

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА КОНЕЧНОЙ РЕШЕТКОЙ ИЗ ОТКРЫТЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

В. Г. БАСОВСКИЙ

Институт гидромеханики НАН Украины

Получено 17.05.98

Рассмотрена задача об излучении звука конечными решетками из открытых пьезокерамических колец, когда заданными являются не колебательные скорости на стенках колец, а входные электрические напряжения. Предложен строгий метод решения этой задачи, учитывающий локальные особенности звукового поля вблизи концов колец. В широком диапазоне изменения частоты и шага решетки проведен анализ акустического взаимодействия колец при работе в многоэлементных решетках. Исследуются решетки двух типов: из пульсирующих колец и осциллирующих.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с классических трактатов Гельмгольца [1] и Рэлея [2] по теории органичных труб, можно указать много публикаций, где разработаны различные методы и получены интересные количественные данные, касающиеся акустических свойств открытых цилиндрических излучателей конечных размеров (см., например, [3, 4] и библиографию в них). Интерес к таким задачам, с одной стороны, стимулируется внутренними потребностями развития теории дифракции, а с другой (возможно еще в большей степени) – запросами практики. Так, в 50–60-х годах нынешнего столетия было установлено, что открытые цилиндрические излучатели из пьезоэлектрических материалов могут весьма эффективно излучать акустическую энергию в жидкости при большом гидростатическом давлении, т.е. на больших глубинах. В частности, G. W. McMahon [5] экспериментально показал, что, используя линейную решетку из таких излучателей, можно существенно расширить диапазон излучаемых частот.

Теоретическое исследование звукового поля, создаваемого конечными решетками из открытых пьезоэлектрических цилиндрических излучателей, связано со значительными трудностями, поскольку необходимо решать сопряженную (или так называемую “сквозную”) задачу электроакустики, постановка которой должна учитывать механические и физические свойства излучателей, способ их возбуждения, а также взаимодействие излучателей по полю. Поэтому неудивительно, что большая часть работ посвящена классической задаче излучения, когда на стенках открытых цилиндрических излучателей задано некоторое распределение колебательной скорости или давления. При решении классической задачи использовались как приближенные, так и строгие методы. При-

ближенные методы, как правило, основывались на замене открытых цилиндрических излучателей близкими по форме телами, задачу излучения для которых можно решить в аналитическом виде или путем несложных численных схем. Однако применение приближенных методов сильно ограничено геометрическими и волновыми размерами излучателей. Поэтому интенсивно разрабатывались в последнее время строгие методы, т.е. методы, с помощью которых принципиально можно получить решение сколь угодно близкое к точному. Именно эти методы наиболее пригодны для численной реализации как для одиночных открытых цилиндрических излучателей, так и для антенных решеток из таких излучателей. Среди строгих методов основными являются: метод граничных интегральных уравнений (как традиционных, так и нетрадиционных), метод парных интегральных уравнений и метод частичных областей. Здесь следует обратить внимание на работы [3, 6, 7], в которых явным образом в решении соответствующих краевых задач учитываются особенности волнового поля вблизи концов излучателей, что позволяет строить эффективные вычислительные алгоритмы не только для интегральных, но и для локальных характеристик звукового поля в любой точке его существования.

Что касается постановки и решения “сквозной” задачи, то сегодня имеется ограниченное количество таких работ. Характерной чертой этих работ является то, что в них реализованы различные подходы как при описании механических и физических свойств пьезоэлектрических цилиндрических излучателей, так и при решении задачи излучения. При этом во всех работах рассматривается только частный случай, когда излучатели совершают пульсирующие (осесимметричные) колебания. Так, в работе [8] “сквозная” задача фактически решается комбинированным методом ко-

нечных и граничных элементов. Этот метод получил дальнейшее развитие и в недавно опубликованных работах [4, 9]. Отметим, что, хотя авторы работ [4, 8, 9] и указывают на универсальность комбинированного метода конечных и граничных элементов по отношению к форме и конструктивным особенностям излучателей, в этих работах приведены расчетные данные только для одиночного излучателя и двухэлементной решетки. Интересный подход к решению “сквозной” задачи, но только для одиночного излучателя, реализован в [10]. В этой работе колебания пьезоэлектрического цилиндрического излучателя описаны с помощью уравнений безмоментной теории тонких пьезоупругих оболочек, а задача излучения переформулирована таким образом, чтобы можно было при ее решении использовать любой метод, позволяющий по заданному распределению нормальной составляющей колебательной скорости по поверхности излучателя находить акустическое давление на его поверхности. Особо следует выделить работу [11], в которой приведен обширный физический анализ “сквозной” задачи для трехэлементной решетки из пьезокерамических колец для частного случая, когда шаг решетки равен высоте кольца. Особенностью работы [11] является то, что автор, используя модифицированный метод частичных областей [12] при решении задачи излучения и не усложняя постановку “сквозной” задачи более точными моделями пьезоэлектрических цилиндрических излучателей, уделил основное внимание анализу акустического взаимодействия излучателей в решетке.

Ниже предлагается один из возможных подходов к решению “сквозной” задачи об излучении звука решетками из открытых пьезокерамических колец, когда заданными являются не колебательные скорости на их стенках, а входные электрические напряжения. Рассматриваются решетки двух типов: состоящие только из пульсирующих колец и состоящие только из осциллирующих колец. Одновременное рассмотрение этих типов решеток обусловлено тем, что только пульсирующая (нулевого порядка) и осциллирующая (первого порядка) формы являются основными формами колебаний кольца типа растяжения–сжатия. Другие формы (второго, третьего и т.д. порядков) являются основными формами изгибных колебаний кольца в его плоскости [13].

Для описания звукового поля, создаваемого рассматриваемыми решетками, используется метод, который фактически обобщает результаты работ [3, 14] для конечной решетки из открытых цилиндрических излучателей.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КОЛЕЦ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Модель кольца можно использовать для описания колебаний реальных пьезокерамических цилиндрических излучателей при определенных условиях. Во-первых, толщина стенки излучателя должна быть намного меньше радиуса его средней поверхности, что позволяет пренебречь изменениями механических и электрических величин в радиальном направлении. Во-вторых, высота излучателя должна быть настолько меньше его радиуса, чтобы можно было пренебречь энергией изгибных и осевых деформаций, и считать что радиальные и окружные смещения точек излучателя не зависят от осевой координаты. Для излучателей с относительной толщиной стенки $h/a > 0.01$ последнее условие выполняется, когда $H/2a \leq 0.3$, где H, a, h – соответственно высота, радиус средней поверхности и толщина стенки излучателя [15].

Свободные колебания упругих колец достаточно подробно исследованы в книге [13]. Вынужденные колебания пульсирующих пьезокерамических колец в акустической среде рассмотрены, например, в работе [11]. Что касается колебаний осциллирующих пьезокерамических колец в акустической среде, то они рассмотрены только в работе [16], в которой приведены уравнения движения осциллирующего кольца, учитывающие реакцию акустической среды, но без выяснения основных физических механизмов, имеющих место при взаимодействии такого кольца с акустической средой. Поэтому рассмотрим более детально уравнения движения пьезокерамического кольца, погруженного в акустическую среду.

Пусть пьезокерамическое кольцо поляризовано в радиальном направлении (рис. 1, а). Такое кольцо может совершать пульсирующие радиальные колебания, когда электроды полностью покрывают его внутреннюю и внешнюю боковые поверхности и на них подается электрическое напряжение (рис. 1, б). В этом случае граничные условия для электрического потенциала ψ имеют следующий вид:

$$\psi \Big|_{r=a \mp h/2} = \pm \frac{U_0}{2} \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Осциллирующие радиальные колебания пьезокерамического кольца (в низкочастотном диапазоне) можно реализовать, когда сплошные электроды на боковых поверхностях электрически разделить вдоль образующей кольца на две равные части и на них подать противофазные электрические на-

пряжения (рис. 1, в). Если разделение выполнить при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$, то граничные условия для электрического потенциала можно записать в следующем виде:

$$\psi \Big|_{r=a \mp h/2} = \pm g(\varphi) \frac{U_0}{2} \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

где

$$g(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi < \pi/2, \\ -1, & \pi/2 < \varphi < 3\pi/2, \\ 1, & 3\pi/2 < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

При пульсирующих и осциллирующих колебаниях кольца существенными являются только силы типа растяжения и сжатия. При этом смещения точек кольца не зависят от осевой и радиальной координат, и его деформации можно полностью характеризовать деформациями срединной окружности, которые определяются соотношением [13]:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right). \quad (3)$$

Здесь условно положительными приняты радиальные перемещения u в направлении от центра и перемещения по касательной к срединной окружности w против часовой стрелки.

Уравнения пьезоэффекта в цилиндрической системе координат, при принятых допущениях для механических и электрических характеристик кольца, приводятся к виду [17]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= s_{11}^E \sigma_\varphi + d_{31} E_r, \\ D_r &= \varepsilon_{33}^T E_r + d_{31} \sigma_\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь σ_φ – внутренние механические напряжения кольца в окружном направлении; E_r – радиальная составляющая напряженности электрического поля; D_r – радиальная составляющая вектора электрической индукции пьезокерамики; s_{11}^E – упругая податливость пьезокерамики, определяемая при постоянном значении электрического поля; ε_{33}^T – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики, определяемая при постоянном значении механических напряжений; d_{31} – пьезоэлектрическая постоянная.

Используя соотношения (3) и (4), уравнения движения пьезокерамического кольца в акустичес-

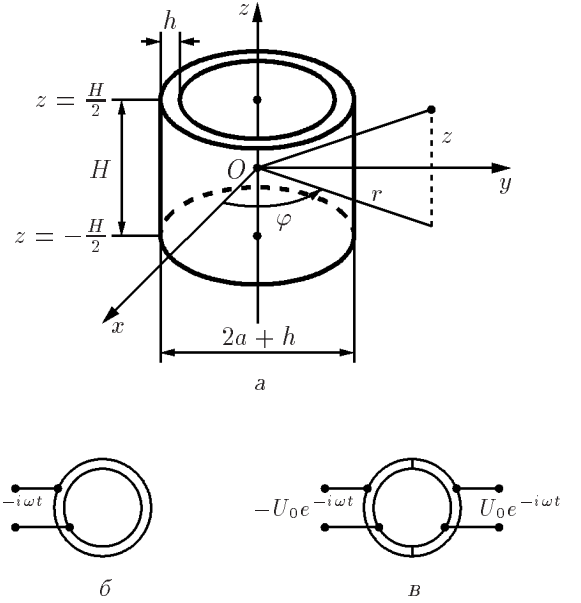


Рис. 1. Геометрия кольца (а) и схемы подключения электродов для пульсирующего (б) и осциллирующего (в) колец

кой среде запишем в виде [16]:

$$\rho a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{s_{11}^E a} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) + \frac{d_{31}}{a s_{11}^E} E_r - \frac{a}{h} \Delta p, \quad (5)$$

$$\rho a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{a s_{11}^E} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \frac{d_{31}}{a s_{11}^E} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}.$$

Здесь Δp – разность давлений на внешней и внутренней боковых поверхностях кольца; ρ – плотность пьезокерамики.

