

# РАССЕЯНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН НА ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

И. Т. СЕЛЕЗОВ, В. В. ЯКОВЛЕВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 14.01.98*

Представлены линеаризованные уравнения движения пространственно-неоднородной электропроводящей среды в магнитном поле. На основе улучшенного приближения слабой проводимости построены и анализируются задачи рассеяния плоских упругих волн на магнитоупругом включении и задачи рассеяния цилиндрических магнитоупругих волн на магнитоакустической неоднородности с радиально переменной плотностью.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема рассеяния акустических и электромагнитных волн абсолютно жесткими рассеивателями канонической формы получила большое развитие как в плане математических подходов, так и в экспериментальных исследованиях. В случае же прозрачных рассеивателей со свойствами, зависящими от координат или рассеивателей неканонической формы, получено меньше результатов, что обусловлено, в первую очередь, сложностью математического анализа такого рода задач. Исследование же рассеяния упругих волн осложняется необходимостью разделения уравнений теории упругости даже в случае канонических областей, а в случае неканонических областей набор криволинейных систем координат, допускающих такое разделение, существенно ограничен [1]. Что касается неоднородных упругих сред, то здесь возможности разделения уравнений теории упругости еще более ограничены. Один из возможных популярных подходов для рассеивателей либо малого размера, либо малой плотности – это борновские аппроксимации [1]. Другой, более общий подход, свободный от указанных выше ограничений, был развит на основе метода обобщенных степенных рядов [2].

В статье рассматриваются некоторые задачи теории рассеяния волн на локальных неоднородностях в электропроводящем упругом теле, помещенном в постоянное магнитное поле. Рассмотренные задачи представляют как самостоятельный интерес, так и прикладной, связанный с диагностикой включений, полостей, дефектов и других несовершенств, а также плазменных неоднородностей [3], взаимодействия волн с клеткой и локальными неоднородностями биологических объектов [4] и т. д.

В реальных материалах всегда имеется большое количество различного рода микровключений, дефектов, пустот и др., которые при внешних воздействиях, например, при действии магнитного

поля, проявляются как сильные концентраторы магнитоупругих полей, таких как поле напряжений и индуцированное магнитное поле. Это может служить источником зарождения трещин [5, 6]. Кроме того, при действии механических возмущений на магнитоупругое тело, находящееся в постоянном внешнем магнитном поле, в силу взаимосвязанности упругого и электромагнитного полей неизбежно появление возмущений электромагнитного поля как в области, занятой телом, так и во внешней среде. Малые вариации электромагнитного поля, вызванные дифракцией магнитоупругих волн на жестких препятствиях, полостях или пространственных неоднородностях, могут быть легко измерены бесконтактными методами, отличающимися высокой чувствительностью и разрешающей способностью. По измеренным величинам можно приближенно диагностировать основные свойства рассеивателей – их размеры и форму, а в случае прозрачных рассеивателей – их среднюю плотность и ее градиент. Вышеизложенное демонстрирует одно из возможных приложений теории магнитоупругости в неразрушающем контроле [7, 8]. В качестве второго возможного приложения можно отметить сейсмологию и этим здесь ограничиться.

## 1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Поведение магнитоупругой среды определяется здесь связанной системой уравнений электромагнитного поля и теории упругости при следующих предположениях: не учитываются электрические заряды  $\rho_e$ , электрические силы  $\rho_e \vec{E}$ , движение зарядов  $\rho_e \vec{u}$  ( $\vec{u}$  – вектор перемещений), электрические напряжения в тензоре Максвелла; невозмущенное состояние характеризуется однородным постоянным магнитным полем  $H_0$ . Также предполагается, что соответствующая задача магнитостатики решена; возмущения малы; в невозмущенном состоянии плотность  $\rho_e$ , параметры Ламе

$\lambda$  и  $G$ , электропроводность  $\gamma$  зависят от пространственных координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); среда изотропна.

