УДК 621.319

АКУСТИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ ОКЕАНА: СТАТИСТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ

А. Я. КАЛЮЖНЫЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.12.97

Рассмотрена статистическая методология решения задач акустической томографии океана. Основное внимание уделено статистической трактовке проблемы устойчивости таких задач и методам их регуляризации. Предложено рассматривать томографическую задачу, как задачу на условный экстремум тестовой статистики по оцениваемым параметрам, где роль ограничений выполняет априорная база знаний о характеристиках восстанавливаемых гидрофизических полей, сформулированных в виде операторных и функциональных соотношений. Такая постановка обеспечивает максимальную устойчивость решения при доступном уровне априорной информации. Предлагаемая методология проиллюстрирована конкретными примерами. Рассмотрены вопросы оптимизации базисного представления восстанавливаемых гидрофизических полей с учетом факторов среды и процедуры статистических измерений. Известный в теории восстановления изображений принцип отбора "главных компонент", обеспечивающий минимизацию флюктуационных ошибок оценивания, обобщен с учетом не только флюктуационной, но и систематической составляющей результирующей погрешности измерений.

ВВЕДЕНИЕ

Постоянное наблюдение за гидрофизическими характеристиками Мирового океана имеет важное научное и прикладное значение. Процессы мезомасштабной циркуляции океанических водных масс оказывают значительное воздействие на атмосферные явления, формирование погодных условий, безопасность навигационной обстановки и условия промыслового рыболовства, состояние окружающей среды и т. д.

Наиболее приемлемым в техническом и финансовом отношении средством постоянного наблюдения за состоянием океана является акустическая томография. Так принято называть комплекс методов восстановления гидрофизических характеристик океанической среды на основе анализа распространяющихся в ней акустических полей. Акустическая томография относительно проста в техническом отношении, не требует чрезмерно больших финансовых затрат, не зависит от погодных условий, а ее эффективность достаточно высока.

Научным проблемам акустической томографии океана посвящено за последние 10–15 лет большое число публикаций [1 – 8]. Если для начального этапа развития данного научного направления было характерно использование детерминистских методов, игнорирующих статистический характер наблюдаемых акустических полей, то к настоящему времени статистический подход к решению подобных задач стал уже общепризнанным [3 – 6]. Однако ряд важных аспектов акустической томографии океана должной статистической трактовки пока не получил. В первую очередь это относится к известной проблеме устойчивости решения обратных томографических задач. Так, часто используемый в этих задачах критерий максимального правдоподобия может приводить к неустойчивым решениям [9, 10]. Поэтому применимость данного критерия в обратных задачах требует специального анализа. Еще одна группа проблем связана с тем, что в отличие от родственных по постановке задач из оптики и радиофизики акустическая томография существенно нелинейна. Указанное обстоятельство порождает ряд проблем, связанных с построением устойчивых процедур решения нелинейных уравнений. Далее, успешное решение задач акустической томографии в значительной (если не в решающей) степени зависит от выбора метода описания первичного гидрофизического поля, подлежащего оцениванию. В известных до настоящего времени работах преобладает чисто физический подход к выбору метода описания, статистический характер процедуры измерения не учитывается. Обсуждению этих и ряда других аспектов задачи акустической томографии океана и посвящена настоящая работа.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ ОКЕАНА

Общая схема решения подобных задач следующая. Предполагается, что в некоторой области океанической среды $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_s$ сосредоточены источники звука, характеристики которых известны. Акустическое поле $s(t, \mathbf{r})$, возбуждаемое источниками, распространяется через исследуемую область $\mathbf{r} \in \mathcal{D}$ и достигает области приема $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_r$, где расположены датчики акустических колебаний. На основе анализа поля $s(t, \mathbf{r})$, принятого на интервале $t \in (0, T)$ и в области $\mathbf{r} \in \mathcal{D}_r$, необходимо оценить гидрофизические характеристики океанической среды в области $\mathbf{r} \in \mathcal{D}$. При этом математическая модель распространения сигнала между областями $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_r$ предполагается заданной.