Систему дифференциальных уравнений (5) можно рассматривать как дифференциальные уравнения радиальных колебаний некоторого упругого кольца без пьезоэффекта, вызванные системой распределенных на его боковых поверхностях сил. Поэтому решение системы уравнений (5) можно найти, разлагая смещения срединной окружности кольца в ряды по собственным функциям колебаний кольца без пьезоэффекта [13]. Итак, имеем

$$u = \exp(-i\omega t) \left(u_2^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 u_j^{(m)} \cos m\varphi \right), \quad (6)$$

$$w = \exp(-i\omega t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 w_j^{(m)} \sin m\varphi.$$

Здесь собственные функции

$$\xi_j^{(m)} = (u_j^{(m)} \cos m\varphi, w_j^{(m)} \sin m\varphi)$$

характеризуют распределение амплитуды в нетривиальных периодических решениях однородных дифференциальных уравнений (5) и описывают движения срединной окружности упругого кольца без потерь. Эти функции удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -\rho\omega_j^{(m)} u_j^{(m)} &= -\frac{1}{as_{11}^E} (mw_j^{(m)} + u_j^{(m)}), \\ -\rho\omega_j^{(m)} w_j^{(m)} &= -\frac{m}{as_{11}^E} (mw_j^{(m)} + u_j^{(m)}), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\omega_1^{(m)} = 0, \quad \omega_2^{(m)} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1+m^2}{\rho s_{11}^E}}. \quad (8)$$

Величины $u_j^{(m)}$ и $w_j^{(m)}$ ненормированы и могут содержать любой постоянный множитель, но при этом согласно системы (7) они связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= w_1^{(0)} = 0, \\ \frac{w_1^{(m)}}{u_1^{(m)}} &= -\frac{1}{m} \quad \text{при } m > 0, \\ \frac{w_2^{(m)}}{u_2^{(m)}} &= m \quad \text{при } m \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемой постановке в задачу о колебаниях пьезокерамического кольца не вводились какие-либо условия, обуславливающие “закрепление” кольца. Поэтому при $m > 0$ имеется принципиальная возможность движения кольца как единого целого с формальной собственной частотой $\omega_1^{(m)} = 0$. Очевидно, что такое движение в вакууме не может себя проявить при принятом способе возбуждения пьезокерамического кольца, поскольку оно не сопровождается деформациями его срединной окружности. Иное дело, когда кольцо погружено в акустическую среду. В этом случае внешняя реакция среды может реализовать описанный тип движения. Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

С помощью соотношений (6), (7) и (9), а также представлений

$$\begin{aligned} E_r &= \exp(-i\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} E_m \cos m\varphi, \\ \Delta p &= \exp(-i\omega t) \sum_{m=0}^{\infty} \Delta p^{(m)}(z) \cos m\varphi \end{aligned}$$

и свойств ортогональности собственных функций $\xi_j^{(m)}$ на отрезке $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, систему дифференциальных уравнений (5) в случае гармонических колебаний кольца можно свести к виду

$$\begin{aligned} -\pi \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) \rho a \omega^2 u_1^{(m)} &= -\frac{\varepsilon_m \pi a}{h} \Delta p^{(m)}(z) \\ &\text{при } m > 0, \\ -\varepsilon_m \pi (1 + m^2) \rho a (\omega^2 - \omega_2^{(m)^2}) u_2^{(m)} &= \\ &= \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \pi \varepsilon_m (1 + m^2) E_m - \frac{\varepsilon_m \pi a}{h} \Delta p^{(m)}(z) \\ &\text{при } m \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) введены обозначения $\varepsilon_m = 2$ при $m = 0$ и $\varepsilon_m = 1$ при $m > 0$.

Рассмотрим пульсирующее пьезокерамическое кольцо. Принимая во внимание граничные условия (1), имеем

$$E_r(\varphi, t) = \frac{U_0}{h} \exp(-i\omega t).$$

Следовательно,

$$E_0 = \frac{U_0}{h};$$

$$E_m = 0 \quad \text{и} \quad u_1^{(m)} = u_2^{(m)} = 0 \quad \text{при } m > 0.$$

Используя эти соотношения, систему уравнений (10) можно свести только к одному уравнению

$$\begin{aligned} -2\pi \rho a u^{(0)} (\omega^2 - \omega_0^{(0)^2}) &= \\ = \frac{2\pi d_{31} U_0}{s_{11}^E h} - \frac{2\pi a}{h} \Delta p^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введены обозначения

$$u^{(0)} = u_2^{(0)}, \quad \omega_0^{(0)} = \omega_2^{(0)}.$$

В случае осциллирующего кольца из граничных условий (2) получаем

$$E_r(\varphi, t) = g(\varphi) \frac{U_0}{h} \exp(-i\omega t).$$

Следовательно,

$$E_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{4U_0}{\pi m h} \quad \text{при } m = 1, 3, \dots;$$

$$E_m = 0, \quad u_1^{(m)} = u_2^{(m)} = 0 \quad \text{при } m = 0, 2, \dots$$

Как видно, электромеханическая связь существует как у интересующей нас формы колебаний $g_1(\varphi) = \cos \varphi$, так и у всех других нечетных форм колебаний $g_{(2m-1)}(\varphi) = \cos(2m-1)\varphi$. Следовательно, первая форма колебаний кольца при противофазном включении половин электродов не является изолированной, как это имеет место для нулевой формы колебаний. Это обстоятельство приводит к ограничению частотного диапазона, в пределах которого кольцо имеет неискаженную характеристику направленности в виде $\cos \varphi$. Принципиально форму колебаний $g_1(\varphi) = \cos \varphi$ можно сделать независимой от других форм колебаний кольца, если путем соответствующего конструирования электродов функции $g(\varphi)$ в граничных условиях (2) придать вид $g(\varphi) = \cos \varphi$, что трудно осуществить на практике.

Ниже колебания пьезокерамических колец с разрезными электродами будем рассматривать вблизи нижней ненулевой собственной частоты $\omega_2^{(1)}$, где преобладающими смещениями срединной окружности являются смещения с индексом $m = 1$. Поэтому в окрестности этой частоты радиальные смещения срединной окружности кольца приближенно равны

$$u \approx (u_1^{(1)} + u_2^{(1)}) \cos \varphi = u^{(1)} \cos \varphi. \quad (12)$$

Радиальные смещения $u_1^{(1)}$ и $u_2^{(1)}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} -2\pi\rho a \omega^2 u_1^{(1)} &= -\frac{\pi a}{h} \Delta p^{(1)}(z), \\ -2\pi\rho a \left(\omega^2 - \omega_0^{(1)2} \right) u_2^{(1)} &= \\ &= \frac{8d_{31}U_0}{s_{11}^E h} - \frac{\pi a}{h} \Delta p^{(1)}(z), \end{aligned} \quad (13)$$

которая следует из (10) при $m = 1$. В (13) введено обозначение $\omega_0^{(1)} = \omega_2^{(1)}$.

Проинтегрируем уравнения (11) и (13) по переменной z вдоль всей высоты кольца. В результате для пульсирующего кольца получим соотношение

$$V_{\text{кл}}^{(0)} Z_{\text{мех}}^{(0)} + \Delta F^{(0)} = N^{(0)} U_0, \quad (14)$$

а для осциллирующего кольца – систему уравнений

$$-i\omega M V_1^{(1)} = -\Delta F^{(1)}, \quad (15)$$

$$Z_{\text{мех}}^{(1)} V_2^{(1)} = N^{(1)} U_0 - \Delta F^{(1)}.$$

В выражениях (14) и (15) колебательная скорость кольца¹, собственный механический импе-

данс кольца, полная сила реакции акустической среды на кольцо в направлении движения и коэффициент электромеханической трансформации соответственно равны

$$V_{\text{кл}}^{(0)} = -i\omega u^{(0)},$$

$$\tilde{V}_1^{(1)} = -i\omega u_1^{(1)}, \quad \tilde{V}_2^{(1)} = -i\omega u_2^{(1)};$$

$$Z_{\text{мех}}^{(m)} = -i\omega M \left[1 - \left(\omega_0^{(m)} / \omega \right)^2 \right], \quad m = 0, 1;$$

$$\Delta F^{(m)} = \varepsilon_m \pi a \int_{-H/2}^{H/2} \Delta p^{(m)}(z) dz, \quad m = 0, 1;$$

$$N^{(0)} = \frac{2\pi d_{31}H}{s_{11}^E}, \quad N^{(1)} = \frac{8d_{31}H}{s_{11}^E};$$

где $M = 2\pi a H \rho$ – полная масса кольца.

Полагая

$$\Delta F^{(0)} = V_{\text{кл}}^{(0)} \frac{\Delta F^{(0)}}{V_{\text{кл}}^{(0)}} = V_{\text{кл}}^{(0)} Z_{\text{изл}}^{(0)},$$

уравнение (14) можно представить в другой традиционно используемой в акустике форме

$$V_{\text{кл}}^{(0)} \left(Z_{\text{мех}}^{(0)} + Z_{\text{изл}}^{(0)} \right) = N^{(0)} U_0, \quad (16)$$

где $Z_{\text{изл}}^{(0)}$ – импеданс излучения открытого пульсирующего кольца.

Уравнение (14) широко используется при исследовании акустических полей, создаваемых цилиндрическими излучателями. Что касается уравнений (15), то они менее известны. Чтобы облегчить дальнейший анализ, определим суммарную амплитуду колебательной скорости осциллирующего кольца. С учетом (12) и (15) имеем

$$\begin{aligned} V_{\text{кл}}^{(1)} &= \tilde{V}_1^{(1)} + \tilde{V}_2^{(1)} = \\ &= -\frac{\Delta F^{(1)}}{-i\omega M} + \frac{N^{(1)} U_0 - \Delta F^{(1)}}{Z_{\text{мех}}^{(1)}}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить уравнение аналогичное по структуре уравнению (14)

$$V_{\text{кл}}^{(1)} Z_{\text{мех}}^{(1)} + \Delta F^{(1)} + \Delta F^{(1)} \frac{Z_{\text{мех}}^{(1)}}{-i\omega M} = N^{(1)} U_0. \quad (17)$$

Или в другой форме

$$V_{\text{кл}}^{(1)} \left(Z_{\text{мех}}^{(1)} + Z_{\text{изл}}^{(1)} + Z_{\text{доп}}^{(1)} \right) = N^{(1)} U_0. \quad (18)$$

¹Под колебательной скоростью осциллирующего кольца понимаем скорость его точки приведения при $\varphi = 0$

Здесь

$$Z_{\text{доп}}^{(1)} = \frac{Z_{\text{изл}}^{(1)} Z_{\text{мех}}^{(1)}}{-i\omega M};$$

$Z_{\text{изл}}^{(1)}$ – импеданс излучения открытого осциллирующего кольца.