При указанных предположениях и условиях гладкости всех функций линеаризованные уравнения возмущенного движения неоднородной магнитоупругой среды представляются в виде

$$L(\vec{u}) = \rho_c(\vec{x})\ddot{\vec{u}} - P_h(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \times \vec{H}_0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L(\vec{u}) &= \{\vec{\nabla}[\lambda(\vec{x}) + G(\vec{x})]\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\} - \\ &- \vec{\nabla} \times [G(\vec{x})\vec{\nabla} \times \vec{u}] + 2\{[\vec{\nabla}G(\vec{x})] \cdot \vec{\nabla}\}\vec{u} - \\ &- [\vec{\nabla}G(\vec{x})](\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + [\vec{\nabla}G(\vec{x})] \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}), \\ \dot{\vec{h}} &= -\vec{\nabla} \times [R_m^{-1}(\vec{x})(\vec{\nabla} \times \vec{h})] + \vec{\nabla} \times (\dot{\vec{u}} \times \vec{H}_0), \quad (2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{h} &= \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = -P_H \dot{\vec{h}}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{h} &= 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 0, \\ \vec{j} &= R_m(\vec{x}) \left( P_H^{-1} \vec{e} + \mu \dot{\vec{u}} \times \vec{H}_0 \right), \quad (3) \\ \vec{b} &= P_H \vec{h}, \quad \vec{d} = \varepsilon \vec{e}. \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{h}$ ,  $\vec{e}$  и  $\vec{j}$  – соответственно векторы возмущенных полей: напряженности магнитного поля, электрического поля, плотности тока; точка между векторными величинами обозначает скалярное произведение; символ  $\times$  – векторное произведение; точки над функцией обозначают частные производные по времени.

Уравнение (1) представляет собой обобщение уравнения Ламе на случай неоднородных упругих сред, уравнение (2) – аналог уравнения индукции в магнитной гидродинамике – это разрешающее уравнение, которое выводится из системы (3). Как видно, уравнения (1) и (2) представляют собой замкнутую систему двух векторных уравнений для двух векторных функций  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  и  $\vec{h}(\vec{x}, t)$ . И конечно, если бы можно было из этой системы уравнений определить  $\vec{u}$  и  $\vec{h}$ , то все остальные функции, необходимые для удовлетворения условиям сопряжения, можно было бы найти как частные решения из остальных уравнений. Характеризуя эту систему, необходимо отметить, что, во-первых, она гиперголо-параболическая, а, во-вторых, сильно связанная. Система уравнений (3) включает уравнения Максвелла: закон Ампера, закон Фарадея, условие отсутствия магнитных зарядов и электрических зарядов (как малых высшего порядка), а также конститутивные уравнения: закон Ома для движущейся среды, выражения магнитной индукции  $\vec{b}$  и электрической индукции  $\vec{d}$  как функций  $\vec{h}$  и  $\vec{e}$ .

Общие условия сопряжения на поверхности раздела двух магнитоупругих сред приведены в [9, 10] и для рассматриваемых ниже задач условия сопряжения на поверхности раздела рассеивателя и внешней среды будут приведены далее при постановке задач теории дифракции.

Система (1) – (3) представлена в безразмерной форме, при этом при введении безразмерных величин в качестве характерных были приняты следующие:  $l$  – длина,  $v$  – скорость,  $\rho$  – массовая плотность,  $H$  – магнитное поле. Отметим, что поведение магнитоупругой среды характеризуется двумя безразмерными комплексами:  $P_H = \mu H^2 / (\rho V^2)$  – магнитное давление,  $R_m(\vec{x}) = R_0 f(\vec{x}) = lv\mu\gamma(\vec{x})$  – коэффициент электропроводности  $R_0(\vec{x}) = |R_m(\vec{x})|_{max}$ , представляющий собой аналог магнитного числа Рейнольдса в магнитной гидродинамике.

## 2. ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Улучшенное приближение слабой проводимости основывается на следующих допущениях: сильное магнитное поле  $P_H \gg 1$ ; соотношение порядков величин  $R_0 \sim P_H^{-1} \ll 1$ ; возмущенное электромагнитное поле генерируется упругими возмущениями. Как и в случае однородной среды [9], искомые функции представляются в виде разложений

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}^0 + \vec{u}^1 R_0 + \vec{u}^2 R_0^2 + \dots, \\ \vec{h} &= \vec{h}^0 + \vec{h}^1 R_0 + \vec{h}^2 R_0^2 + \dots \end{aligned}$$

После подстановки этих разложений в систему (1) – (3) и приравнивания членов при одинаковых степенях  $R^m$  с учетом указанных выше допущений получаем первое приближение в виде

$$\begin{aligned} L(\vec{u}^0) &= \rho_c(\vec{x})\ddot{\vec{u}}^0 - P_H R_m(\vec{x})(\vec{u}^0 \times H_0) \times \vec{H}_0, \quad (4) \\ \vec{\nabla} \times \vec{h}^l &= f(\vec{x})(\dot{\vec{u}}^0 \times \vec{H}_0), \\ \vec{\nabla} \times \vec{e}^l &= -\dot{\vec{h}}^l, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h}^l = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{e}^l = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Систему (4), (5) необходимо интегрировать таким образом: общее решение находится из уравнения (4), затем из уравнений (5) выводятся только частные решения.

