ф. Клейна, относящиеся к исследованиям разложений функции Грина граничных задач по фундаментальным решениям. Метод разветвленных решений А. Зоммерфельда нашел применение в решении принципиальной для теории дифракции задачи о рассеянии звука на клине (см. [6], глава 20, [7], глава 4, §1). Хорошо известно использование принципа отражения в задачах электростатики, в частности в задаче об электростатическом равновесии на двух заряженных сферах ([6], глава 15). Обобщению классических результатов на более общие граничные задачи и исследованию сходимости соответствующих альтернирующих процессов посвящена монография [8]. Метод отражения находит свое применение также в исследованиях обратных задач теории рассеяния акустических волн [9, 10].

Обзор современного состояния задачи продолжения волновых полей, включая прикладные аспекты, относящиеся к внешним задачам дифракции, дан в статье [10] (см. также [11]).

В настоящей статье приводятся некоторые примеры возможного использования принципа отражения для решений уравнения Гельмгольца при построении решения соответствующей граничной задачи акустики, вплоть до учета локальных особенностей волнового поля. При этом речь идет о формировании эффективного алгоритма для решения таких граничных задач, численное решение которых не удается получить исходя из непо-

средственного использования метода частных областей, несмотря на то, что граница области состоит из объединения канонических координатных линий.

Использование принципа отражения приводит к тому, что исходная граничная задача сводится к рассмотрению граничной задачи для уравнения Гельмгольца в круге. Здесь возникает вопрос о граничных условиях на частях получающейся окружности, не являющихся физическими границами исходной области. В идейном плане основным моментом предлагаемого подхода является формулировка недостающих граничных условий, исходя из способа отражения исходного решения, т.е. граничные условия формулируются в терминах значений неизвестной функции на дугах, лежащих внутри исходной области. Вместе с представлением искомого решения в виде рядов по частным решениям уравнения Гельмгольца в круге это позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов этих рядов.

На примере конкретной внутренней граничной задачи для прямолинейно-круговой луночки проведены численные расчеты по схеме предложенного алгоритма и показана его эффективность.

1. ВНУТРЕННЯЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО-КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

Пусть (x, y) – прямоугольная, а (r, θ) – полярная системы координат на плоскости: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, при этом далее для удобства в различных ситуациях будем считать, что угол θ изменяется в пределах $[0, 2\pi)$ либо $|\theta| \leq \pi$. Для заданных чисел $a > 0$ и $b \in (0, a)$ определим область Ω_1 , которая является пересечением круга $r < a$ и полуплоскости $x > b$ и область Ω_2 , являющуюся пересечением круга $r < a$ с полуплоскостью $x < b$ (рис. 1). Обозначим через γ_0 отрезок $x = a$, $|y| < d = \sqrt{a^2 - b^2}$ и пусть дуги

$$\begin{aligned} \gamma_1 : r &= a, \quad |\theta| < \theta_0, \\ \gamma_2 : r &= a, \quad |\theta| \in (\theta_0, \pi), \\ \cos \theta_0 &= b/a. \end{aligned}$$

Рассмотрим в Ω_j (при фиксированном $j = 1$ или $j = 2$) симметричную относительно переменной y граничную задачу

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_j, \quad (1)$$

$$u(b, y) = 0, \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (2)$$

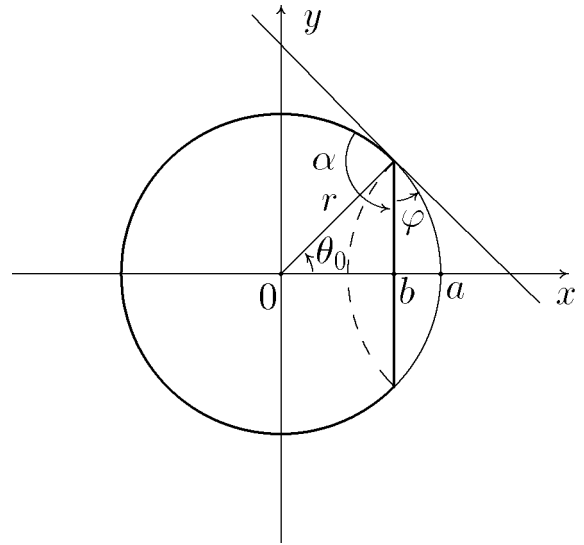


Рис. 1. Схема прямолинейно-круговой луночки

$$(u|_{\gamma_j})(\theta) = f(\theta). \quad (3)$$

Здесь в случае области Ω_1 функция $f(\theta)$ задана на интервале $|\theta| < \theta_0$, $f(\theta) = f(-\theta)$, а при $j = 2$ считаем, что $f(\theta)$ – заданная, достаточно гладкая функция на $\theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$, причем $f(\pi - \theta) = f(\pi + \theta)$, $\theta \in (0, \pi - \theta_0)$.