Как видно, в отличие от пульсирующего кольца, в случае осциллирующего появляется дополнительный импеданс $Z_{\text{доп}}^{(1)}$, который ответственный за эффект движения кольца как единого целого. Очевидно, что этот импеданс будет влиять как на резонансные свойства системы “пьезокерамическое кольцо – акустическая среда”, так и на величину колебательной скорости и излучаемой мощности осциллирующего кольца.

Выше были получены уравнения вынужденных колебаний пьезокерамических колец в акустической среде без учета сил вязкого трения в материале кольца. Чтобы учесть эти силы, запишем выражение для собственного механического импеданса кольца в виде [18]:

$$Z_{\text{мех}}^{(m)} = -i\omega M \left[1 - \left(\omega_0^{(m)} / \omega \right)^2 \left(1 + i/Q_m \right) \right],$$

где Q_m – механическая добротность кольца.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим решетку из N открытых цилиндрических излучателей одинакового радиуса a (рис. 2), погруженную в идеальную сжимаемую жидкость с волновым сопротивлением $\rho_0 c_0$. Толщиной стенок излучателей по сравнению с длиной звуковой волны в жидкости будем пренебрегать и считать, что точки внутренней и внешней стенок излучателей, лежащие на одном радиусе, колеблются синфазно с одинаковыми радиальными скоростями.

Акустический потенциал $\Phi(r, \varphi, z)$ (здесь и далее множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается) звукового поля, создаваемого такой решеткой, должен удовлетворять уравнению Гельмгольца и граничным условиям

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{S_{1,l}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{S_{2,l}} = V_l(\varphi_{0,l}, z_{0,l}), \quad (19)$$

$$0 \leq \varphi_{0,l} \leq 2\pi, \quad a_l < z_{0,l} < b_l, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

а также условию излучения на бесконечности и условию конечности акустической энергии в окрестности концов излучателей. При записи граничных условий (19) приняты следующие обозначения: l – номер излучателя в решетке (см.

рис. 2); $S_{1,l}$ и $S_{2,l}$ – соответственно поверхности внутренней и внешней стенок l -го излучателя; $V_l(\varphi_{0,l}, z_{0,l})$ – заданное распределение радиальной составляющей колебательной скорости по поверхности l -го излучателя, которое в общем случае зависит как от осевой, так и от окружной координат.

Предлагаемый ниже метод решения поставленной граничной задачи основывается на результатах работ [3, 14] и является их обобщением для конечной решетки, состоящей из открытых цилиндрических излучателей. Поэтому не будем подробно останавливаться на методе решения задачи излучения и по мере необходимости некоторые формулы будем заимствовать из [3, 14].

Применив метод частичных областей [19], разделим акустическое пространство на две подобласти: I – $r < a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|z| < \infty$ и II – $r > a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $|z| < \infty$. Пусть распределение радиальной составляющей скорости по поверхностям оболочек симметрично относительно нулевого меридиана решетки. Тогда, учитывая осевую симметрию задачи, потенциалы колебательной скорости в подобластях I и II соответственно представим в виде рядов Фурье по косинусам

$$\Phi_j(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_j^{(m)}(r, z) \cos m\varphi, \quad j = 1, 2 \quad (20)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \Phi_j^{(m)}(r, z) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} A_m(\alpha) J_m(qr), \quad j = 1 \\ B_m(\alpha) H_m^{(1)}(qr), \quad j = 2 \end{array} \right\} \exp(i\alpha z) d\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $q = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ для $k \geq |\alpha|$ и $q = i\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ для $k < |\alpha|$; $k = \omega/c_0$ – волновое число; J_m и $H_m^{(1)}$ – соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода порядка m ; $A_m(\alpha)$ и $B_m(\alpha)$ – неизвестные плотности соответствующих интегралов Фурье.

Для определения неизвестных плотностей $A_m(\alpha)$ и $B_m(\alpha)$ необходимо использовать условия непрерывности звукового поля на границе частичных подобластей ($r = a$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $z < a_1$, $b_l < z < a_{l+1}$ ($l = 1, 2, \dots, N-1$), $z > b_N$) по давлению ($\Phi_1(a, \varphi, z) = \Phi_2(a, \varphi, z)$) и нормальной составляющей колебательной скорости ($\partial \Phi_1 / \partial r = \partial \Phi_2 / \partial r$), а также граничные условия (19). Условие непрерывности по скорости с учетом равенства радиальных составляющих колебательных скоростей на внутренней и внешней стенках излучателей в силу свойств рядов и интегралов Фурье дает связь между искомыми плотностями:

$$B_m(\alpha) = A_m(\alpha) J'_m(qa) / H_m^{(1)'}(qa). \quad (22)$$

Здесь и далее штрих у функции означает дифференцирование по полному аргументу.

Учитывая соотношения (20)–(22), а также вронскиан для функций $J_m(qa)$ и $H_m^{(1)}(qa)$ [20], условие непрерывности по давлению на границе частичных подобластей приводим к виду

$$-\frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\alpha) \frac{\exp(i\alpha z)}{qaH_m^{(1)'}(qa)} d\alpha = \begin{cases} 0, & z > b_N, \\ 0, & b_l < z < a_{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots, N-1, \\ \Delta\Phi_l^{(m)}(z), & a_l \leq z \leq b_l, \quad l = 1, 2, \dots, N, \\ 0, & z < a_1. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь на отрезках $a_l \leq z \leq b_l$ определены новые неизвестные функции $\Delta\Phi_l^{(m)}(z) = \Phi_2^{(m)}(a, z) - \Phi_1^{(m)}(a, z)$, которые по сути являются коэффициентами разложения скачка потенциала скорости на внешней и внутренней стенках l -го излучателя в ряд Фурье по косинусам относительно координаты φ . Очевидно, что таким образом введенные функции, вследствие непрерывности давления на концах излучателей, должны удовлетворять условиям

$$\Delta\Phi_l^{(m)}(a_l) = \Delta\Phi_l^{(m)}(b_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Применяя теперь к обеим частям равенства (23) обратное преобразование Фурье, получим связь между плотностью $A_m(\alpha)$ и функциями $\Delta\Phi_l^{(m)}(z)$:

$$A_m(\alpha) = \frac{iq a H_m^{(1)'}(qa)}{4} \sum_{l=1}^N \int_{a_l}^{b_l} \Delta\Phi_l^{(m)}(z) \exp(-i\alpha z) dz.$$

Последнее выражение с помощью формулы интегрирования по частям и условий (24) можно переписать в виде

$$A_m(\alpha) = \frac{qaH_m^{(1)'}(qa)}{4\alpha} \sum_{l=1}^N \int_{a_l}^{b_l} \Delta\Phi_l^{(m)'}(z) \exp(-i\alpha z) dz, \quad (25)$$

с условиями

$$\int_{a_l}^{b_l} \Delta\Phi_l^{(m)'}(z) dz = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (26)$$

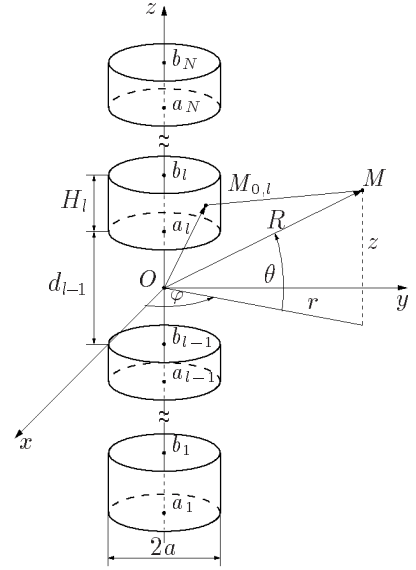


Рис. 2. Геометрия решетки и системы координат: (r, φ, z) – цилиндрические и (R, θ, φ) – сферические координаты; центр систем координат совпадает с геометрическим центром решетки ($a_1 = -b_N$); $M_{0,l}(a, \varphi_{0,l}, z_{0,l})$ – точка на поверхности l -го кольца; $M(R, \theta, \varphi)$ – точка наблюдения

которые непосредственно следуют из (24).

Используя представления (20), (21) и (25), а также учитывая асимптотику

$$\frac{q^2 a}{\alpha} J_m'(qa) H_m^{(1)'}(qa) = \frac{i \operatorname{sign}(\alpha)}{\pi} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

при $|\alpha| \gg m$

и значение следующего нерегулярного интеграла в пространстве обобщенных функций [21]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\alpha) \exp[i\alpha(z_0 - z)] d\alpha = \frac{2i}{z_0 - z},$$

граничные условия (19) на внутренних стенках излучателей для m -ой окружной моды можем записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{a_l}^{b_l} \frac{\Delta\Phi_l^{(m)'}(z)}{z_{0,l} - z} dz + \int_{a_l}^{b_l} \Delta\Phi_l^{(m)'}(z) K_{reg}^{(m)}(z_{0,l}, z) dz + \\ & + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^N \int_{a_s}^{b_s} \Delta\Phi_s^{(m)'}(z) \left[\frac{1}{2\pi(z_{0,l} - z)} + K_{reg}^{(m)}(z_{0,l}, z) \right] dz = \\ & = V_l^{(m)}(z_{0,l}), \quad a_l < z_{0,l} < b_l, \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$K_{reg}^{(m)}(z_{0,l}, z) = -\frac{i}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{q^2 a}{\alpha} J_m'(qa) H_m^{(1)'}(qa) - \frac{i}{\pi} \right\} \times \\ \times \sin \alpha(z_{0,l} - z) d\alpha; \\ V_l^{(m)}(z_{0,l}) = \frac{1}{\pi \varepsilon_m} \int_0^{2\pi} V_l(\varphi_{0,l}, z_{0,l}) \cos m\varphi_{0,l} d\varphi_{0,l};$$

символ \int означает, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [22].

Чтобы удовлетворить условию конечности энергии вблизи концов оболочки, решение системы интегральных уравнений (27) следует искать в классе функций [19]:

$$\Delta \Phi_l^{(m)'}(z) = a \gamma_l^{(m)}(z) / \sqrt{(b_l - z)(z - a_l)}, \quad (28) \\ l = 1, 2, \dots, N,$$

где функции $\gamma_l^{(m)}(z)$, имеющие размерность скорости, удовлетворяют условию Гельдера [22] на соответствующих отрезках $a_l \leq z \leq b_l$. Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений [22, 23] для единственного выделения решения системы (27) в классе функций (28) необходимо иметь еще одно дополнительное условие на каждую функцию $\Delta \Phi_l^{(m)'}(z)$. В нашем случае в качестве таких дополнительных условий можно принять условия (26).