Если не принимать второе допущение (соотношение порядков), то мы получили бы обычное приближение слабой проводимости, в котором первое приближение соответствовало бы непроводящей среде, тогда как в улучшенном приближении первое приближение уже учитывает магнитоупругие эффекты. Кроме того, в непроводящей среде

корректно было бы учитывать токи смещения, а это выходит за рамки МГД-приближения.

Приближение сильной электропроводности  $R_0 \gg 1$  выводится из разложений  $\vec{u}$  и  $\vec{h}$  по обратным степеням  $R_0$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{u}^0 + \vec{u}^1 R_0^{-1} + \vec{u}^2 R_0^{-2} + \dots, \\ \vec{h} &= \vec{h}^0 + \vec{h}^1 R_0^{-1} + \vec{h}^2 R_0^{-2} + \dots\end{aligned}$$

В первом приближении получаем уравнения, соответствующие идеальной проводимости

$$L(\vec{u}^0) = \rho_c(\vec{x}) \ddot{\vec{u}}^0 - P_H[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{u}^0 \times H_0)] \times \vec{H}_0 \quad (6)$$

$$\vec{h}^0 = \vec{\nabla} \times (\vec{u}^0 \times \vec{H}_0), \quad \vec{\varepsilon}^0 = -P_H \dot{\vec{u}}^0 \times \vec{H}_0, \quad (7)$$

$$\vec{j}^0 = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{u}^0 \times \vec{H}_0), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h}^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\varepsilon}^0 = 0. \quad (8)$$

В данном случае достаточно найти только величину  $\vec{u}^0$  из уравнения (6) для того, чтобы определить остальные полевые функции как частные решения уравнений (7) и (8). Необходимо отметить, что в этом приближении (идеальной проводимости) неоднородность электропроводности теряет смысл.

Приближение идеальной проводимости получило большие приложения в решении конкретных задач магнитной гидродинамики и магнитоупругости и покрывает широкий класс реальных сред.

В случае магнитоакустических сред, необходимо в уравнения (1) – (3) или (4) – (8) ввести величины  $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$  и оператор  $-\vec{\nabla} p$  вместо оператора  $L(\vec{u})$  и добавить уравнения

$$\begin{aligned}\dot{p} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \rho_0(\vec{x}) + \rho_0(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \dot{p} &= c^2[\dot{p} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_0(\vec{x})].\end{aligned} \quad (9)$$

### 3. О РАЗДЕЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ

В приближения (4), (5) и (6) – (8) входит оператор  $L(\vec{u}^0)$ , описывающий неоднородную упругую среду. Кроме того, в приближении (5) учитывается неоднородная электропроводность  $f(\vec{x})$ . На сегодня не существует общей теории разделения векторных уравнений неоднородной упругой среды. Наиболее существенный вклад в эту область был сделан в работах [11, 12] в которых представлены возможные случаи разделения уравнений теории упругости для некоторых классов неоднородностей. В дальнейшем эта проблема не была продвинута вперед существенно. В случае магнитоупругих сред ситуация существенно более сложная, поскольку в правые части уравнений (4)

и (6) входит магнитоупругий оператор, причем упругий оператор и магнитоупругий оператор неколлинеарны. Тем не менее, в работах [2, 9] были представлены некоторые возможные случаи разделения этих магнитоупругих уравнений. В частности, в работе [2] показано, что исходная магнитоупругая задача может быть разделена на чисто упругую и электромагнитную при условии, что  $\vec{u} \perp \vec{H}_0$ .

### 4. РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН НЕОДНОРОДНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Задача дифракции волн формулируется следующим образом. Рассмотрим в бесконечной области  $\Omega \in R^3$  конечную область  $\Omega_1 \subset \Omega$ . Внутренняя область  $\Omega_1$  и внешняя область  $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$  заполнены магнитоупругими средами с различными физическими свойствами. В области  $\Omega_2$  среда может быть однородной или неоднородной. Каждая среда описывается системами (1) – (3), или (4), (5), или (6) – (8). Во внешней области  $\Omega_2$  задается падающее поле (известные решения для плоских, цилиндрических или сферических волн).

