

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ НА ЗАДАЧУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ С ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В. Б. ГАЛАНЕНКО

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев

Получено 18.12.97

Метод поперечных сечений, применяемый для изучения жидких акустических волноводов, распространен на двумерную задачу о волновом движении упругого изотропного слоя, материальные параметры которого, так же как и параметры формы, плавно изменяются в направлении распространения волны. Определен оператор поперечного сечения, заданный на множестве 4-х мерных векторзначных функций, компонентами которых являются горизонтальное и вертикальное смещения, компонента ротора и дивергенция. Получены соотношения ортогональности для собственных функций оператора и выведены уравнения связанных мод. Исследованы собственные числа волновода в виде упругого клина.

ВВЕДЕНИЕ

Слой изотропного материала с упругими модулями Ламэ $\lambda(z, x)$, $\mu(z, x)$ и плотностью $\rho(z, x)$, ограниченный свободными поверхностями $z_1(x)$, $z_2(x)$, может рассматриваться как упругий волновод с плавно изменяющимися параметрами, если в направлении продольной координаты x все указанные величины мало изменяются на расстоянии, равном длине волны. Среди возможных способов решения задачи о двумерном волновом движении в таком волноводе выделим методы, которые приводят к модовому описанию поля: метод двухмасштабных разложений и метод поперечных сечений. Оба они используют указанную выше медленность изменения параметров волновода, но различными (и даже альтернативными) способами. Метод двухмасштабных разложений основан на некоторых предположениях о функции, описывающей распространение волны вдоль координаты x , в то время как поперечная структура волны считается неизвестной и задается в виде асимптотического ряда по малому параметру, характеризующему медленность изменения свойств волновода. В противоположность этому, метод поперечных сечений фиксирует поперечную структуру поля, а функции, описывающие распространение, подлежат определению. При этом поперечная структура поля задается рядом по собственным функциям некоторого оператора. Коэффициенты этого разложения, трактуемые как множители распространения соответствующих волн, должны быть определены из уравнений связанных мод. Как видим, метод поперечных сечений сохраняет структуру поля, возникающую при разделе-

нии переменных (в тех случаях, когда оно возможно) и является непосредственным обобщением этого классического приема [1]. Нулевое приближение теории двухмасштабных разложений приводит к описанию поперечной структуры волны с помощью одной из собственных функций так называемого “сопровождающего волновода”, т.е. такого планарного волновода, параметры которого совпадают с текущими параметрами рассматриваемого слоя. Высшие приближения корректируют вертикальную структуру, не затрагивая множитель распространения. Напротив, высшие приближения метода поперечных сечений не изменяют поперечную структуру волн, но корректируют множители распространения, учитывая взаимную трансформацию волн. В то время как метод двухмасштабных разложений применяется как к жидким акустическим волноводам, так и к упругим (см. например [2, 3]), метод поперечных сечений развит, насколько нам известно, лишь применительно к жидким волноведущим структурам [1, 4–6]. Задача настоящей работы состоит в расширении последнего метода на упругие волноводы. Как известно, двумерное волновое движение распадается на два независимых семейства волн: $P - SV$ и SH волны. Ниже мы остановимся на случае $P - SV$ волн.

1. ОПЕРАТОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Для того, чтобы осуществить указанное обобщение, сформулируем исходные предпосылки метода поперечных сечений. Его применение пред-