Итак, краевая задача об излучении звука конечной решеткой из открытых цилиндрических излучателей сведена к решению для каждой окружной моды m системы сингулярных интегральных уравнений (27) относительно неизвестных функций $\Delta \Phi_l^{(m)'}(z)$, которые удовлетворяют дополнительным условиям (26).

3. ФОРМУЛИРОВКА “СКВОЗНОЙ” ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим решетку из N открытых пульсирующих или осциллирующих пьезокерамических колец. Пусть на электроды каждой оболочки подается электрическое напряжение $(\pm U_l/2) \exp(-i\omega t)$ ($l = 1, 2, \dots, N$) (см. рис. 1, а и б), в общем случае имеющее свою амплитуду и фазу. При этом считаем, что распределение колебательной скорости в пределах одного кольца не зависит от осевой координаты z . Для описания звукового поля,

создаваемого такой решеткой в окружающей среде, воспользуемся системой интегральных уравнений (27) (полагая $m = 0$ или $m = 1$ соответственно для решетки из пульсирующих или осциллирующих колец) относительно искомых функций $\Delta \Phi_l^{(m)'}$. Присоединим к этой системе N дополнительных условий (26) и N уравнений движения для каждого кольца (в форме (14) для пульсирующих и в форме (17) для осциллирующих колец).

Прежде, чем воспользоваться уравнениями (14) и (17) для постановки “сквозной” задачи, необходимо силу реакции среды на колебания l -го кольца $\Delta F_l^{(m)}$ выразить через искомую функцию $\Delta \Phi_l^{(m)'}$. Используя известное соотношение между акустическим давлением и потенциалом колебательной скорости: $p = -\rho \omega i \Phi$; и применяя формулу интегрирования по частям с учетом (24), получаем

$$\Delta F_l^{(m)} = \varepsilon_m \pi a \rho \omega i \int_{a_l}^{b_l} z \Delta \Phi_l^{(m)'}(z) dz.$$

Итак, формулировка “сквозной” задачи об излучении звука решеткой из открытых пьезокерамических колец, предполагающая непрерывность давления и нормальной составляющей колебательной скорости на границе раздела сред “пьезокерамические кольца – акустическая среда”, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{a_l}^{b_l} \frac{\Delta \Phi_l^{(m)'}(z)}{z_{0,l} - z} dz + \int_{a_l}^{b_l} \Delta \Phi_l^{(m)'}(z) K_{reg}^{(m)}(z_{0,l}, z) dz + \\ + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^N \int_{a_s}^{b_s} \Delta \Phi_s^{(m)'}(z) \left[\frac{1}{2\pi(z_{0,l} - z)} + K_{reg}^{(m)}(z_{0,l}, z) \right] dz = \\ = V_l^{(m)}, \quad a_l < z_{0,l} < b_l; \\ \int_{a_l}^{b_l} \Delta \Phi_l^{(m)'}(z) dz = 0;$$

$$V_l^{(m)} Z_l^{(m)} + \varepsilon_m \pi a \rho \omega i E_l^{(m)} \int_{a_l}^{b_l} z \Delta \Phi_l^{(m)'}(z) dz = N_l^{(m)} U_l; \\ m = 0, 1, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (29)$$

Здесь

$$E_l^{(m)} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 1 + \frac{Z_l^{(m)}}{-i\omega M_l}, & m = 1; \end{cases}$$

$V_l^{(m)}, Z_l^{(m)}, N_l^{(m)}, M_l$ – комплексная амплитуда колебательной скорости, собственный механический импеданс, коэффициент электромеханической трансформации, масса l -го кольца соответственно.

Искомыми величинами системы функциональных уравнений (29) при фиксированном значении m являются функции $\Delta\Phi_l^{(m)'}(z)$ (через которые определяются все характеристики звукового поля) и колебательные скорости колец $V_l^{(m)}$, а заданными – разность электрических напряжений на электродах колец. Отметим, что в рамках предложенного метода решения “сквозной” задачи можно ответить и на другой важный вопрос – какие необходимы значения U_l , чтобы обеспечить заданные величины скоростей $V_l^{(m)}$. Для этого достаточно в системе (29) величины $V_l^{(m)}$ положить заданными, а U_l – искомыми. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [24].

4. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ “СКВОЗНОЙ” ЗАДАЧИ

Особенностью предлагаемого подхода дискретизации “сквозной” задачи является то, что искомые функции $\Delta\Phi_l^{(m)'}(z)$ представляются в виде (28). Такой подход позволяет не только выделить единственное физически правильное решение системы функциональных уравнений (27), но и построить эффективный численный алгоритм ее решения.

Принимая во внимание представления (28), заменим интегралы в системе (27) квадратурными формулами интерполяционного типа для функций с порядком особенности $1/2$ на концах интервала интегрирования. Сингулярные интегралы по отрезку $[a_l, b_l]$ заменим квадратурной формулой [25] с весовыми коэффициентами π/N_l , внутренними $z_{j,l} = g_l(\tau_{j,l})$ и внешними $z_{0p,l} = g_l(\tau_{0p,l})$ узлами, где $\tau_{j,l} = \cos\{\pi(2j-1)/2N_l\}$ ($j = 1, 2, \dots, N_l$) и $\tau_{0p,l} = \cos\{\pi p/N_l\}$ ($p = 1, 2, \dots, N_l - 1$) – соответственно корни полиномов Чебышева первого и второго рода степени N_l ; $g_l(\tau) = (H_l/2)\tau + (a_l + b_l)/2$ – отображение отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[a_l, b_l]$. Регулярные интегралы по отрезку $[a_l, b_l]$ заменим N_l -точечной квадратурной формулой типа Гаусса [20] с весовыми коэффициентами π/N_l и узлами $z_{j,l}$, которые определены выше (для регулярных интегралов по отрезкам $[a_s, b_s]$ в приведенных здесь обозначениях следует индекс l поменять на s). В результате получим следующую

систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\pi}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} \gamma_{j,l}^m \left\{ \frac{1}{2\pi(\bar{z}_{0p,l} - \bar{z}_{j,l})} + K_{plj}^m \right\} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{N_s} \frac{\pi}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \gamma_{j,s}^m \left\{ \frac{1}{2\pi(\bar{z}_{0p,l} - \bar{z}_{j,s})} + K_{plj}^m \right\} = V_l^m;$$

$$\sum_{j=1}^{N_l} \gamma_{j,l}^m = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N;$$

$$V_l^{(m)} Z_l^{(m)} + \varepsilon_m \pi a \rho \omega i E_l^{(m)} \frac{\pi}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} \bar{z}_{j,l} \gamma_{j,l}^m = N_l^{(m)} U_l;$$

$$m = 0, 1, \quad p = 1, 2, \dots, N_l - 1, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (30)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\bar{z}_{j,l} = z_{j,l}/a$; $\bar{z}_{0p,l} = z_{0p,l}/a$; $\gamma_{j,l}^m = \gamma_l^{(m)}(\bar{z}_{j,l})$, $K_{plj}^m = a K_{reg}^{(m)}(\bar{z}_{0p,l}, \bar{z}_{j,s})$.

Система линейных алгебраических уравнений (30) при фиксированном значении m содержит $\sum_{l=1}^N N_l + N$ уравнений относительно $\sum_{l=1}^N N_l$ неизвестных узловых значений $\gamma_{j,l}^m$ искомых функций $\gamma_l^{(m)}(z)$ и N неизвестных значений колебательных скоростей колец $V_l^{(m)}$. После решения системы (30), используя соотношения (20)–(22), (25) и (28), можно через величины $\gamma_{j,l}^m$ и $V_l^{(m)}$ выразить все характеристики как колец, так и решетки в целом [3]. Например, нетрудно показать [3], что такие важные характеристики как излучаемая мощность колец в решетке и диаграмма направленности решетки соответственно определяются следующими простыми аналитическими выражениями:

$$W_l^{(m)} = -\rho_0 c_0 S_l V_l^{(m)} \frac{\varepsilon \pi k a i}{16} \mathbf{Re} C_{1,l}^{(m)},$$

$$D^{(m)}(\theta, \varphi) = (-i)^m \cos \theta J_m'(ka \cos \theta) \cos m \varphi \times$$

$$\times \sum_{l=1}^N \frac{H_l}{a} \exp \left[-ik \frac{a_l + b_l}{2} \sin \theta \right] \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{N_l-1} (-i)^{n+1} C_{n,l}^{(m)} \frac{J_n \left(\frac{k H_l}{2} \sin \theta \right)}{\frac{k H_l}{2} \sin \theta}$$

Здесь $S_l = 2\pi a H_l$ – площадь боковой поверхности l -го кольца; $C_{n,l}^{(m)}$ ($n = 1, 2, \dots, N_l - 1$) – коэффициенты интерполяционного многочлена для функции

$\gamma_l^{(m)}(z)$ по полиномам Чебышева первого рода на интервале $[a_l, b_l]$, которые легко можно вычислить, используя величины $\gamma_{j,l}^m$ [3].

Таким образом, в рамках принятых допущений получено строгое решение задачи об излучении звука конечной решеткой, состоящей из открытых пьезокерамических колец, когда заданными являются электрические напряжения на электродах колец. Решение аналитически удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условиям излучения на бесконечности и конечности энергии вблизи концов колец, а также условиям сопряжения звукового поля на границе частичных подобластей. Решение также удовлетворяет и условию непрерывности колебательной скорости на границе раздела сред “пьезокерамические кольца – акустическая среда”, однако реализация этого удовлетворения обеспечивается численно с необходимой степенью точности. Точность выполнения последнего условия и определяет ошибку дискретизации всей “сквозной” задачи.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С целью иллюстрации эффективности предложенного метода решения “сквозной” задачи и его возможностей при качественном и количественном анализе основных параметров решеток из открытых пьезокерамических колец были проведены расчеты в широком диапазоне изменения частот, шага решеток, а также количества колец в решетках. Численно метод был реализован для эквидистантных решеток из идентичных пьезокерамических колец, на электроды которых подавалось одинаковое электрическое напряжение, т.е. полагалось: $d_l = d$, $H_l = H$, $U_l = U_0$ для $l = 1, 2, \dots, N$. Кроме того, считалось, что решетки погружены в жидкость с волновым сопротивлением $\rho_0 c_0 = 1.5 \cdot 10^6$ кг/(м²·с) и кольца изготовлены из пьезокерамики ЦТБС-3, параметры которой были приняты равными: $\rho = 7200$ кг/м³, $s_{11}^E = 11.3$ м²/Н. Для того, чтобы уменьшить объем вычислений при дискретизации системы функциональных уравнений (29), интегралы в этой системе заменялись соответствующими квадратурными формулами одного и того же порядка N_0 .