Рассмотрим в непроводящей среде  $\Omega_2$  включение – магнитоупругий круговой цилиндр, с которым связана цилиндрическая система координат  $r, \theta, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$ . Существует невозмущенное постоянное однородное продольное магнитное поле  $(0, 0, H_0)$ . Плоские падающие дилатационные волны приходят из бесконечности.

Движение во внешней упругой однородной непроводящей среде  $\Omega_2$  описывается волновыми уравнениями в терминах скалярного и векторного потенциалов  $\phi = \phi(r, \theta, z, t)$  и  $\vec{a} = \vec{a}(r, \theta, z, t)$ :

$$\nabla^2 \phi - c^{-2} \ddot{\phi} = 0, \quad \nabla^2 \vec{a} - c_e^{-2} \ddot{\vec{a}} = 0 \quad (10)$$

и уравнением возмущенного магнитного поля  $\vec{h}$

$$\nabla^2 \vec{h} - c_s^{-2} \ddot{\vec{h}} = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \Omega_2 = \{(r, \theta, z) : r \in (r_0, \infty), \theta \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, \infty), t \in (0, \infty)\}.$$

Движение внутренней неоднородной среды описывается уравнениями

$$\begin{aligned}G^p \nabla^2 \vec{u}^p + (G^p + \lambda^p) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) &= \\ \rho^p \dot{\vec{u}}^p - P_H^p R_m^p (\vec{u}^p \times \vec{H}_0) \times \vec{H}_0 &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{h}^p = \dot{\vec{u}}^p \times \vec{H}_0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\varepsilon}^p = -\dot{\vec{h}}^p, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{h}^p = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\varepsilon}^p = 0\end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{в } \Omega_1 = \{(r, \theta, z) : r \in [0, r_0], \theta \in [0, 2\pi], \\ z \in (-\infty, \infty), t \in (0, \infty)\}.$$

Условия на поверхности раздела  $r = r_0$  имеют вид (индекс  $p$  относится к внутренней среде)

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{u} - \vec{u}^p) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{u} - \vec{u}^p) = 0, \\ n_i [(\sigma_{ik} + t_{ik}) - (\sigma_{ik}^p + t_{ik}^p)] &= 0, \\ i, j, k &= 1, 2, 3, \\ t_{ik} &= P_H(H_{0i}h_k - h_iH_{0k} - \delta_{ik}H_{0j}h_j), \\ \vec{n} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu^p}\vec{h} - \vec{h}^p\right) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{h} - \vec{h}^p) = 0, \\ \vec{n} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^p}\vec{e} - \vec{e}^p\right) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{e} - \vec{e}^p) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера,  $\sigma_{ik}$  – компонента упругого тензора напряжений,  $t_{ik}$  – компонента тензора Максвелла, по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Кроме того, для получения единственного решения вводятся условия излучения Зоммерфельда для переменных в  $\Omega_2$ . В дальнейшем предполагается, что магнитная и электрическая проницаемости обеих сред равны  $\mu = \mu^p$ ,  $\varepsilon = \varepsilon^p$  и тогда в условиях сопряжения  $\mu/\mu^p = \varepsilon/\varepsilon^p = 1$ .

Условия сопряжения выражают закон сохранения массы (сплошности), закон сохранения импульса, непрерывность при переходе через поверхность раздела магнитной и электрической индукции, а также тангенциальных составляющих напряженности магнитного и электрического поля. Необходимо отметить, что часть условий сопряжения удовлетворяется тождественно, а часть может быть излишней как следствие декомпозиции поля.

Плоская падающая волна задается уравнением

$$u_y = u_0 \exp i(sy - \omega t)$$

и может быть сразу представлена в виде разложения по цилиндрическим функциям [13]

$$\exp(i sy) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(sr) \cos n\theta,$$

где  $J_n(\zeta)$  – функция Бесселя,  $\varepsilon_n = 1$  при  $n = 0$  и  $n = 2$  при  $n \geq 1$ .