полагает, что задан так называемый оператор поперечного сечения, собственные функции которого используются для построения решения. Областью определения этого оператора являются такие функции двух переменных z и x , которые удовлетворяют граничным условиям только как функции z (назовем их функциями поперечного сечения). В случае жидких волноводов оператор поперечного сечения и множество скалярных функций, на которые он действует, могут быть заданы достаточно просто (см. напр. [6]). В случае же упругих слоев задача не столь тривиальна, поскольку возможность задания области определения оператора поперечного сечения и выделения самого оператора из уравнений Ламэ зависят от принятой формы описания поля упругих колебаний. Например, традиционное описание с помощью потенциалов не является подходящим, так как в этом случае граничные условия содержат производные от потенциалов по координате x . Ясно, что для описания поля должны быть привлечены такие функции, которые “поглощают в себя” производные по x от компонент вектора перемещений. В качестве таковых могут быть использованы 4-х мерные векторзначные функции \mathbf{p} : $\{u, c, w, d\}$ (впервые использованные Ю. Н. Бобровническим при исследовании свойств ортогональности волн Лэмба [7]), компонентами которых являются горизонтальное u и вертикальное w смещения частиц среды, дивергенция d и компонента ротора c . Нужным свойством обладают также векторные функции “смещения – напряжения”, предложенные Кеннетом [8], \mathbf{t}_1 : $\{u, t_{zz}, w, t_{zx}\}$ или \mathbf{t}_2 : $\{u, t_{xx}, w, t_{xz}\}$. Действительно, выражая вектор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ на площадке с нормалью \mathbf{n} как

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}), \quad (1)$$

а производные по x через ротор и дивергенцию, получим для нормальной и касательной компонент вектора напряжений τ_n и τ_l следующие формулы:

$$\tau_n = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \left\{ (\lambda + \epsilon^2 \chi) d + 2\mu \left[(1 - \epsilon^2) \frac{\partial w}{\partial z} - 2\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon c \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\tau_l = \frac{\mu}{1 + \epsilon^2} \left\{ (1 - \epsilon^2) c + 2 \left[(1 - \epsilon^2) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\epsilon \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon d \right] \right\}, \quad (3)$$

где $\epsilon = dz_k/dx$ ($k = 1, 2$). Эти выражения и, соответственно, условия на свободных границах не содержат операции дифференцирования искомым

функций по x . Таким образом, векторзначные функции \mathbf{p} могут рассматриваться как функции поперечного сечения. Можно показать, что функции \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 обладают тем же свойством. Обратимся к уравнению Ламэ для неоднородной изотропной среды [9] и преобразуем его в уравнения относительно функций \mathbf{p} , \mathbf{t}_1 или \mathbf{t}_2 :

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} + \mathbf{B} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial z} + \mathbf{B}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{C}_1 \frac{\partial^2 \mathbf{t}_1}{\partial x^2} + \mathbf{D}_1 \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_2 \frac{\partial^2 \mathbf{t}_2}{\partial z^2} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial z} + \mathbf{C}_2 \mathbf{t}_2 + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где матричные коэффициенты уравнений имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\frac{\mu_x}{\mu} & 0 & 2\frac{\mu_z}{\mu} & \frac{\chi}{\mu} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{\mu_z}{\chi} & \frac{\mu}{\chi} & -2\frac{\mu_x}{\chi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu_x}{\mu} & k_i^2 & \frac{\lambda_z}{\mu} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ k_i^2 & \frac{\mu}{\chi} & 0 & \frac{\chi_x}{\chi} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\chi}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ \omega^2 \rho & \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} \\ 0 & 0 & \omega^2 \rho & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\chi^2 - \lambda^2}{\chi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\chi^2 - \lambda^2}{\chi}\right)_x & \frac{\lambda}{\chi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\chi^2 + \lambda^2}{\chi} & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\chi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \left(\frac{\chi^2 - \lambda^2}{\chi}\right)_x & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{1}{\chi} & 0 & 0 \\ \omega^2 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} \\ 0 & -\left(\frac{\lambda}{\chi}\right)_z & \omega^2 \rho & 0 \end{Bmatrix}.$$

В этих формулах k_l^2 , k_i^2 – волновые числа продольной и поперечной волн; $\chi = \lambda + 2\mu$; x , z в нижних индексах означают дифференцирование по соответствующей координате. Анализируя выражения для матричных коэффициентов уравнений (4)–(6), отмечаем, что коэффициент при производной по x в (4) и (6) не зависит от z (частичное разделение переменных), в то время как уравнение (5) такого разделения не допускает. Матричный коэффициент \mathbf{A}_2 при старшей производной по z в уравнении (6) является вырожденным в отличие от коэффициента \mathbf{A} в уравнении (4). Указанные ограничения заставляют отказаться от описания поля с помощью векторных функций “смещения – напряжения” и выбрать для этой цели множество функций \mathbf{p} : $\{u, c, w, d\}$. Оператор