Анализ ошибки дискретизации “сквозной” задачи для решеток с параметрами $H/2a \leq 0.3$, $d/a \geq 0.01$ в диапазоне частот $\omega/\omega_0^{(m)} \leq 1.5$ показал, что достаточно взять $5 \leq N_0 \leq 10$, чтобы локальная относительная ошибка в удовлетворении условия непрерывности комплексной амплитуды колебательной скорости на границе разде-

ла сред “пьезокерамические кольца – акустическая среда” не превышала 3% по поверхности всех колец (включая их концы). При этом порядок квадратурных формул N_0 не зависит от количества колец в решетке, а определяется значениями параметров $H/2a$ и d/a : чем выше кольца (или меньше расстояние между ними), тем больше значения N_0 .

Ниже анализируются частотные зависимости для нормированных значений колебательной скорости $\overline{V}_l^{(m)}$ и излучаемой мощности $\overline{W}_l^{(m)}$ колец (как одиночных, так и в составе многоэлементных симметричных относительно плоскости $z = 0$ решеток), а также полной излучаемой мощности решеток $\overline{W}^{(m)} = \sum_{l=1}^N \overline{W}_l^{(m)}$. Значения колебательной скорости и излучаемой мощности соответственно нормированы относительно следующих величин:

$$V_0^{(m)} = \frac{N^{(m)} U_0}{\rho_0 c_0 S}, \quad W_0^{(m)} = \frac{(N^{(m)} U_0)^2}{\rho_0 c_0 S},$$

где S , $N^{(m)}$ – площадь боковой поверхности и коэффициент электромеханической трансформации колец. Поскольку рассматриваются симметричные относительно плоскости $z = 0$ решетки, то на рисунках представлены количественные данные только для колец, которые расположены ниже плоскости $z = 0$, а для решеток из нечетного количества колец еще и для центрального кольца.

5.1. Одиночные кольца

Особенностью колебаний одиночного пьезокерамического кольца в акустической среде является то, что скорость его точки приведения зависит от частоты, в то время как распределения колебательной скорости по поверхности кольца (в силу принятых выше допущений) не зависит от частоты и является заданной функцией относительно осевой и окружной координат. Следовательно, импеданс излучения (величина, которая полностью определяется распределением колебательной скорости и выбором точки приведения) одиночного кольца равен импедансу излучения одиночного цилиндрического излучателя, геометрические размеры, распределения колебательной скорости по поверхности и выбор точки приведения которого совпадают с соответствующими характеристиками кольца. Это обстоятельство позволяет эффективно исследовать резонансные свойства системы “одиночное пьезокерамическое кольцо – акустическая среда”, используя для пульсирующего кольца формулу (16), а для осциллирующе-

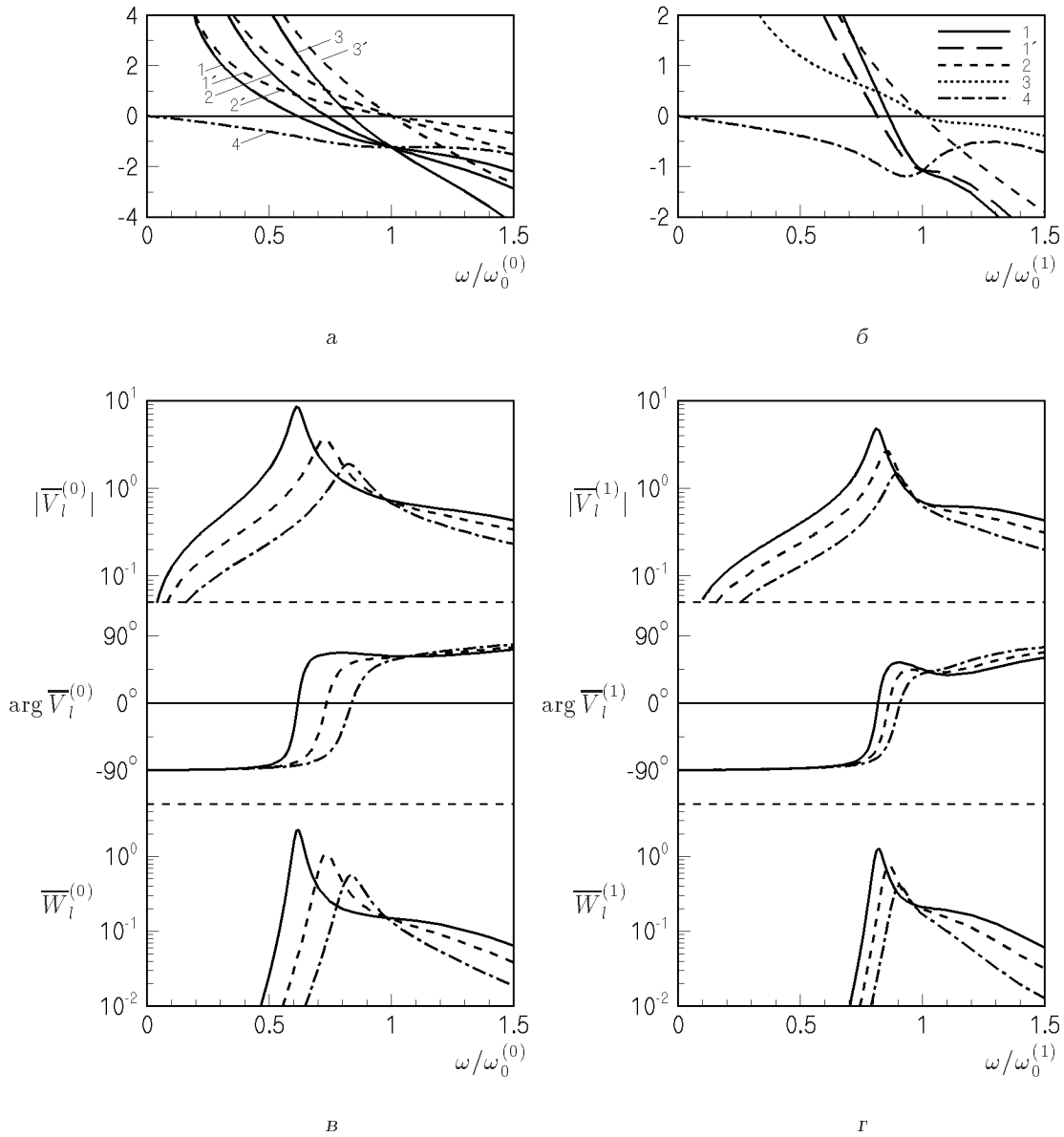


Рис. 3. К анализу резонансных свойств одиночных колец (а, б) и частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности одиночных пульсирующих (в) и осциллирующих (г) колец при разных значениях параметра h/a : а – $m = 0$, $H/2a = 0.3$; 1, 2, 3 – $\text{Im}(Z_{\text{мех}}^{(0)} + Z_{\text{изл}}^{(0)})/(\rho_0 c_0 S)$ и 1', 2', 3' – $\text{Im} Z_{\text{мех}}^{(0)}/(\rho_0 c_0 S)$ соответственно при $h/a = 0.05, 0.1, 0.2$; 4 – $\text{Im} Z_{\text{изл}}^{(0)}/(\rho_0 c_0 S)$; б – $m = 1$, $H/2a = 0.3$; 1 – $\text{Im}(Z_{\text{мех}}^{(1)} + Z_{\text{изл}}^{(1)} + Z_{\text{доп}}^{(1)})/(\rho_0 c_0 S)$; 1' – $\text{Im}(Z_{\text{мех}}^{(1)} + Z_{\text{изл}}^{(1)})/(\rho_0 c_0 S)$; 2 – $\text{Im} Z_{\text{мех}}^{(1)}/(\rho_0 c_0 S)$; 3 – $\text{Im} Z_{\text{доп}}^{(1)}/(\rho_0 c_0 S)$; 4 – $\text{Im} Z_{\text{изл}}^{(1)}/(\rho_0 c_0 S)$; в, г – $H/2a = 0.3$, $Q = 15$; сплошные кривые – $h/a = 0.05$, штриховые кривые – $h/a = 0.1$, штрих-пунктирные кривые – $h/a = 0.2$

го – (18). С этой целью обратимся к рис. 3, а и б, на которых представлены реактивные части импедансов, входящих в формулы (16) и (18).

Частотные зависимости импеданса излучения открытого цилиндрического излучателя подробно изучены в работе [3], где показано, что для низких

цилиндрических излучателей ($H/2a < 0.66$ при $m = 0$ и $H/2a < 0.42$ при $m = 1$) в интересующем нас диапазоне частот величина $\text{Im} Z_{\text{изл}}^{(m)}$ не меняет свой знак и имеет характер массы (см. кривые 4 на рис. 3, а и б). Следовательно, упругость внутреннего объема жидкости одиночных колец слабо

влияет на их резонансные свойства. Поэтому резонансные свойства таких колец, в основном, определяются их собственными механическими импедансами и присоединенной массой жидкости, соколеблющейся с кольцами. Величина $\text{Im } Z_{\text{мех}}^{(m)}$ до частоты $\omega_0^{(m)}$ всегда имеет характер упругости, а после нее – массы. Наклон кривой, описывающей зависимость $\text{Im } Z_{\text{мех}}^{(m)}$ от частоты, зависит от параметра h/a , который характеризует толщину кольца (например, для пульсирующего кольца см. кривые 1'–3' на рис. 3, а). Как видно, чем меньше значение параметра h/a , тем сильнее эти кривые прижимаются к оси абсцисс, что ведет к снижению резонансной частоты колец в жидкости (см. кривые 1–3 на рис. 3, а). Этот факт убедительно подтверждается как для пульсирующих, так и для осциллирующих колец частотными зависимостями модуля колебательной скорости и излучаемой мощности, которые имеют только один резонансный максимум, и частотными зависимостями фазы колебательной скорости, которая лишь один раз пересекает ось абсцисс (см. рис. 3, в и г). При этом, вблизи частоты резонанса, по мере уменьшения значения h/a , растет колебательная скорость колец и, как следствие, возрастает их излучаемая мощность. Как видно из рис. 3 (с учетом соотношений (8)) диапазон изменения резонансной частоты (нулевые значения фазовой характеристики) при $0.05 \leq h/a \leq 0.2$ примерно вдвое уже для осциллирующего кольца, чем для пульсирующего. Отметим, что высота и острота резонансных максимумов на рис. 3 зависит также и от добротности: чем она больше, тем уже и выше резонансный максимум. Обратим внимание на тот факт, что “незакрепленное” осциллирующее кольцо отличается (в смысле резонансных свойств) от такого же “закрепленного” кольца (ср. кривые 1 и 1' на рис. 3, б). Причем, как показывают расчеты, чем выше кольцо, тем сильнее это отличие.