Уравнения (10)–(12) и условия сопряжения (13) в цилиндрической системе координат распадаются на две независимые подсистемы, одна из которых содержит искомые функции, другая не имеет смысла. Это соответствует разделению общего поля

на две составляющие и в результате приводит к тому, что ненулевые компоненты остаются только в уравнениях (10)–(13):  $u_r, u_0, h_z, e_r, e_\theta$ . В дальнейшем выводится разрешающее уравнение, общее решение которого записывается в цилиндрических функциях, а затем находятся остальные искомые функции как частные решения. Например, решение для  $u_r$  имеет вид

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} [f_{np} J_n'(pr) + A_{np} H_n^{(2)'}(pr) - r^{-1} n B_n H_n^{(2)}(qr)] \cos n\theta. \tag{14}$$

Неизвестные коэффициенты  $A_n, B_n$  определяются в результате решения системы уравнений, следующих из условий сопряжения на поверхности раздела (13). Эти коэффициенты, так же как и коэффициенты  $A_n^p, B_n^p$ , входящие в решения внутренней задачи, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Задача дифракции цилиндрических магнитоупругих волн на проводящем жидком цилиндре, центр которого отстоит от излучателя на расстоянии  $b$ , описывается уравнениями (4), (5) во внешней области  $\Omega_2$  (в дальнейшем обозначенной индексом  $g$ ) и уравнениями (7) во внутренней области  $\Omega_1$ . Условия сопряжения на поверхности раздела  $r = r_0$  аналогичны условиям (13). Рассматриваемые функции представляем в виде

$$w(r, \theta, z, t) = \tilde{w}(r, \theta, z) \exp(-i\omega t).$$

В дальнейшем знак “тильда” и  $\exp(-i\omega t)$  опускаются. Вектор  $\vec{u}$  представляется в виде

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \times \vec{a}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{a} = \vec{e}_z \psi$$

и векторное уравнение (4) сводится к системе двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{\lambda}{G}\right) \nabla^2 \varphi + (\omega^2 + i\omega P_H R_m^g) \varphi &= 0, \\ \nabla^2 \psi + (\omega^2 + i\omega P_H R_m^g) \psi &= 0. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений, в системе координат  $(r_1, \theta_1, z_1)$ , связанной с источником, имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 H_0^{(1)}(k_1 r_1), \quad \psi = \psi_0 H_0^{(1)}(k_2 r_1),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= (\omega^2 + i\omega P_H R_m^g) / (2 + \lambda/G), \\ k_2 &= \omega^2 + i\omega P_H R_m^g. \end{aligned}$$

Таким образом, линейный источник излучает два типа магнитоупругих волн – дилатационные

и эквиволуминальные. В случае, если  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  равны нулю, будут излучаться только дилатационные или только эквиволуминальные волны. Общее дифракционное поле в области  $r < b$ , включающее излучаемую линейным источником волну и волны, рассеянные неоднородным проводящим жидким цилиндром, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{m=0}^{\infty} [\varepsilon_m \varphi_0 J_m(k_1 r) H_m^{(1)}(k_1 b) + \\ &\quad + A_m H_m^{(1)}(k_1 r)] \cos m\theta, \\ \psi &= \sum_{m=0}^{\infty} [\varepsilon_m \psi_0 J_m(k_2 r) H_m^{(1)}(k_2 b) + \\ &\quad + B_m H_m^{(1)}(k_2 r)] \sin m\theta, \end{aligned} \quad (15)$$

После введения потенциала

$$(-i\omega\rho_0(r) + P_H R_m) \vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$$

решение задачи во внутренней области относительно возмущенного давления  $p$ , с учетом регулярности при  $r = 0$ , представляется в виде ряда

$$p^g = - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \Phi_m(r) \cos m\theta, \quad (16)$$

где  $\Phi_m(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega \rho_0'(r)}{i\omega \rho_0(r) - R_m P_H} \right) \frac{d\Phi}{dr} + \\ + \left[ \frac{\omega^2 \rho_0(r) + i\omega R_m P_H}{c^2(r) \rho_0(r)} - \frac{m^2}{r^2} \right] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае, если  $\rho_0(r)$  является некоторым многочленом, например,  $\rho_0(r) = \rho_1 + (1 - \rho_1)r^s$ , решение уравнения (16) можно получить с помощью метода обобщенных степенных рядов [5, 13]. При этом, решение  $\Phi_m(r)$  представляется рядом

$$\Phi_m(r) = r^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n,$$

где  $\alpha_n$  находится из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} [(n+m)^2 - m^2] \alpha_1 \alpha_n + \alpha_1^2 \alpha_{n-2} + \\ + [(m+n-s)(m+n-2s) - m^2] \alpha_2 \alpha_{n-s} + \\ 2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_{n-s-2} + \alpha_2^2 \alpha_{n-2s-2} = 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1 = \omega^2 \rho_1 + i\omega P_H R_m$ ,  $\alpha_2 = \omega^2(1 - \rho_1)$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_j \equiv 0$  при  $j < 0$ . Неизвестные коэффициенты  $A_m$ ,  $B_m$  и  $C_m$  находятся из условий сопряжения типа (13).