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \frac{d}{dz} + \mathbf{B},$$

выделенный из (4) и заданный на множестве функций \mathbf{p} , примем в качестве оператора поперечного сечения. Решение уравнения (4) можно тогда формально записать как $\mathbf{p} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f}$, где $\mathbf{f} =$

$= -\partial\mathbf{p}/\partial x$. Вид обратного оператора \mathbf{L}^{-1} нуждается в уточнении, так как в отличие от традиционно рассматриваемых дифференциальных операторов [10], выделенный нами оператор \mathbf{L} задан на функциях, подчиненных граничным условиям, которые содержат производные того же порядка, что и дифференциальное выражение. Это не приводит к конфликту граничных условий и уравнения, так как дифференцирование в граничных условиях относится лишь к двум компонентам вектора \mathbf{p} . Если в качестве обратного оператора принять интегральный оператор с ядром, равным функции Грина $\mathbf{G}(z, z')$, то определенная с его помощью функция \mathbf{p} удовлетворяет уравнению $\mathbf{L}\mathbf{p} = \mathbf{f}$, но не удовлетворяет граничным условиям. Ситуацию можно исправить, если ввести в обратный оператор предельный переход:

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\int_{z_1}^{z_2} m_{\Delta}(z') \mathbf{G}(z, z') \mathbf{f}(z') dz' \right), \quad (7)$$

где

$$m(z')_{\Delta} = \begin{cases} \frac{(z_2 - z')}{\Delta} & z' \in (z_2 - \Delta, z_2); \\ 1 & z' \in (z_2 - \Delta, z_1 + \Delta); \\ \frac{(z' - z_1)}{\Delta} & z' \in (z_1, z_2 - \Delta). \end{cases}$$

Все элементы предельной последовательности удовлетворяют граничным условиям, а предельный элемент – уравнению (4) во всех внутренних точках упругого слоя. Если поперечное сечение не проходит через угловые точки границы слоя, то можно быть уверенным, что функция \mathbf{f} регулярна и интеграл в (7) сходится. Тогда дальнейшие заключения о свойствах оператора \mathbf{L} можно получить методами, аналогичными приведенным в [10]. Обычным способом, с помощью контурного интегрирования на комплексной плоскости γ , выразим матрицу Грина \mathbf{G} через матрицу Грина \mathbf{G}_{γ} дифференциального оператора $\mathbf{L} + i\gamma\mathbf{I}$, где \mathbf{I} – единичный оператор. Матрица $\mathbf{G}_{\gamma}(z, z')$ удовлетворяет при $z \neq z'$ уравнению

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} + (\mathbf{B} + i\gamma\mathbf{I})\mathbf{p} = 0 \quad (8)$$

и граничным условиям, которые можно представить матрицей $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_1; \mathbf{S}_2\}$, где

$$\mathbf{S}_n = \begin{Bmatrix} -4\epsilon_n i\gamma\mu & -(1 - \epsilon_n^2) & 2i\gamma\mu & 2\epsilon\mu \\ -(1 - \epsilon_n^2)2i\gamma\mu & 2\epsilon\mu & -4\epsilon_n i\gamma\mu & \chi + \epsilon_n^2 \lambda \end{Bmatrix}, \quad n = 1, 2.$$

(перемножение матрицы \mathbf{S}_n и функции от z предполагает одновременную подстановку $z = z_n$). Пусть $\mathbf{Z}(z)$ – общее решение уравнения (8). Тогда

$$\mathbf{G}_\gamma(z, z') = \frac{1}{D} \mathbf{Z}(z) \mathbf{M} \mathbf{E} (\mathbf{S} \mathbf{Z}) \mathbf{Y}(z') \mp \mathbf{Z}(z) \mathbf{Y}(z'), \quad (9)$$