Покажем, что построение решения задачи (1)–(3) для разных областей Ω_1 и Ω_2 отличается принципиальным образом.

Пусть индекс $j = 1$, то есть когда область $\Omega = \Omega_1$ находится в полукруге $r < a$, $|\theta| \leq \pi/2$. В этом случае построение решения граничной задачи (1)–(3) хорошо известно. А именно, воспользуемся тем, что в полярных координатах уравнение Гельмгольца имеет частные решения вида

$$U(r, \theta) = \{AJ_\alpha(kr) + BN_\alpha(kr)\} \cos(\alpha\theta) \quad (4)$$

при произвольном параметре $\alpha \geq 0$ и произвольных постоянных A, B . Здесь J_α, N_α – функции Бесселя первого рода и Неймана соответственно. Таким образом, определяя значения параметра α , можно приспособить частные решения (4) к построению решения граничных задач для уравнения Гельмгольца в различных областях, в частности, для криволинейного прямоугольника $r_1 < r < r_2$, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Представим область Ω_1 как пересечение сектора $S_0 : 0 < r < a$, $|\theta| < \theta_0$ и полуполосы $P : x > b$, $|y| < d$. Это возможно сделать в силу того, что Ω_1 находится внутри полукруга. При построении решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца

в P подходящими частными решениями являются функции

$$U(x, y) = C e^{-\sqrt{\beta^2 - k^2} x} \cos(\beta y) \quad (5)$$

с параметром $\beta > 0$ и постоянной C .

Таким образом, решение задачи (1) – (3) в случае области Ω_1 ищем в виде

$$u = u_1 + u_2, \quad (6)$$

где

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\alpha_n}(kr) \cos(\alpha_n \theta),$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\sqrt{\beta_k^2 - k^2} x} \cos(\beta_k y).$$

При этом можно взять последовательности

$$\alpha_k = \frac{\pi}{\theta_0}(k - 1/2), \quad \beta_k = \frac{\pi}{d}(k - 1/2), \quad k = 1, 2, \dots,$$

так что система функций $\{\cos(\alpha_k \theta)\}$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2[0, \theta_0]$, а система $\{\cos(\beta_k y)\}$ является ортогональным базисом в $L_2[0, d]$.

Тогда выполнение граничных условий (2), (3) приводит к соотношениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\alpha_n}(ka) \cos(\alpha_n \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\sqrt{\beta_k^2 - k^2} a \cos \theta} \cos(\beta_k a \sin \theta) = f(\theta), \quad (7)$$

$$\theta \in (0, \theta_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\alpha_n}(k \sqrt{a^2 + y^2}) \cos(\alpha_n \arctan(y/b)) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\sqrt{\beta_k^2 - k^2} b} \cos(\beta_k y) = 0, \quad (8)$$

$$y \in (0, y_0).$$

Используя в уравнениях (7), (8) ортогональность систем функций $\{\cos(\alpha_k \theta)\}$ и $\{\cos(\beta_k y)\}$ соответственно, нетрудно получить бесконечную систему

линейных алгебраических уравнений

$$A_n \theta_0 J_{\alpha_n}(ka) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^{\theta_0} e^{-\sqrt{\beta_k^2 - k^2} a \cos \theta} \times$$

$$\times \cos(\beta_k a \sin \theta) \cos(\alpha_n \theta) d\theta = 2 \int_0^{\theta_0} f(\theta) \cos(\alpha_n \theta) d\theta,$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$B_k d e^{-\sqrt{\beta_k^2 - k^2} b} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^d J_{\alpha_n}(k \sqrt{a^2 + y^2}) \times$$

$$\times \cos(\alpha_n \arctan(y/b)) \cos(\beta_k y) dy = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots$$

При численном решении полученной системы алгебраических уравнений следует провести надлежащую нормировку неизвестных и, по возможности, установить и использовать на основании метода улучшенной редукции асимптотические свойства неизвестных при $n, k \rightarrow \infty$ (см. подробности в [2]).