## 5. РАСЧЕТЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для оценки влияния магнитного поля и электропроводности сред на дифрагированные упругие поля проведены расчеты диаграмм рассеяния продольной волны  $\Phi_\varphi(\theta)$

$$\Phi_\varphi(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{im\pi/2} \cos m\theta$$

в направлении  $\theta = 0$  при  $r \gg b$ .

В качестве исходных были выбраны следующие значения параметров:

$$\rho_0 = 0.102; c_0 = 1.36; \nu = 0.33; b = 5;$$

$$P_H R_m^g = P_H R_m = 0 \div 0.25;$$

$$\rho_0(r) = \rho_1 + (\rho_0 - \rho_1)r^2; \rho_1 = \rho_0(1 \pm 0.4).$$

На рисунке представлены зависимости диаграмм рассеяния дилатационных волн в направлении  $\theta = 0$  в случае, когда линейный источник излучает эквиволуминальные цилиндрические волны.

Из приведенных графиков следует, что неоднородность жидкого включения приводит, главным образом, к существенному сдвигу резонансных частот. Это вызвано тем, что с увеличением плотности от  $\rho_1 = 0.6\rho_0$  до  $1.4\rho_0$ , длина волны, распространяющаяся внутри жидкого включения, уменьшается, и поэтому совпадение переотраженных волн сдвигается в сторону более низких частот. Кроме того, проводимость внутренней среды существенно сглаживает резонансные значения амплитуды диаграммы рассеяния дилатационной волны, что объясняется потерями энергии на преодоление пондеромоторных сил внутри полости, заполненной электропроводящей жидкостью. Проводимость внешней среды несколько уменьшает максимальные значения диаграммы рассеяния, что обусловлено потерями энергии в набегающей волне, т.е. амплитуда набегающей волны под действием пондеромоторных сил уменьшается, и, вследствие этого, уменьшается также амплитуда рассеянной волны. Однако резонансные значения почти не изменяются, так как потеря энергии внутри полости не происходит.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены линеаризованные уравнения движения неоднородной магнитоупругой среды, обобщающие ранее известные уравнения для однородной среды. Рассматривается среда с зависящими от координат упругими постоянными