где $\mathbf{Y} = (\mathbf{A} \mathbf{Z})^{-1}$ – общее решение сопряженного к (8) уравнения; $D = \det(\mathbf{S} \mathbf{Z})$; $\mathbf{M} = D(\mathbf{S} \mathbf{Z})^{-1}$ представляет собой матрицу, составленную из алгебраических дополнений матрицы $(\mathbf{S} \mathbf{Z})$; \mathbf{E} – диагональная матрица с диагональю $\{1, 1, -1, -1\}$. Определитель $D(\gamma)$ есть целая функция на комплексной плоскости γ и, следовательно, матрица Грина мероморфна. В каждом из ее полюсов $\gamma = \gamma_n$ столбцы матрицы $\mathbf{Z}(z) \mathbf{M}$ пропорциональны соответствующей собственной функции $\mathbf{p}_n(z)$ ($\mathbf{Z}(z) \mathbf{M} = \mathbf{p}_n \mathbf{s}_n$, где \mathbf{s}_n – вектор-строка из коэффициентов пропорциональности). Векторзначная функция $\mathbf{y}_n(z') = \mathbf{s}_n \mathbf{E} (\mathbf{S} \mathbf{Z}) (\mathbf{A} \mathbf{Z}^{-1})$ является собственной функцией сопряженной задачи. Применение теоремы о вычетах к выражению $\mathbf{p} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f}$ с учетом сказанного выше приводит к разложению поля упругих волн по собственным функциям оператора поперечного сечения:

$$\mathbf{p}(z, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) \mathbf{p}_n(z, x). \quad (10)$$

Коэффициенты $a_n(x)$ при собственных функциях $\mathbf{p}_n(z, x)$ в каждом из сечений $x = \text{const}$ трактуются как множители распространения и подлежат определению. Для вывода соответствующих уравнений, определяющих зависимости $a_n(x)$, требуется установить свойства ортогональности собственных функций.

2. ОБОБЩЕННАЯ БИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Свойства ортогональности для собственных функций, соответствующих плоским слоям, чаще всего выводятся с применением теоремы Бетти [11, 12] при дополнительном предположении, что зависимость от координаты x задана как $\exp(i\gamma x)$. Поскольку это предположение в рассматриваемом случае неверно, мы получим соотношения ортогональности иным способом, известным из теории дифференциальных уравнений. Домножим уравнение (8) относительно собственной функции \mathbf{p}_n на сопряженную собственную функцию \mathbf{y}_m , а уравнение относительно \mathbf{y}_m , сопряженное к (8), домножим на \mathbf{p}_n , затем вычтем одно из

другого и проинтегрируем по поперечному сечению от z_1 до z_2 . В результате получим

$$i(\gamma_n - \gamma_m) \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{y}_m \mathbf{p}_n dz + (\mathbf{y}_m \mathbf{A} \mathbf{p}_n)_{z=z_2} - (\mathbf{y}_m \mathbf{A} \mathbf{p}_n)_{z=z_1} = 0. \quad (11)$$

Вычислив формы $\mathbf{y}_m \mathbf{A} \mathbf{p}_n$, выразим компоненты c, d вектора \mathbf{p}_n через две другие компоненты u, w с помощью граничного условия $\mathbf{S}_k \mathbf{p}_n = 0$. Приравняв каждую из форм нулю при $m = n$, получаем граничное условие для сопряженной задачи, а затем, используя его, находим:

$$(\mathbf{y}_m \mathbf{A} \mathbf{p}_n)_{z=z_k} = i(\gamma_n - \gamma_m) s_k;$$

$$s_k = 2 \left[(1 + \epsilon_k^2) \frac{\chi}{\mu b} u y_2 - \left(2\epsilon_k (1 + \epsilon_k^2) \frac{\mu - \chi}{\mu b} u + w \right) \frac{\mu}{\chi} y_4 \right],$$

где

$$b = (1 + \epsilon_k^2) \left((1 - \epsilon_k^2) \frac{\chi}{\mu} + 2\epsilon_k^2 \right).$$

Подставляя найденные выражения в (11) и сокращая на $i(\gamma_n - \gamma_m)$, получаем условие обобщенной биортогональности собственных функций поперечного сечения в виде

$$[\mathbf{p}_n, \mathbf{y}_m] = \int_{z_1}^{z_2} \mathbf{y}_m(z) \mathbf{p}_n(z) dz + (s_2 - s_1) = N_n \delta_{mn}, \quad (12)$$

где через N_n обозначена обобщенная норма собственной функции.

3. УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ МОД

Подставляя ряд (10) в уравнение (4) и используя условие обобщенной биортогональности, приходим к системе дифференциальных уравнений относительно множителей распространения $a_n(x)$:

$$N_n \left(\frac{da_n}{dx} - i\gamma_n(x) a_n \right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{mn} a_m = 0, \quad (13)$$

$$n \in (-\infty, \infty).$$

В этой формуле положительным номерам отвечают собственные числа, лежащие в правой полуплоскости комплексной переменной γ , а отрицательным – в левой. Заметим, что собственные функции с одинаковым по модулю номером (но

разного знака) не совпадают и на них распространяется условие биортогональности. Функции

$$C_{mn}(x) = \left[\frac{\partial \mathbf{P}_m}{\partial x}, \mathbf{y}_n \right]$$

определяют степень связанности различных мод. Они тем меньше, чем медленнее изменяются параметры волновода вдоль координаты x . Пренебрегая связанностью мод при достаточно медленном изменении параметров, приходим к совокупности независимых уравнений, решения которых определяют распространение так называемых адиабатических мод:

$$a_n(x) = a_n(x_0) \exp \left(i \int_{x_0}^x \gamma_n(x) dx \right). \quad (14)$$

Функции с одинаковыми, но противоположно-го знака, номерами описывают встречное распространение одной и той же моды. В связи с этим понятие адиабатического приближения уместно расширить на случай, когда, пренебрегая междумодовым взаимодействием, учитываем взаимодействие встречных волн одного номера (внутримодовое взаимодействие). Этому случаю соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} N_n^+ \left(\frac{da_n^+}{dx} - i\gamma_n^+ a_n^+ \right) + C_{nn}^{++} a_n^+ + C_{nn}^{-+} a_n^- &= 0, \\ N_n^- \left(\frac{da_n^-}{dx} - i\gamma_n^- a_n^- \right) + C_{nn}^{--} a_n^- + C_{nn}^{+-} a_n^+ &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь знаки перед номерами вынесены в верхние индексы. Заметим, что собственные числа и собственные функции, используемые при построении адиабатического (или нулевого) приближения не совпадают с собственными числами (функциями) “сопровождающего волновода”, так как общее решение уравнения (8) и матрица граничных условий \mathbf{S} , а следовательно, собственные числа и собственные функции зависят не только от текущих параметров волновода, но и от их производных по координате x и учитывают локальную изменчивость параметров волновода. Существенность этого отличия проиллюстрируем на примере расчета текущих собственных чисел упругого клина.

4. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА КОМПРЕССИОННОЙ ВОЛНЫ В ТОНКОМ УПРУГОМ КЛИНЕ

“Сопровождающим волноводом” для упругого клина является плоский упругий слой, толщина

которого изменяется при движении к ребру клина. Известно, что в таком слое может распространяться симметричная (компрессионная) волна Лэмба, скорость которой становится практически постоянной при малой толщине слоя. Уже это показывает, что применение “сопровождающего волновода” не позволяет правильно описать отражение симметричной волны от ребра клина, так как неизбежно приводит к кажущемуся неограниченному нарастанию амплитуды. Следовательно бы ожидать, что волна испытывает внутреннее отражение, не доходя до ребра клина. В этой связи представляет интерес изучение эволюции собственного числа, отвечающего в методе поперечных сечений компрессионной моде. Матрица общего решения уравнения (8) в случае однородного слоя переменной толщины может быть легко найдена:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -i\gamma \operatorname{ch}_l & -i\gamma \frac{\operatorname{sh}_l}{\beta_l} & \beta_l \operatorname{sh}_l & \operatorname{ch}_l \\ 0 & 0 & -k_l^2 \operatorname{ch}_l & -k_l^2 \frac{\operatorname{sh}_l}{\beta_l} \\ \beta_l \operatorname{sh}_l & -\operatorname{ch}_l & i\gamma \operatorname{ch}_l & i\gamma \frac{\operatorname{sh}_l}{\beta_l} \\ k_l^2 \operatorname{ch}_l & k_l^2 \frac{\operatorname{sh}_l}{\beta_l} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta_{l,t} = (\gamma^2 - k_{l,t}^2)^{1/2}$; $\operatorname{ch}_{l,t} = \operatorname{ch}(\beta_{l,t})$; $\operatorname{sh}_{l,t} = \operatorname{sh}(\beta_{l,t})$.