Высота кольца незначительно влияет на его резонансные свойства, поскольку чем ниже кольцо, тем сильнее прижимаются к оси абсцисс кривые $\text{Im } Z_{\text{мех}}^{(m)}$ и $\text{Im } Z_{\text{изл}}^{(m)}$.

5.2. Двухэлементные решетки

Резонансные свойства колец в составе двухэлементных решеток также можно эффективно исследовать, используя (как и в случае одиночных колец) формулы (16) и (18). Поэтому не будем подробно анализировать слагаемые в этих формулах, а отметим наиболее важные особенности излучения звука кольцами в составе двухэлементных

решеток.

Динамика изменения частотных зависимостей колебательной скорости и излучаемой мощности колец в составе двухэлементных решеток относительно параметров $H/2a$, h/a и Q качественно остается такой же как и в случае одиночных колец. Однако в случае двухэлементных решеток частотные характеристики колец зависят еще и от параметра d/a , характеризующего расстояния между кольцами. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Как видно из рис. 4, при малых значениях параметра d/a частотные характеристики колец в составе двухэлементных решеток при $m = 0$ и при $m = 1$ качественно отличаются. Если фазовая характеристика пульсирующих колец лишь один раз пересекает ось абсцисс и выпукла вниз в высокочастотной области (как и в случае одиночных колец), то фазовая характеристика осциллирующих колец уже три раза пересекает ось абсцисс. Следовательно, осциллирующие кольца в составе двухэлементных решеток при малых значениях параметра d/a имеют две резонансные частоты и расположенную между ними антирезонансную частоту. При этом амплитудные характеристики для осциллирующих колец характеризуются двумя резонансными максимумами (см. сплошные кривые на рис. 4, б). Этот факт не является неожиданным, а связан с тем, что резонансные свойства осциллирующих колец в составе двухэлементных решеток могут определяться не только их собственными механическими импедансами и массой жидкости, соколеблющейся с кольцами, а также и упругими свойствами внутреннего объема жидкости решетки в целом.

По мере увеличения расстояния между пульсирующими кольцами сужается диапазон излучаемых частот, резонанс смещается в область более высоких частот, а фазовые характеристики колец выравниваются в высокочастотной области и принимают вид фазовых характеристик простого осциллятора. При $d/a \approx 2.0$ частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности пульсирующих колец в составе двухэлементных решеток практически совпадают с соответствующими зависимостями для таких же одиночных колец (ср. штрих-пунктирные кривые и жирные точки на рис. 4, а). При увеличении расстояния между осциллирующими кольцами они теряют свои резонансные свойства в высокочастотной области и при $d/a \approx 1.5$ их частотные характеристики практически совпадают с соответствующими частотными характеристиками для одиночных осциллирующих колец.

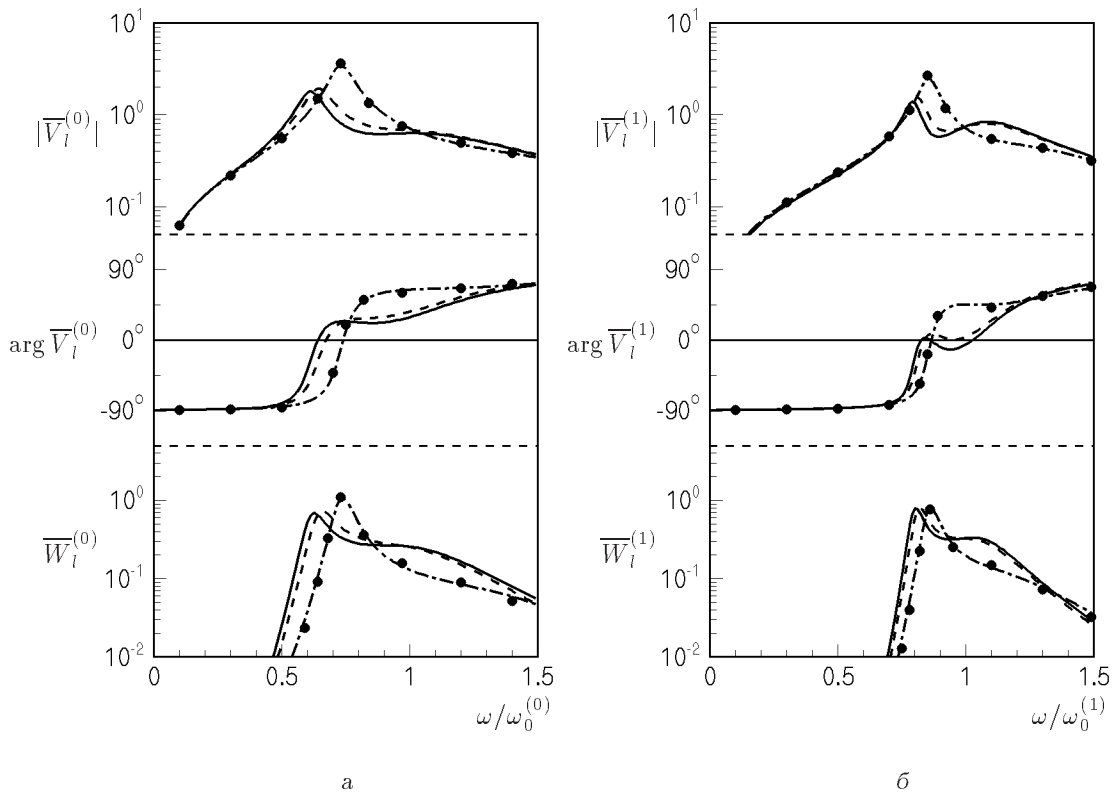


Рис. 4. Частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности пульсирующих (а) и осциллирующих (б) колец в составе двухэлементных решеток при разных значениях параметра d/a : $H/2a = 0.3$, $h/a = 0.1$, $Q = 15$; сплошные кривые – $d/a = 0.01$, штриховые кривые – $d/a = 0.05$, штрихпунктирные кривые – $d/a = 2.0$ при $m = 0$ и $d/a = 1.5$ при $m = 1$, жирные точки – зависимости для соответствующих одиночных колец

5.3. Многоэлементные решетки

Вначале рассмотрим трехэлементные решетки, являющиеся ключевыми в понимании основных закономерностей излучения звука многоэлементными решетками. Особенность этих решеток состоит в том, что центральное и крайние кольца нагружены акустической средой по-разному, даже при условии равенства разности электрических напряжений на их электродах. Именно в этом и состоит принципиальное отличие трехэлементной решетки от двухэлементной. Учитывая это, обратимся к рис. 5, на котором представлены частотные зависимости величин $|\overline{V}_i^{(m)}|$, $\arg \overline{V}_i^{(m)}$ и $\overline{W}_i^{(m)}$ при малом значении параметра $d/a = 0.01$ и при отсутствии механических потерь в материале колец ($Q \rightarrow \infty$). Здесь для решетки из пульсирующих колец могут быть выделены три зоны: первая (низкочастотная) зона $0 < \omega/\omega_0^{(0)} < 0.45$, вторая (резонансная) зона $0.45 < \omega/\omega_0^{(0)} < 1.0$ и третья (вы-

сокочастотная) зона $\omega/\omega_0^{(0)} > 1.0$; и соответственно для решетки из осциллирующих колец: первая – $0 < \omega/\omega_0^{(1)} < 0.75$, вторая – $0.75 < \omega/\omega_0^{(1)} < 1.0$ и третья – $\omega/\omega_0^{(1)} > 1.0$.

Как видно, в первой зоне с понижением частоты, а в третьей зоне с повышением – кольца начинают двигаться синфазно, при этом выравниваются их скорости и излучаемые мощности. Такая динамика колец объясняется тем, что при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega > \omega_0$ неограниченно растет модуль собственных механических импедансов колец, в то время как их импедансы излучения имеют конечные значения. Следовательно, в первой и третьей зонах акустическое взаимодействие колец весьма незначительно, и характеристики колец, в основном, определяются их собственными механическими импедансами.

Рассмотрим теперь резонансную зону, где собственные механические импедансы колец сравнимы с их импедансами излучения, и существен-

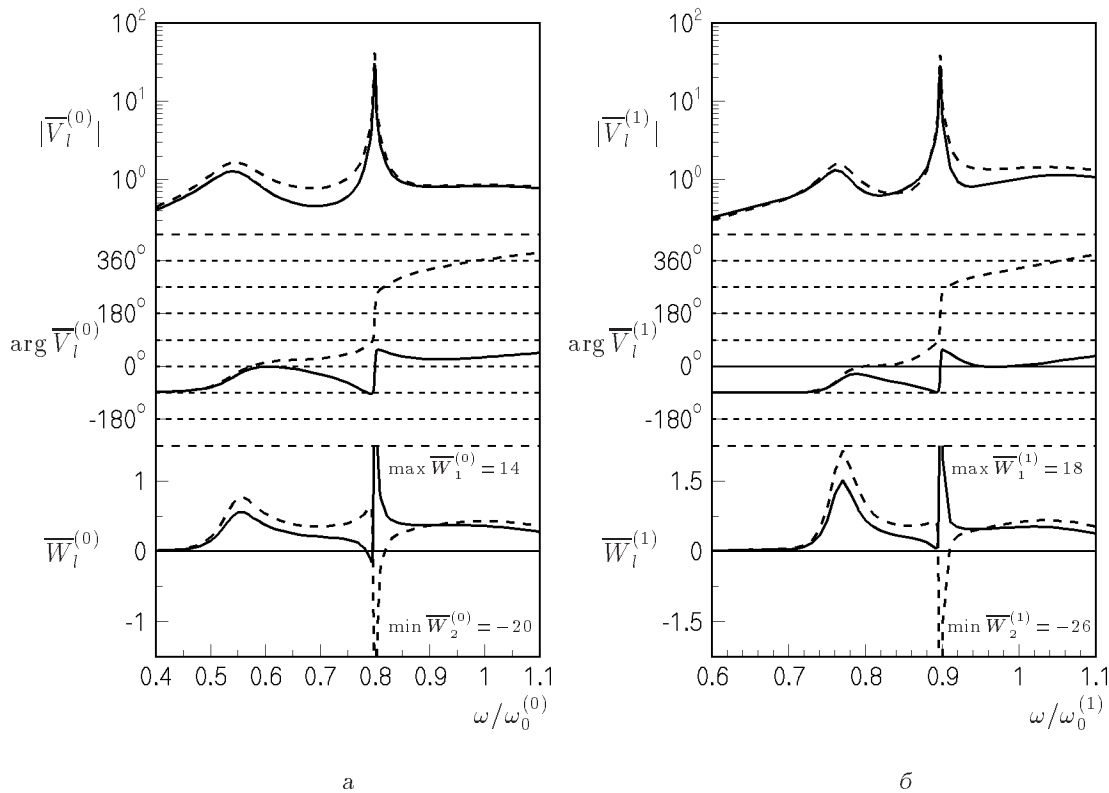


Рис. 5. Частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности пульсирующих (а) и осциллирующих (б) колец в составе трехэлементных решеток при малом расстоянии между кольцами: $H/2a = 0.3$, $d/a = 0.01$, $h/a = 0.1$, $Q = 15$; сплошные кривые – зависимости для крайних, штриховые кривые – зависимости для центральных колец

ную роль начинает играть акустическое взаимодействие колец. Действительно, в этой зоне характеристики центрального кольца как качественно, так и количественно могут существенно отличаться от аналогичных характеристик крайних колец. Как видно, в начале резонансной зоны имеет место увеличение колебательных скоростей и излучаемых мощностей колец. При этом различие в значениях этих величин для крайних и центрального колец относительно невелики и колеблются они практически синфазно с значениями фаз, близкими к нулю. Эти факты указывают на наличие резонанса, который вызван продольными колебаниями объема жидкости внутри решетки.