В случае $j = 2$ область Ω_2 содержит замыкание полукруга $r < a$, $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, что является препятствием для непосредственного использования метода частичных областей, как это было осуществлено для области Ω_1 . Дело в том, что сектор S_0 уже не охватывает область Ω_2 , а полуполоса $|y| < d$, $x < b$ пересекает эту область. Поэтому не представляется возможным воспользоваться решениями типа u_1 , u_2 из (6). Кроме того, поскольку на граничном прямолинейном отрезке задано однородное граничное условие для потенциала, то в соответствии с принципом отражения искомое решение отражается антисимметричным образом в область

$$\Omega_2^* = \{(x, y) : (x - 2b, y) \in \Omega_2\} \quad (9)$$

согласно правилу

$$u(x, y) = -u(x - 2b, y), \quad (x, y) \in \Omega_2^*. \quad (10)$$

При этом замыкание объединений областей Ω_2 и Ω_2^* содержит круг $r \leq a$ и поэтому решение граничной задачи (1) – (3), в частности, продолжается до решения уравнения (1) в этом круге.

Таким образом, функцию u можно искать в виде ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\theta), \quad (11)$$

$$r < a, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

где $J_n(kr)$ – функции Бесселя, а A_n – неизвестные коэффициенты (при этом, предполагается, что $J_n(ka) \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$). Для нахождения коэффициентов A_n из представления (11) мы имеем граничное условие (3) на дуге $\theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0)$ и требуется знать некоторое условие на оставшейся дуге $|\theta| < \theta_0$. Идея состоит в том, что это условие можно взять из соотношения (10) и сформулировать его в терминах тех же неизвестных коэффициентов A_n . Действуя таким образом и используя ортогональность тригонометрических функций в (11), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n . Ниже рассмотрим реализацию этой идеи.

Если точка $(r, \theta) \in \Omega_2^*$, то ее прообразом при отображении (9) будет точка с полярными координатами $(\hat{r}, \hat{\theta})$ такими, что

$$\begin{aligned}\hat{r} \sin \hat{\theta} &= r \sin \theta, \\ \hat{r} \cos \hat{\theta} &= r \cos \theta + 2b.\end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения, получаем,

$$\begin{aligned}\hat{r}(r, \theta) &= \sqrt{r^2 - 4rb \cos \theta + 4b^2}, \\ \hat{\theta}(r, \theta) &= \arcsin \left(\frac{r \sin \theta}{\hat{r}(r, \theta)} \right).\end{aligned}\quad (12)$$

Таким образом, для граничных данных функции u на дуге $r = a$, $\theta \in (0, \theta_0)$, согласно (10), (11), имеем выражение

$$u(a \cos \theta, a \sin \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos(n\theta^*), \quad (13)$$

$$\theta \in (0, \theta_0),$$

где

$$\begin{aligned}r^*(\theta) &= \hat{r}(a, \theta) = a \sqrt{1 + 4 \cos^2 \theta_0 - 4 \cos \theta_0 \cos \theta}, \\ \theta^*(\theta) &= \hat{\theta}(a, \theta) = \arcsin \left(\frac{a \sin \theta}{r^*(\theta)} \right).\end{aligned}$$

Тогда для нахождения неизвестных коэффициентов A_n получаем функциональные уравнения

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) &= f(\theta), \quad \theta \in (\theta_0, \pi), \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) &= - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos(n\theta^*), \\ \theta &\in (0, \theta_0).\end{aligned}\quad (14)$$

Отсюда, используя соотношения ортогональности

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \delta_{mn} [1 + \delta_{m0}], \\ m, n &= 0, 1, \dots,\end{aligned}$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}(1 + \delta_{m0}) \pi A_m &= 2 \int_{\theta_0}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta - \\ - 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\theta_0} \frac{J_n(kr^*(\theta))}{J_n(ka)} \cos(n\theta^*(\theta)) \times \\ \times \cos(m\theta) d\theta \quad m &= 0, 1, \dots\end{aligned}\quad (15)$$