Решая численно уравнение $\det(\mathbf{SZ}) = 0$ относительно γ для каждого из поперечных сечений, можно найти зависимость локальных собственных чисел от расстояния до ребра клина. Результаты таких расчетов для компрессионной волны, аналогичной нулевой симметричной лэмбовской моде, иллюстрируются графиками на рис. 1–3. По осям отложены действительные и мнимые части волнового числа, нормированные на волновое число сдвиговой волны, и расстояние до ребра клина, нормированное к длине сдвиговой волны в материале клина. Расчеты проводились для клина из стали с углами раствора 11.5° и 2.3° , что соответствует $\epsilon = 0.1$ и $\epsilon = 0.02$. Как видно из приведенных графиков, при изменении координаты поперечного сечения собственное (или, что то же самое, волновое) число смещается вдоль некоторой траектории в комплексной плоскости. Соответствующим образом изменяются и собственные функции, отражая тем самым приспособление волны к изменяющимся размерам волновода. На достаточном удалении от ребра собственное число близко к соответствующему собственному числу в плоском слое той же толщины. Наличие небольшой мнимой части связано с изменением площа-

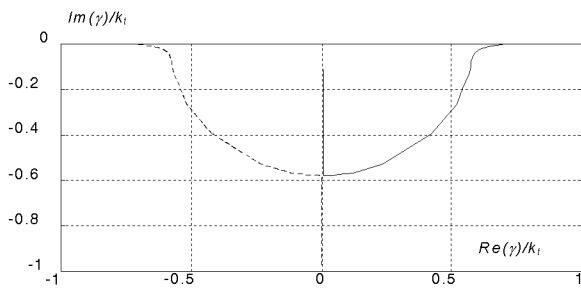


Рис. 1. Траектории волновых чисел на комплексной плоскости для волны, идущей к ребру клина (сплошная линия) и во встречном направлении (штриховая линия). Угол при вершине клина 11.50°

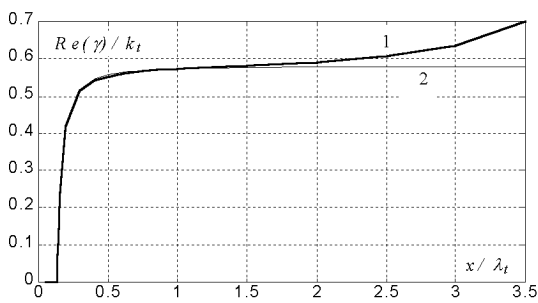


Рис. 2. Зависимость действительной части волнового числа от нормированного расстояния до ребра клина:

1 – раствор клина 11.50° , 2 – раствор клина 2.30°

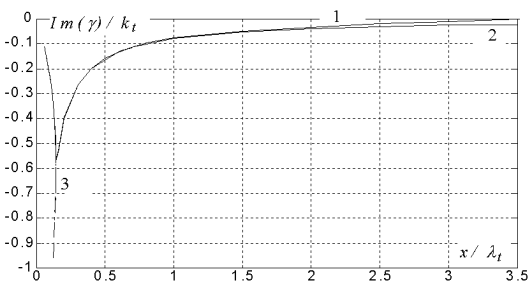


Рис. 3. Зависимость мнимой части волнового числа от нормированного расстояния до ребра клина:

1 – раствор клина 11.50° , 2 – раствор клина 2.30° ,
3 – график мнимой части волнового числа для встречной волны за критическим сечением