Далее различия в значениях величин $|V_i^{(m)}|$ для всех колец продолжают оставаться небольшими, однако разность фаз скоростей быстро растет с увеличением частоты. В результате энергетическая эффективность решетки падает. Самые драматические события происходят в сравнительно узкой зоне (для пульсирующей решетки – $0.78 <$

$< \omega/\omega_0^{(0)} < 0.82$, а для осциллирующей решетки – $0.88 < \omega/\omega_0^{(1)} < 0.92$). Здесь в окрестности частоты $\omega/\omega_0^{(0)} \approx 0.79$ разность фаз скоростей пульсирующих колец приближается к 180° , причем вектор скорости крайних колец переходит в третий квадрант комплексной плоскости. Это означает, что сила, действующая на эти кольца вдоль радиуса со стороны внешнего акустического поля, больше радиальной составляющей силы внутренних механических напряжений колец, вызванных подведенным электрическим полем. Следовательно, такие кольца фактически поглощают энергию из внешнего акустического поля. В этом легко убедиться, если обратиться к кривым для мощности излучения. Для решетки из осциллирующих колец при $\omega/\omega_0^{(1)} \approx 0.89$ разность фаз центрального и крайнего колец тоже приближается к 180° , но лишь с той разницей, что вектор скорости не переходит в третий квадрант комплексной плоскости. Далее (при $\omega/\omega_0^{(0)} \approx 0.8$ для пульсирующей решетки и при $\omega/\omega_0^{(1)} \approx 0.9$ для осциллирующей решетки

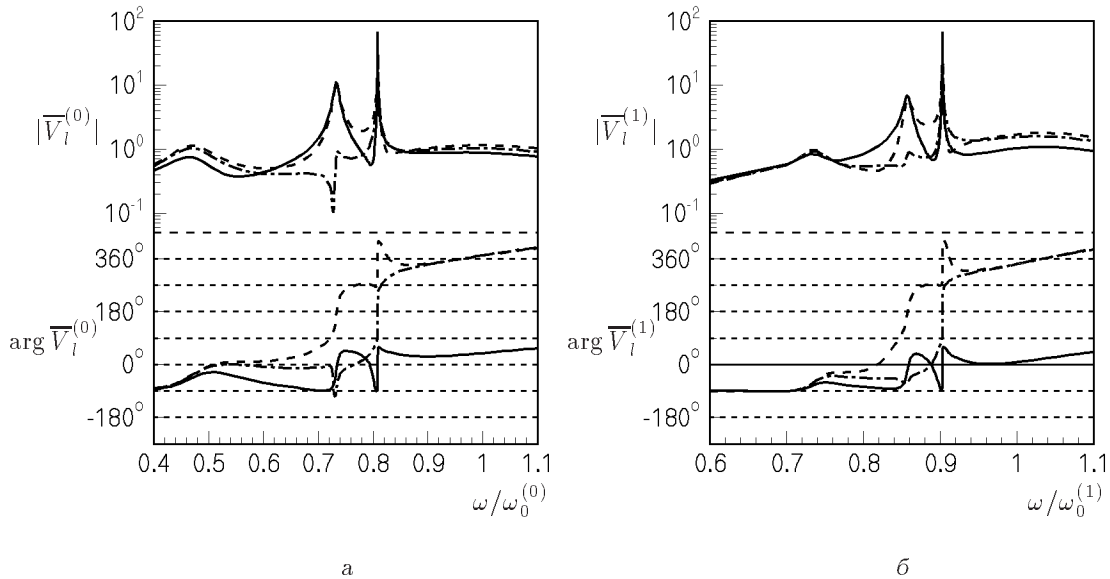


Рис. 6. Частотные зависимости колебательной скорости пульсирующих (а) и осциллирующих (б) колец в составе пятиэлементных решеток при малом расстоянии между кольцами: $H/2a = 0.3$, $d/a = 0.01$, $h/a = 0.1$, $Q \rightarrow \infty$; сплошные кривые – зависимости для крайних, штрих-пунктирные кривые – зависимости для промежуточных и штриховые кривые – зависимости для центральных колец

ки) происходит скачок фаз колебательных скоростей колец, но разность фаз все равно остается близкой к 180° . При этом вектор колебательной скорости центрального кольца уходит в левую полуплоскость комплексной плоскости. Следовательно, теперь уже центральное кольцо начинает поглощать энергию из поля, причем весьма эффективно. При этом суммарная мощность излучения решетки остается значительной. Таким образом, в резонансной зоне есть узкая полоса частот, где центральное кольцо колеблется в противофазе с крайними кольцами. Это указывает на возбуждение второй формы продольных колебаний внутреннего объема жидкости решетки.

В конце резонансной зоны колебательные скорости и излучаемые мощности колец выравниваются, а наблюдаемый здесь резонансный пик вблизи частоты $\omega/\omega_0^{(m)} \approx 1$ вызван резонансом самих колец.

Увеличение числа колец в решетке до четырех качественно не меняет динамику изменения частотных характеристик колец. Количественные изменения в этом случае связаны в основном с расширением резонансной зоны. При увеличении числа колец в решетках до пяти динамика изменения частотных зависимостей в резонансной зоне заметно усложняется. Частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности для

колец в составе пятиэлементных решеток приведены на рис. 6 при $d/a = 0.01$ и $Q \rightarrow \infty$. Как и следовало ожидать, максимум модуля колебательной скорости, связанный с колебаниями внутреннего объема жидкости решетки на первой продольной моде, сдвигается вниз по частоте ($\omega/\omega_0^{(0)} \approx 0.48$ при $m = 0$ и $\omega/\omega_0^{(1)} \approx 0.74$ при $m = 1$). В дальнейшем, по мере возрастания частоты излучаемая решеткой мощность падает за счет быстрого роста разности фаз колебательных скоростей колец. Наконец, вблизи частоты $\omega/\omega_0^{(0)} \approx 0.73$ для пульсирующих и $\omega/\omega_0^{(1)} \approx 0.82$ для осциллирующих колец – промежуточные кольца практически заторможены, а центральное и крайние кольца колеблются в противофазе. Следовательно, на этих частотах возбуждается вторая форма колебаний внутреннего объема жидкости решетки. Третья форма колебаний внутреннего объема жидкости решетки возбуждается при $m = 0$ вблизи частоты $\omega/\omega_0^{(0)} \approx 0.81$, а при $m = 1$ вблизи частоты $\omega/\omega_0^{(1)} \approx 0.9$. Здесь происходит резкая перестройка фаз колебательных скоростей, и излученная решеткой акустическая энергия обеспечивается за счет центрального и крайних колец, которые теперь колеблются в фазе (но одновременно в противофазе с промежуточными кольцами, которые интенсивно поглощают энергию из поля).

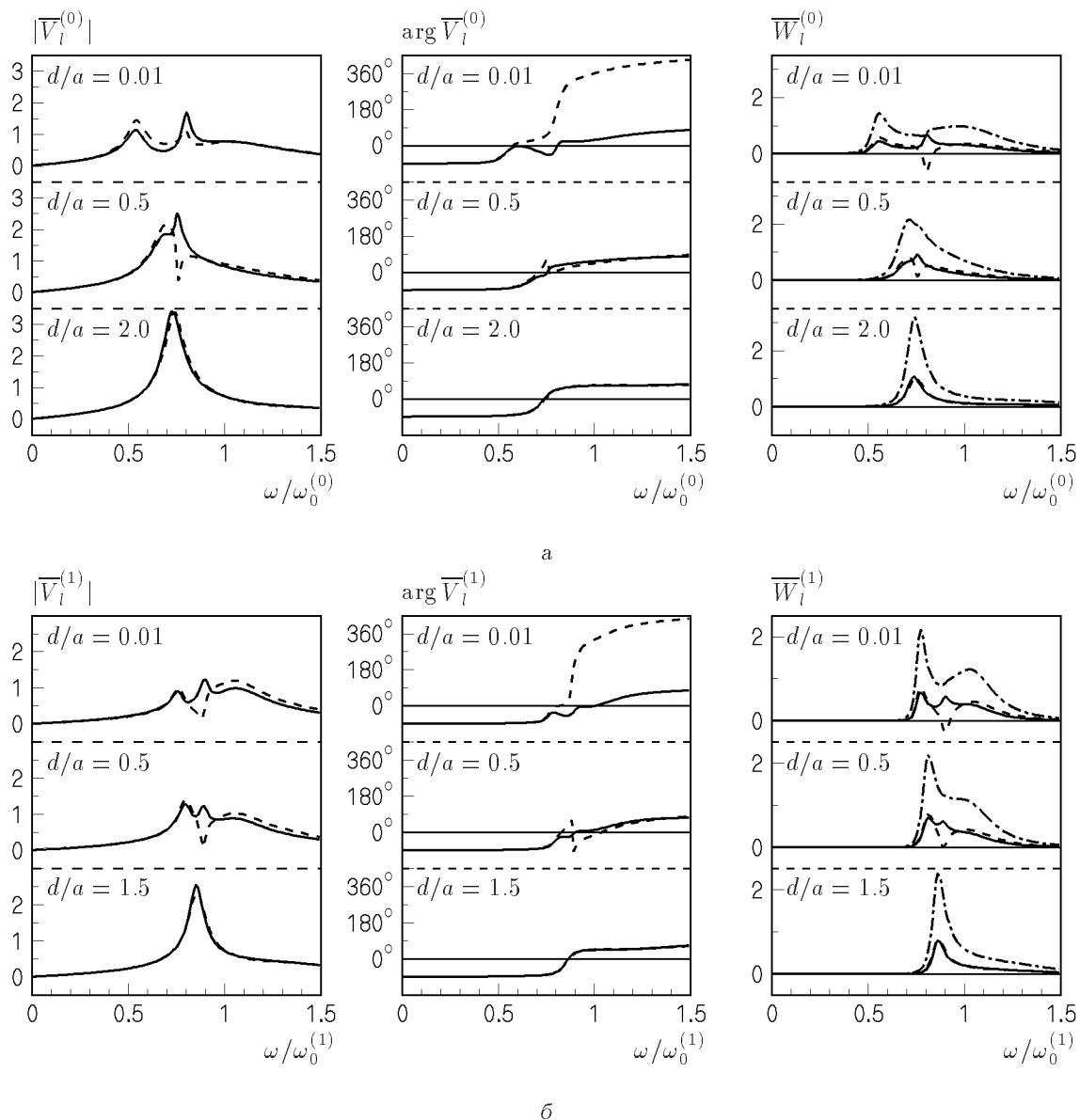


Рис. 7. Частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности пульсирующих (а) и осциллирующих (б) колец в составе пятиэлементных решеток при разных значениях параметра d/a : $H/2a = 0.3$, $h/a = 0.1$, $Q \rightarrow \infty$; сплошные кривые – зависимости для крайних, штриховые кривые – зависимости для центральных колец; штрих-пунктирные кривые – зависимости для полной излучаемой мощности решеток