В эту общую схему укладывается чрезвычайно большое число задач, порой довольно разнородных. Перечислим некоторые из них.

1.1. Томография водной среды и томография границ

Акустическое поле $s(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет, как известно [11], волновому уравнению и совокупности граничных условий. Следовательно, гидрофизические характеристики среды могут, в принципе, влиять на распространение акустического поля $s(t, \mathbf{r})$ двумя путями:

- через поле скорости звука $c(\mathbf{r})$, которое является основным параметром волнового уравнения и зависит от давления, плотности, солености и температуры водной среды;

- через оператор граничных условий, который зависит от характеристик дна и водной поверхности океана.

В общем случае акустическая томография может использовать оба эти механизма. Однако обычно рассматривают более частные задачи, в которых один из указанных параметров считается известным. Так, если задано поле скорости звука, а восстановлению подлежат параметры оператора граничных условий, то имеем томографию поверхности или дна океана. В противном случае, т. е. когда задан оператор граничных условий, а восстановлению подлежит поле $c(\mathbf{r})$ имеем томографию водной среды.

1.2. Активная и пассивная акустическая томография

В томографическом эксперименте могут применяться либо специальные излучатели звука (активная томография), либо использоваться естественные или посторонние источники, как, например, шумы ветрового волнения поверхности океана, шумы судоходства и т. д. (пассивная томография). Кроме того, активные системы могут отличаться по типу используемого сигнала: непрерывному, импульсному, гармоническому, модулированному, шумовому и т. д.

1.3. Пертурбативная и непертурбативная акустическая томография

В задачах томографии водной среды поле скорости звука обычно представляют в виде суперпозиции двух полей:

$$c(\mathbf{r}) = c_0(z) + c_p(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $c_0(z)$ – средний по исследуемой области среды вертикальный профиль скорости звука; $c_p(\mathbf{r})$ – отклонения (пертурбации) поля $c(\mathbf{r})$ относительно профиля $c_0(z)$. Измерение среднего профиля $c_0(z)$ составляет предмет так называемой непертурбативной (nonperturbative) томографии [7]. Однако чаще к задачам акустической томографии относят именно измерение "пертурбативной" компоненты $c_p(\mathbf{r})$.

1.4. Линейная и нелинейная акустическая томография

Связь между акустическим полем $s(t, \mathbf{r})$ и гидрофизическими характеристиками среды в общем случае носит достаточно сложный и нелинейный характер. Однако при томографии малых возмущений эту связь можно линеаризовать. Наиболее известным примером такой линеаризации является первое борновское приближение для поля, распространяющегося в неоднородной среде [11]. Если линейное представление допустимо, то решение задач акустической томографии существенно упрощается по сравнению с общим нелинейным случаем.

1.5. Томография статистических и детерминированных неоднородностей

Важное значение для выбора метода решения томографических задач имеет гипотеза о детерминированном или статистическом характере исследуемых гидрофизических явлений. В рамках первой из гипотез полагается, что гидрофизические характеристики среды детерминированы (неслучайны), но до начала томографического эксперимента неизвестны. Вторая гипотеза учитывает статистическую природу исследуемых гидрофизических полей.

1.6. Лучевая и модовая томография

Для описания модели распространения сигнала при решении томографических задач может быть использовано как модовое, так и лучевое представление акустических полей. Выбор метода описания зависит от многих факторов: рабочего диапазона частот, параметров океанического волновода, масштаба исследуемых неоднородностей [8], вычислительных затрат и т. д. Однако часто под терминами модовая и лучевая томография понимают не только способ описания акустических полей, но и метод решения задачи [1]. При этом лучевой томографией называют оценивание характеристик среды на основе информации о задержках сигналов, распространяющихся по различным трассам, а модовой – использующей фазы нормальных волн.

2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Со статистико-информационной точки зрения задачи акустической томографии во многом подобны задачам восстановления изображений [9]. Так, при томографии водной среды роль "изображения" играют пертурбации поля скорости звука $c_p(\mathbf{r})$. Рассмотрим на примере задачи оценивания поля $c_p(\mathbf{r})$ основные этапы методологии, принятой в теории восстановления изображений.