ди поперечного сечения. Следует ожидать, что в этой области метод поперечных сечений и теории, приводящие к “сопровождающему волноводу”, дают близкие результаты в их главных приближениях. Однако по мере приближения к ребру отличие нарастает. В то время как в “сопровождающем” плоском слое собственное число практически не изменяется, в клине наблюдается быстрое и существенное изменение, в результате которого действительная часть обращается в нуль в некотором “критическом” сечении и далее перемещается вдоль мнимой оси (в сторону нуля для волны, которая распространялась в положительном направлении оси x , и в обратном направлении для встречной волны). Переход собственного (волнового) числа на мнимую ось соответствует преобразованию распространяющейся волны в нераспространяющуюся. Эта картина типична для полного внутреннего отражения. Положение критического сечения определяется в рассматриваемом случае не локальной толщиной клина, а расстоянием до ребра. Для двух весьма различных значений угла раствора клина, рассмотренных здесь, оно практически не различается и составляет приблизительно $0.174\lambda_t$. Область критического сечения нуждается в специальном рассмотрении, так как в критическом сечении собственные числа падающей и отраженной волн сливаются, и принятое ранее предположение о том, что все полюсы функции Грина – простые, является неправомерным. При изучении этой области следует исходить из уравнений (15), так как взаимодействие прямой и обратной волн в ней является существенным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Теория поперечных сечений развита на случай двумерного волнового движения (для $P - SV$ волн) в упругих волноводах из неоднородного изотропного материала с плавно изменяющимися параметрами. Показано, что подходящую форму описания волнового поля дают 4-х мерные векторзначные функции, составленные из горизонтального и вертикального смещений, дивергенции и ненулевой компоненты ротора. Введено понятие функций поперечного сечения и определен оператор поперечного сечения. Получено разложение поля по собственным функциям этого оператора. Найдено условие обобщенной биортонormalности собственных функций. Выведены уравнения связанных мод относительно множителей распространения волн.

2. Решение уравнений в адиабатическом приближении имеет форму ВКБ-приближения, однако отличается от аналогичного решения, получаемого методом двухмасштабных разложений, тем, что фигурирующие в нем собственные функции и собственные числа не совпадают с собственными функциями и числами для “сопровождающего волновода”. Приведены уравнения для адиабатического приближения в расширенном смысле, учитывающего взаимодействие прямой и обратной волн.
3. На примере клина с плоскими гранями показано, что метод поперечных сечений предсказывает наличие критического сечения (сечения отсечки) вблизи ребра клина для нижней компрессионной моды, родственной нулевой симметричной волне Лэмба. При малых углах раствора клина расстояние сечения отсечки до ребра клина практически не зависит от угла раствора.
1. *Arnold J. M., Felsen I. B.* Couple mode theory of intrinsic modes in wedge // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1986.– **79**.– P. 31–40.
2. *Номофилов В. Е.* Распространение квазистационарных волн Рэлея в неоднородной анизотропной среде. // Математический институт им. Стеклова. Математические проблемы теории распространения волн.– 1979.– **10** С. 234–245.
3. *Tromp J., Dahlen F. A.* Surface wave propagation in a slowly varying anisotropic waveguide // *Geophys. J. Int.*– 1993.– **113** N 1.– P. 239–249.
4. *Pierce A. D.* Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost stratified medium // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1965.– **37**.– P. 19–27.
5. *Барридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды // Распространение волн и подводная акустика.– М.: Мир, 1980.– С. 76–125.
6. *Галаненко В. Б.* К расчету поля в водном слое переменной глубины на жидком полупространстве // *Акуст. ж.*– 1990.– **36**, N 2.– С. 234–240.
7. *Бобровницкий Ю. И.* Условия ортогональности волн Лэмба // *Акуст. ж.*– 1972.– **18**, N 4.– С. 513–515.
8. *Kennet B. L. N.* Seismic waves in laterally inhomogeneous media // *Geoph. J. Royal Astr. Soc.*– 1972.– **27**.– P. 301–325..
9. *Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. New York, 1957.
10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.– М.: Наука, 1969.– 526 с.
11. *Федорюк М. В.* Соотношения ортогональности в упругих волноводах // *Акуст. ж.*– 1974.– **20**, N 2.– С. 513–515.
12. *Scandrett C. L., Frenzen C. L.* Bi-orthogonality relationships involving porous media // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1995.– **98**.– P. 1199–1203.