Итак, построение решения граничной задачи (1) – (3) в случае области Ω_2 сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных A_n :

$$A_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} A_n = f_m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

в которой коэффициенты и правые части имеют вид

$$\begin{aligned}C_{mn} &= \frac{2}{(1 + \delta_{m0}) \pi} \int_0^{\theta_0} \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos(n\theta^*) \cos(m\theta) d\theta, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, \\ f_m &= \frac{2}{(1 + \delta_{m0}) \pi} \int_{\theta_0}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta, \\ m &= 0, 1, \dots\end{aligned}$$

При численной реализации для нахождения ограниченного решения бесконечной системы линейных уравнений (16) можно воспользоваться методом редукции. Более эффективное решение этой системы основывается на методе улучшенной редукции, когда в рассмотрение вовлекается априорное знание асимптотических свойств неизвестной последовательности A_n при $n \rightarrow \infty$. В общем случае эти асимптотические свойства определяются такими факторами как наличие угловых точек у рассматриваемой области, смешанным характером граничных условий (если таковые имеются), а также свойствами гладкости граничных данных.

2. АСИМПТОТИКА НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ A_n

Выясним характер поведения неизвестных коэффициентов $A_n \rightarrow \infty$ системы (16), который в

рассматриваемой ситуации обусловлен наличием угловой точки $r = a$, $\theta = \theta_0$ и возможным разрывом в граничных данных в этой точке. Этот вопрос можно изучить на основании анализа решений уравнения Лапласа.

Прежде всего отметим, что модельная задача для уравнения Лапласа в углу $\theta \in (0, \alpha)$ (рис. 2):

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \quad \theta \in (0, \alpha), \quad r > 0, \\ v(0, r) &= 0, \quad v(\alpha, r) = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

с условием

$$\int_0^\delta \int_0^\alpha |v(r, \theta)|^2 r d\theta dr < \infty$$

для некоторого конечного $\delta > 0$ (условия на бесконечности не накладываются) допускает бесконечное число решений [2]:

$$v(r, \theta) = \frac{\theta}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho^{\pi k / \alpha} \sin(\pi k \theta / \alpha) \quad (18)$$

с произвольными коэффициентами c_k (требуется лишь сходимость ряда (18)). Оставляя в этом решении первые два слагаемые, имеем

$$v(r, \theta) = \frac{\theta}{\alpha} + c_1 \rho^{\pi / \alpha} \sin(\pi \theta / \alpha). \quad (19)$$

С помощью функции v из (19) можно выделить главные особенности решения u граничной задачи (1)–(3) и таким образом выяснить характер поведения неизвестных A_n из представления решения u в виде (11).

Угол α пересечения окружности $r = a$ и прямой $x = b$, образующих границу рассматриваемой области Ω_2 , будет (см. рис. 1)

$$\alpha = \pi - \theta_0. \quad (20)$$

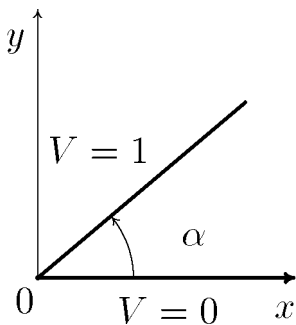


Рис. 2. Окрестность угловой точки

При этом прямые $x = b$ и $\theta = \theta_0$ пересекаются под углом

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0.$$

Значит для искомого решения, согласно (19) и формуле отражения (10), в случае $f(\theta_0) \neq 0$ (т.е. когда граничные условия для u в (2), (3) терпят разрыв) имеем

$$c_0 \equiv \lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta_0 \\ \theta < \theta_0}} u(a, \theta) = -\frac{\theta_0}{\pi - \theta_0} f(\theta_0). \quad (21)$$

Таким образом, с учетом (21) и граничного условия (3) получаем, что функция u допускает представление

$$u = v + u_0,$$

где v , u_0 – решения уравнения (1) в круге $r < a$, причем u_0 – непрерывная в замкнутом круге $r \leq a$ функция, а для v выполняются граничные условия

$$v|_{r=a} = c_0, \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad v|_{r=a} = f(\theta_0), \quad \theta \in (\theta_0, \pi).$$

Такая граничная задача для v допускает явное решение:

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\theta), \quad r < a, \quad \theta \in [0, 2\pi), \\ \pi B_0 &= c_0 \theta_0 + f(\theta_0)(\pi - \theta_0), \\ \pi B_n &= 2(c_0 - f(\theta_0)) \frac{\sin(n\theta_0)}{n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Итак, коэффициенты A_n можно представить в виде

$$A_n = B_n + A_n^0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (23)$$

причем, в соответствии со вторым слагаемым в (19) и соотношением (20), поведение коэффициентов A_n^0 на бесконечности определяется условием

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \cos(n\theta) &\approx -c_1 (\theta_0 - \theta)^\beta, \quad \theta \rightarrow \theta_0, \\ \beta &= \pi / (\pi - \theta_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда и из [13] получаем при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \pi A_n^0 &\approx -c_1 \int_0^{\theta_0} (\theta_0 - \theta)^\beta \cos(n\theta) d\theta \approx \\ &\approx -\frac{c_1}{(2\theta_0)^\beta} \int_0^{\theta_0} (\theta_0^2 - \theta^2)^\beta \cos n\theta d\theta = \\ &= -\frac{c_1}{(2\theta_0)^\beta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(\beta + 1) \left(\frac{2\theta_0}{n}\right)^{\beta+1/2} J_{\beta+1/2}(n\theta_0), \end{aligned}$$

то есть

$$\pi A_n^0 \approx c \frac{1}{n^{\beta+1/2}} J_{\beta+1/2}(n\theta_0), \quad n \rightarrow \infty, \quad (25)$$

$$\beta = \pi/(\pi - \theta_0) = 1 + \theta_0/(\pi - \theta_0).$$

При этом константа c (как и c_1 в (24)) является неопределенной и должна находиться численно в процессе использования метода улучшенной редукции при решении системы алгебраических уравнений (16).

Проведенные рассмотрения применимы и в случае, когда на прямолинейном участке границы области Ω_2 задано неоднородное граничное условие

$$u(b, y) = g(y), \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2},$$

так как с помощью частного решения всегда можно свести его к однородному условию (3), с изменением граничной функции на дуге γ_2 (для этого можно использовать, например, ряд из частных решений вида (5) с заменой показателя экспоненты $\sqrt{\beta^2 - k^2}x$ на $-\sqrt{\beta^2 - k^2}x$).

Метод отражений можно применять и в случае, когда вместо условия (3) рассматривается условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{x=b} = g(y), \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (26)$$

В данной ситуации следует свести это условие к однородному (если $g(y) \not\equiv 0$), а затем воспользоваться принципом отражения в форме

$$u(x, y) = u(x - 2b, y), \quad (x, y) \in \Omega_2^*. \quad (27)$$

Отметим, что граничные условия в задаче (1), (2), (26) носят смешанный характер. После использования отражения (27) автоматически приходим к задаче с несмешанными граничными условиями на окружности $r = a$. Другой пример использования принципа отражения через отрезок в смешанной граничной задаче для прямолинейно-круговой луночки рассматривается в следующем разделе.

3. СМЕШАННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО-КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

В области Ω_2 рассматривается уравнение Гельмгольца (1) со смешанными граничными условиями

$$u(b, y) = 0, \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = g(\theta), \quad \theta \in (\theta_0, \pi). \quad (29)$$

При этом считаем, что задача симметрична по переменной y . Если непосредственно использовать отражение (10) и соответствующее граничное условие (13), то полученная на основании этого граничная задача в круге $r < a$ останется смешанной. Во избежание этого вместо замыкающего граничного условия (13) следует рассмотреть соответствующее условие для нормальной производной на дуге $|\theta| < \theta_0$. А именно, используя равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{J_n(k\hat{r}) \cos(n\hat{\theta})\} &= \\ &= k J'_n(k\hat{r}) \cos(n\hat{\theta}) \frac{(r - 2b \cos \theta)}{\hat{r}} - \\ &\quad - J_n(k\hat{r}) \sin(n\hat{\theta}) \frac{2b \sin \theta}{\hat{r}^2}, \end{aligned}$$

получаем для решения задачи (1), (28), (29) представление

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{J_n(kr)}{k J'_n(ka)} \cos(n\theta), \quad r < a, \quad |\theta| \leq \pi,$$

для которого справедливы следующие функциональные соотношения (ср. с (14)) при $\theta \in (\theta_0, \pi)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\theta) = g(\theta),$$

и при $\theta \in (0, \theta_0)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [kr^* J'_n(kr^*) \cos(n\theta^*) \times \right. \\ &\quad \times (a - 2b \cos \theta) - J_n(kr^*) \sin(n\theta^*) \times \\ &\quad \left. \times 2b \sin \theta] \right\} / (kr^{*2} J_n(ka)). \end{aligned}$$

Таким образом, далее можем действовать как и в случае соотношений (14) и получить соответствующую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов B_k .

4. ВНЕШНЯЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО-КРУГОВОЙ ЛУНОЧКИ

Рассматривается внешняя граничная задача для уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (x, y) \in \Omega_j^e, \quad (30)$$

где $\Omega_j^e = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_j$ – внешность области Ω_j из раздела 1, индекс $j = 1, 2$. При этом граничные условия

имеют вид (2), (3) и дополняются соответствующими условиями излучения на бесконечности. В предположении, что временная гармоническая зависимость звукового поля определяется множителем $e^{-i\omega t}$, эти условия имеют вид [6]:

$$r^{1/2}\{\partial U/\partial r - ikU\} = o(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

В случае внешней задачи области Ω_1 и Ω_2 , в смысле построения решений граничных задач, меняются местами. А именно, область Ω_2^e можно представить в виде объединения круга $r > a$ и области Ω_1 . При этом вне круга искомую функцию U представляем в виде ряда

$$U \equiv u^e = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(1)}(kr) \cos(m\theta), \quad r > a, \quad (31)$$

а в области Ω_1 можно использовать представление $U \equiv u$ в виде (6) (см. раздел 1). При этом, наряду с граничными условиями (2), (3) для получения бесконечной системы линейных уравнений относительно коэффициентов A_n, B_k, C_m требуется соблюдение условий сопряжения на дуге γ_2 :

$$u = u^e, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u^e}{\partial r}, \quad r = a, \quad |\theta| < \theta_0.$$

Таким образом, имеем функциональные уравнения

$$u(b, y) = 0, \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (32)$$

$$u^e = \begin{cases} u(\theta), & |\theta| < \theta_0, \\ f(\theta), & |\theta| \in (\theta_0, \pi) \end{cases}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u^e}{\partial r}, \quad r = a, \quad |\theta| < \theta_0. \quad (34)$$

При этом, для алгебраизации этой системы уравнений используется ортогональность соответствующей тригонометрической системы функций, входящей в определение левых частей уравнений из (32) – (34).

Рассмотрим случай области $\Omega_1^e = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1$. Вне окружности $r = a$ функцию u представляем в виде (31). Тогда для функции u_0 , определенной и совпадающей с U в области Ω_2 , имеем граничную задачу

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0, \quad (\Omega_2), \quad (35)$$

$$u_0|_{\gamma_0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial r} = \frac{\partial u^e}{\partial r}, \quad r = a, \quad |\theta| \in (\theta_0, \pi).$$

Замыкающие уравнения формулируются следующим образом:

$$u^e|_{r=a} = \begin{cases} f(\theta), & |\theta| < \theta_0, \\ u_0(\theta), & |\theta| \in (\theta_0, \pi) \end{cases}. \quad (36)$$

Исходя из (35) и (36), можем воспользоваться схемой рассуждений из раздела 2 и получить алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов в представлениях (6), (31).

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчеты проводились для граничной задачи (1) – (3) в области Ω_2 . В качестве граничной функции из условия (3) бралась единичная функция: $f(\theta) \equiv 1, \theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta)$. Таким образом, правые части из системы (16) имеют вид

$$f_0 = (\pi - \theta_0)/\pi, \quad f_m = \frac{\sin(m\theta_0)}{\pi m}, \quad m \geq 1.$$

При численных расчетах для неизвестных коэффициентов использовалось представление (см. (23))

$$A_n = B_n + A_n^0, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$A_n = B_n, \quad n = N + 1, N + 2, \dots, \hat{N},$$

где последовательность B_n определена согласно (22), а коэффициенты $A_n^0, n = 0, 1, \dots, N$ являются неизвестными и находятся из решения системы (16).