При дальнейшем увеличении частоты колебательной скорости всех колец (как и в случае трехэлементных решеток) выравниваются и растут при $\omega/\omega_0^{(m)} \approx 1$ за счет резонанса колебаний самих колец.

Обобщая приведенные выше данные для решеток из трех и пяти колец, а также результаты дополнительных расчетов для решеток из большего

числа колец, можно сделать вывод, что количество возбуждаемых продольных форм колебаний внутреннего объема жидкости решеток при малых значениях параметра d/a определяется величиной $(N + 1)/2$ – для решеток из нечетного количества колец и $N/2$ – для решеток из четного количества колец, где N – число колец в решетках. При этом только вблизи частоты первой фор-

мы все кольца в решетке эффективно излучают акустическую энергию, а вблизи частот последующих форм всегда найдется кольцо (таких колец может быть несколько), которое поглощает энергию из среды, тем самым снижая эффективность решетки в целом. Учитывая это обстоятельство, можно предположить, что решетки с четным количеством колец предпочтительны с точки зрения практики, поскольку при одинаковом количестве возбуждаемых продольных форм колебаний внутреннего объема жидкости решетки у них шире диапазон излучаемых частот.

Теперь выясним характер влияния параметров h/a , Q и d/a на частотные характеристики колец в многоэлементных решетках. Как показывают расчеты, увеличение относительной толщины колец h/a приводит к сглаживанию амплитудных характеристик колец, в то время как фазовые характеристики сохраняют свои основные черты. При этом резонансная зона смещается в область более высоких частот, и максимальные значения колебательных скоростей и излучаемых мощностей колец заметно падают. Такая же картина наблюдается и при учете механических потерь в материале колец, с той лишь разницей, что резонансная зона не меняет своего местоположения (ср. данные при $Q \rightarrow \infty$ на рис. 5 и соответствующие данные при $Q = 15$ на рис. 7).

Динамику изменения частотных зависимостей колебательной скорости и излучаемой мощности колец в многоэлементных решетках при разных значениях параметра d/a рассмотрим на примере трехэлементных решеток. Соответствующие зависимости приведены на рис. 7. Как видно, по мере увеличения расстояния между оболочками резонансная зона сужается. При этом разность фаз скоростей колец в резонансной зоне уменьшается и скорость противофазного движения центрального кольца падает вплоть до затормаживания его движения на соответствующей частоте.

При дальнейшем увеличении значения параметра d/a вектор скорости центрального кольца уже не покидает первого и четвертого квадрантов комплексной плоскости и, следовательно, во всем рассматриваемом диапазоне частот звук одновременно излучают все кольца. Сужение резонансной зоны ведет к слиянию резонансных максимумов частотных зависимостей модуля колебательной скорости и излучаемой мощности сначала для крайних колец, а затем и для центрального кольца. При $d/a \approx 2$ пульсирующие, а при $d/a \approx 1.5$ осциллирующие кольца уже слабо взаимодействуют по полю и излучают звук практически как соответствующие одиночные кольца. Обратим внимание на

то, что с увеличением значения параметра d/a частотная характеристика полной излучаемой мощности решеток становится менее широкополосной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен строгий метод решения “сквозной” электроакустической задачи об излучении звука конечными решетками из открытых пьезокерамических колец. Используя априорную информацию об особенностях звукового поля вблизи концов колец, построен эффективный численный алгоритм для получения количественных данных для решеток, состоящих из пульсирующих или осциллирующих колец.

Исследованы частотные зависимости колебательной скорости и излучаемой мощности колец (как одиночных, так и в составе многоэлементных решеток) в зависимости от их добротности, толщины и высоты, а также количества колец в решетках. Установлено, что акустическое взаимодействие между кольцами существенно влияет на их параметры, когда количество колец в решетках равно или больше трех и расстояния между кольцами малы по сравнению с их радиусом. При этом могут наблюдаться такие эффекты как торможение колец, противофазное движение колец, а также поглощение энергии из поля отдельными кольцами. Причем при изменении частоты указанные эффекты могут проявляться у разных колец. Вместе с этим, полная излучаемая акустическая мощность решеток остается высокой в широком диапазоне частот, который характеризуется двумя резонансными максимумами – низкочастотным (за счет резонанса внутреннего объема жидкости решеток на первой продольной форме колебаний) и высокочастотным (за счет резонанса самих колец).

Отметим, что частотные характеристики пульсирующих и осциллирующих колец в составе одинаковых многоэлементных решеток сходны. Однако зоны частот, где наблюдается наибольшая эффективность решеток, естественно, разные и отличаются примерно на пол-октавы. Этот факт является важным для практики, поскольку открывает возможность за счет простого электрического переключения электродов колец существенно расширить диапазон излучаемых частот.

В заключение отметим, что представленный в настоящей работе метод можно обобщить и для решеток из открытых пьезокерамических цилиндрических оболочек. Для этого достаточно уравнения движения колец в системе (29) заменить соответствующими уравнениями движения средин-

ной поверхности оболочек. Именно при такой формулировке “сквозной” задачи оказывается возможным учесть взаимодействие по полю бочкообразных, изгибных и антисимметричных форм колебаний рабочей поверхности реальных цилиндрических излучателей при их работе в составе многоэлементных решеток.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. В. Вовку за постановку задачи и постоянный интерес к данной работе. Без его помощи вряд ли удалось бы выполнить эту работу.

1. *Helmholtz H.* Theorie der luftschwingungen in Röhren mit offenen enden // J. reine angew. mathem.– 1860.– **57**, N. 1.– С. 1–72.
2. *Strutt J. W. (Lord Rayleigh)* On the theory of resonance // Phil. Trans. Roy. Soc.– 1871.– **161**.– P. 77–118.
3. *Басовский В. Г., Вовк И. В.* Излучение звука жесткой открытой оболочкой конечной длины, совершающей произвольные радиальные колебания // Акуст. журн.– 1997.– **43**, N 5.– С. 586–593.
4. *Балабаев С. М.* Компьютерное моделирование и анализ основных параметров цилиндрической гидроакустической антенны // Акуст. журн.– 1998.– **44**, N 1.– С. 5–10.
5. *McMahon G. W.* Performance of open ferroelectric ceramic cylinders // J. Acoust. Soc. Amer.– 1964.– **36**, N 3.– P. 528–533.
6. *Martinez R.* A boundary integral formulation for thin-walled shapes of revolution // J. Acoust. Soc. Amer.– 1990.– **87**, N 2.– P. 523–531.
7. *Scharstein R. W.* Acoustic scattering by an open-ended hard circular tube of finite length // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– **92**, N 6.– P. 3337–3342.
8. *Smith R. R., Hunt J. T., Barach D.* Finite element analysis of acoustically radiating structures with applications to sonar transducers // J. Acoust. Soc. Amer.– 1973.– **54**, N 5.– P. 1277–1288.
9. *Балабаев С. М., Ивина Н. Ф.* Анализ пьезопреобразователей комбинированным методом конечных и граничных элементов // Акуст. журн.– 1996.– **42**, N 2.– С. 172–178.
10. *Rogers P. H.* Mathematical model for a free-flooded piezoelectric cylinder transducer // J. Acoust. Soc. Amer.– 1986.– **80**, N 1.– P 13–18.
11. *Вовк И. В.* Излучение звука конечной решеткой, состоящей из открытых цилиндрических пьезокерамических оболочек // Акуст. журн.– 1992.– **38**, N 3.– С. 427–434.
12. *Вовк И. В., Гринченко В. Т.* О расширении возможностей метода частичных областей применительно к задачам излучения и рассеяния волн // Акуст. журн.– 1989.– **35**, N 1.– С. 29–36.
13. *Ляв А.* Математическая теория упругости.– М.– Л.: ОНТИ, 1935.– 674 с.
14. *Басовский В. Г., Гомидко А. М., Мелешко В. В.* Излучение звука жесткой цилиндрической оболочкой конечной длины // Акуст. журн.– 1989.– **35**, N 6.– С. 983–989.
15. *Вовк И. В., Басовский В. Г.* Колебания пьезокерамической цилиндрической оболочки со свободными концами // Годичный отчет Института гидромеханики НАН Украины за 1996 год.– К., 1996.– С. 46–47.
16. *Gordon R. S., Parad L., Butler J. L.* Equivalent circuit of a ceramic ring transducer operated in dipole mode // J. Acoust. Soc. Amer.– 1975.– **58**, N 6.– P. 1311–1314.
17. *Берлинкур Д., Керран Д., Жарре Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т. 1. Часть А.– М.: Мир, 1966.– С. 204–326.
18. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы.– М.: Мир, 1971.– 558 с.
19. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках.– К.: Наук. думка, 1986.– 240 с.
20. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана.– М.: Наука, 1979.– 832 с.*
21. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций.– М.: Наука, 1977.– 288 с.
22. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.– М.: Наука, 1977.– 640 с.
23. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений.– М.: Наука, 1970.– 370 с.
24. *Вовк И. В., Гринченко В. Т.* Излучение звука набором соосных пьезокерамических оболочек // Акуст. журн.– 1991.– **37**, N 2.– С. 259–269.
25. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости и электродинамике.– М.: Наука, 1985.– 256 с.