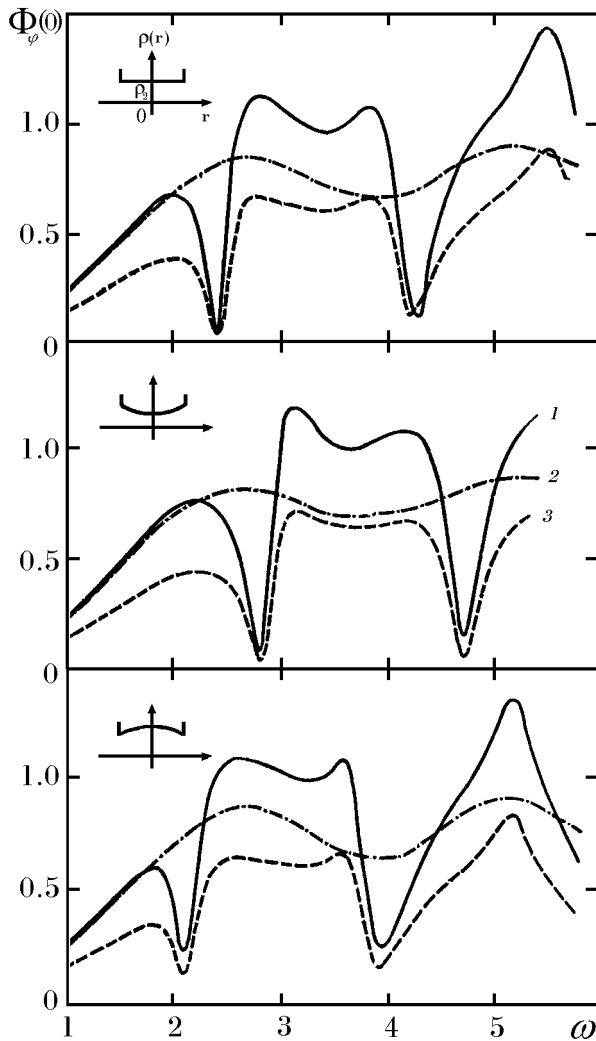


Рисунок. Зависимость потенциала дилатационного поля, рассеянного назад ( $\theta = 0$ ), в дальней зоне от частоты  $\omega$  излучаемой эквиволуминальной волны:

$$1 - R_m^g = R_m = 0; \quad 2 - R_m^g = 0, R_m = 0.25; \\ 3 - R_m^g = 0.25, R_m = 0$$

Ламе  $\lambda(\vec{x})$  и  $G(\vec{x})$ , плотностью  $\rho(\vec{x})$  и электропроводностью  $\gamma(\vec{x})$ . Показано, что, как и в случае однородной среды, полная система уравнений может быть сведена к двум разрешающим связанным дифференциальным уравнениям для вектора перемещений  $\vec{u}$  и возмущаемого магнитного поля  $\vec{h}$ , включающим два безразмерных комплекса: магнитное давление  $P_H$  и аналог магнитного числа Рейнольдса в магнитной гидродинамике  $R_m$ , пропорционального электропроводности.

Построено улучшенное приближение слабой проводимости разложением по  $R_m$ , а также приближение идеальной проводимости разложением

по обратным степеням  $R_m^{-1}$ . Эти приближения позволяют существенно упростить решение задач. Приведены постановки задач дифракции волн на локальных неоднородностях и показаны возможности разделения уравнений магнитоупругости в случае радиально-неоднородного включения. На этой основе построены аналитические решения задач рассеяния плоских упругих волн на магнитоупругом включении и цилиндрических магнитоупругих волн на магнитоупругом включении.

На основе проведенных расчетов анализируется влияние магнитоупругих эффектов на рассеяние волн. Показано, что это влияние проявляется в уменьшении величин рассеянных полей назад, сглаживанию экстремумов и их смещению по частоте.

1. Morse F. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics.— Vol.1 and 2.: New York, McGraw-Hill Inc., 1953.— 930 and 880 p.
2. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях.— К.: Наук. думка, 1978.— 146 с.
3. Селезов И. Т. К обратным задачам диагностики плазменных неоднородностей // Распределенное управление процессами в сплошных средах.— К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1972.— С. 22–48.
4. Селезов И. Т. Дифракционное взаимодействие электромагнитных волн с клеткой // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1993.— С. 119–121.
5. Baker G. A., Gammel J. L. Elastic wave scattering by a flaw in an isotropic, homogeneous solid // J. Appl. Phys.— 1981.— 52, N 6.— P. 3729–3737.
6. Hasegawa H., Yoshiie K. Tension of elastic solid with elastic circular-cylindrical inclusion // JSME Int. J.— 1996.— N2, 39.— P. 186–191.
7. Chattopadhyay A., Maugin G. A. Magnetoelastic surface shear waves due to a momentary point source // J. Acoust. Soc. Amer.— 1993.— 94, N 1.— P. 437–446.
8. Eringen A. C., Maugin G. A. Electrodynamics of continua. 1. Foundation of solid media. 2. Fluids and complex media. Springer-Verlag, 1990
9. Селезов И. Т. Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред // Изв. АН СССР, Механика твердого тела.— 1975.— N 5.— С. 86–91.
10. Селезов И. Т., Селезова Л. В. Волны в магнитоупругих средах.— К.: Наук. думка, 1975.— 164 с.
11. Hook J. R. Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous isotropic media // J. Acoust. Soc. Amer.— 1961.— 33 N 3.— P. 302–313.
12. Singh S. J., Ben-Menahem A. Decoupling of the vector wave equation of elasticity for radially heterogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer.— 1969.— 46, N 3, Pt. 2.— P. 655–660.
13. Абрамовиш М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.— 820 с.
14. Selezov I. T. Diffraction of waves by radially inhomogeneous inclusions // Physical Express.— 1993.— 1, N 2.— P. 101–115.