Данные о точности выполнения граничных условий (2), (3) в отдельных точках

$$u(b, y) = 0, \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2}, \\ (u|_{r=a})(\theta) = 1, \quad \theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta)$$

для волновых чисел $k = 1$ и $k = 2$, при количестве неизвестных $N = 10$ и учете асимптотики с $\hat{N} = 30$ приведены в табл. 1 и 2. Видно, что за исключением окрестности угловой точки $x = 0.7, y = 0.741$ (в полярных координатах это точка $r = 1, \theta_0 = 0.7454$) граничные условия выполняются с точностью до одного процента (по сравнению с единичной функцией, заданной на дуге $\theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta)$), причем на прямолинейном участке получаем фактически тождественное совпадение с заданным однородным условием, несмотря на то, что его выполнение было заложено в систему уравнений не прямо, а на основе принципа отражения. Отметим, что в рассматриваемом случае для постоянной c_0 из (21) имеем значение

$$c_0 \approx -0.34.$$

При этом, поскольку при построении решения u мы используем ряд Фурье по угловой переменной, а граничные данные на окружности в соотношениях (14), согласно анализу, приведенному в разделе 2, терпят разрыв (в точке $\theta = \theta_0$),

Табл. 1. $k=1$, $b/a=0.7$, $N=10$, $\hat{N}=30$.
 $u_{\text{пря́м}}$ – значения u на прямоугольном участке,
 $u_{\text{кругл}}$ – значения u на круглом участке

x	y	$u_{\text{пря́м}}$	θ	$u_{\text{кругл}}$
0.7	0.0000	0.00004	0.7954	0.3253
0.7	0.0446	0.00004	1.0300	0.9641
0.7	0.0670	0.00003	1.4523	0.9973
0.7	0.1238	0.00001	1.6870	1.0143
0.7	0.1353	-0.00001	2.0154	0.9849
0.7	0.2183	-0.00002	2.2500	0.9918
0.7	0.3072	0.00005	2.3908	0.9936
0.7	0.4054	0.00026	2.8131	0.9908
0.7	0.5002	0.00042	2.9707	1.0072
0.7	0.7141	0.32533	3.1416	1.0114

Табл. 2. $k=2$, $b/a=0.7$, $N=10$, $\hat{N}=30$.
 $u_{\text{пря́м}}$ – значения u на прямоугольном участке,
 $u_{\text{кругл}}$ – значения u на круглом участке

x	y	$u_{\text{пря́м}}$	θ	$u_{\text{кругл}}$
0.7	0.0000	0.00029	0.7954	0.3033
0.7	0.0446	0.00025	1.0300	0.9715
0.7	0.0670	0.00020	1.4523	1.9998
0.7	0.1238	-0.00003	1.6870	1.0143
0.7	0.1353	-0.00001	2.0154	0.9854
0.7	0.2183	-0.00013	2.2500	0.9922
0.7	0.3072	0.00036	2.3908	0.9929
0.7	0.4054	0.00176	2.8131	0.9912
0.7	0.5002	0.00261	2.9707	1.0073
0.7	0.6088	-0.00224	3.0008	0.9954
0.7	0.7141	0.30333	3.1416	1.0111

то, в соответствии с общей теорией рядов Фурье для функции u , вычисленной непосредственно в угловой точке, следует ожидать величину, равную $(1+c_0)/2 \approx 0.33$. Это согласуется с данными таблиц, где для этой величины получено значение, равное 0.303.

Улучшение качества выполнения граничных условий в окрестности угловой точки за счет увеличения значения \hat{N} с 10 до 60 иллюстрируется данными из табл. 3. Для дальнейшего устранения погрешности в выполнении граничных условий в окрестности угловой точки следует увеличить число вовлекаемых в решение неизвестных A_n^0 , а также воспользоваться при численном решении системы уравнений (16) методом улучшенной редукции на основании асимптотики (25) (с неизвестным коэффициентом c).

Для контроля квадратичного отклонения при-

Табл. 3. $k=2$, $b/a=0.7$, $N=10$, $\hat{N}=60$.
 $u_{\text{пря́м}}$ – значения u на прямоугольном участке,
 $u_{\text{кругл}}$ – значения u на круглом участке

x	y	$u_{\text{пря́м}}$	θ	$u_{\text{кругл}}$
0.7	0.0000	0.00029	0.7954	0.3032
0.7	0.0446	0.00025	0.8892	0.9583
0.7	0.0670	0.00020	1.0300	1.0045
0.7	0.1238	-0.00003	1.4523	1.0046
0.7	0.1353	-0.00003	1.6870	1.0102
0.7	0.2183	-0.00013	2.0154	1.0039
0.7	0.3072	0.00036	2.2500	0.9937
0.7	0.4054	0.00176	2.3908	1.0009
0.7	0.5002	0.00264	2.8131	1.0042
0.7	0.6088	-0.00226	2.9070	1.0000
0.7	0.6595	0.04104	3.0008	0.9960
0.7	0.7141	0.30315	3.1416	1.0060

ближенного решения от точного использовалась интегральная оценка

$$\delta = \frac{\delta_1}{\delta_0},$$

где

$$\delta_1^2 = 2a \int_{\theta_0}^{\pi} |1-u(a, \theta)|^2 d\theta + 2b \int_0^{\theta_0} \left| u\left(\frac{b}{\cos \theta}, \theta\right) \right|^2 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

$$\delta_0^2 = 2a(\pi - \theta_0)$$

(здесь подразумевается, что функция u записана в полярных координатах). В случае отношения $b/a = 0.7$ для $k \in [1, 3]$ было получено, что при $N = 10$, $\hat{N} = 30$ величина δ составляет порядка 0.03–0.04. Дальнейшее увеличение числа неизвестных N , а также числа \hat{N} не приводит к значительному уменьшению δ . Это связано с отмеченной необходимостью вовлечения в рассмотрение асимптотики (25).

Полученные численные данные иллюстрируют достаточную эффективность предложенного подхода к решению граничной задачи для уравнения Гельмгольца в прямолинейно-круговой луночке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к построению решений граничных задач для уравнения Гельмгольца в областях, границы которых состоят из прямолинейных отрезков и дуг окружностей. При этом новизна подхода заключается в том, что он непосредственно ориентирован на те граничные задачи, для которых не удается использовать метод

частичных областей в своем классическом варианте. Кроме того, как показано в статье, эти методы естественным образом дополняют друг друга, в зависимости от геометрических соотношений рассматриваемой области.

Предложенный метод основан на использовании классического принципа отражения решений уравнения Гельмгольца через отрезки таким образом, чтобы продолжить искомый потенциал до решения уравнения Гельмгольца в некотором круге (область продолжения может быть и шире, чем круг). Основная идея практического использования принципа отражения заключается в формулировке замыкающего граничного условия на нефизической части границы получающегося круга, а именно, это условие формулируется в терминах значений искомой функции на дуге, лежащей внутри исходной области. Это позволяет сформировать бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения решения в ряд по частным решениям в круге.

Рассмотренные в статье примеры внутренних и внешних граничных задач для прямолинейно-круговой луночки показывают принципиальную возможность использования принципа отражения для эффективного численного решения граничных задач акустики в плоских областях.

1. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.– М.: Мир, 1974.– 332 с.
2. Гринченко В. Т., Вовк И. В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 286 с.
3. Гринченко В. Т. Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика.– 1996.– Вып. 70.– С. 27–40.
4. Вовк И. В., Гринченко В. Т. О расширении возможностей метода частичных областей применительно к задачам излучения и рассеяния звука // Акуст. ж.– 1989.– **35**, N 1.– С. 29–26.
5. Вовк И. В., Гомилко А. М., Городецкая Н. С. Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах // Акуст. ж.– 1995.– **41**, N 3.– С. 399–404.
6. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.– Л.: ОНТИ, 1937.– 1000 с.
7. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.– М.: Мир, 1964.– 428 с.
8. Шестопап А. Ф. Разложение по фундаментальным решениям эллиптических операторов.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1968.– 208 с.
9. Colton D. L. A reflection principle for solutions to the Helmholtz equation and an application to the inverse scattering problem // Glasgow Math. J.– 1977.– **18**.– P. 125–130.
10. Кюркчан А. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Особенности продолжения волновых полей // Успехи физических наук.– 1996.– **166**, N 12.– С. 1285–1308.
11. Савина Т. В., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. О формуле отражения для уравнения Гельмгольца // Радиотехника и электроника.– 1993.– **38**, N 2.– С. 229–240.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1.– М.: Наука, 1981.– 800 с.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2.– М.: Наука, 1966.– 295 с.