Прежде всего, необходимо записать уравнение наблюдения, связывающее акустическое поле в области приема $u(t,\mathbf{r})$ с восстанавливаемым полем $c_p(\mathbf{r})$. Пусть на интервале наблюдения $(0,T)$ поле $u(t,\mathbf{r})$ квазистационарно, а поле скорости звука от времени не зависит.Тогда целесообразно воспользоваться спектральным представлением входных наблюдений: =

$$U(\omega,\mathbf{r}) = \theta\cdot S(\omega,\mathbf{r}) + N(\omega,\mathbf{r}), \qquad (2)$$

где $U(\omega,\mathbf{r})$ – спектр Фурье поля $u(t,\mathbf{r})$ на круговой частоте $\omega\in(\omega_H,\omega_B)$; ω_H, ω_B – границы рабочей полосы частот; $S(\omega,\mathbf{r})$ – спектр поля измерительного сигнала, создаваемого специальным излучателем; $N(\omega,\mathbf{r})$ – спектр поля внешних акустических шумов и помех.

В модель (2) восстанавливаемое поле $c_p(\mathbf{r})$ в явном виде не входит. Связь между полями $S(\omega,\mathbf{r})$ и $c_p(\mathbf{r})$ задается уравнением Гельмгольца:

$$[\,\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})}\,]\,S(\omega,\mathbf{r}) = -P_s(\omega,\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где поле $c(\mathbf{r})$ определяется выражением (1), $P_s(\omega,\mathbf{r})$ – спектр функции источников. Кроме уравнения (3), поле $S(\omega,\mathbf{r})$ удовлетворяет условиям на поверхности и дне океанического волновода, которые предполагаются известными, и условию погашаемости на бесконечности.

Модель (2) содержит параметр θ, который отражает возможность управления режимом работы излучателя: при излучении измерительного сигнала $\theta=1$, а в паузе $\theta=0$. Заметим, что при пассивной томографии $\theta\equiv1$ и задача решается только на основе анализа характеристик поля $N(\omega,\mathbf{r})$, отдельные компоненты которого также удовлетворяют уравнению Гельмгольца, но при иных функциях источников.

Для полного описания модели необходимо принять те или иные статистические гипотезы о вероятностных характеристиках наблюдаемых полей. Что касается поля помех $N(\omega,\mathbf{r})$, то для него традиционно принимается гипотеза о гауссовском распределении мгновенных значений. Характеристики измерительного сигнала определяются функцией источников $P_s(\omega,\mathbf{r})$ и моделью среды. Если функция источников точно известна, а среда детерминирована, то и поле $S(\omega,\mathbf{r})$ детерминировано. Если же среда случайна, то и поле $S(\omega,\mathbf{r})$ случайно при любой функции источников.

Формулировка статистических гипотез позволяет рассматривать задачу восстановления поля с позиций статистической теории оценивания [12]. Согласно результатам этой теории измерение поля $c_p(\mathbf{r})$ эквивалентно максимизации (или минимизации) некоторого функционала обработки (тестовой статистики) $F(\mathbf{u},\mathbf{c}_p)$ над массивом наблюдений $\mathbf{u}$, который содержит в качестве параметра настройки гипотезу $\mathbf{c}_p$ о значении оцениваемых величин. В частности, для класса байесовских оценок функционал $F(\mathbf{u},\mathbf{c}_p)$ выбирается равным апостериорному риску, для оценок максимума апостериорной вероятности (МАВ) функционал $F(\mathbf{u},\mathbf{c}_p)$ соответствует апостериорному распределению $p(\mathbf{c}_p/\mathbf{u})$ оцениваемых величин, для оценок максимального правдоподобия (ОМП) в качестве тестовой статистики принимается функционал правдоподобия $p(\mathbf{u}/\mathbf{c}_p)$. Возможны и квазиоптимальные или эвристические подходы к выбору функционала $F(\mathbf{u},\mathbf{c}_p)$. При этом критериями выбора являются такие свойства результирующих оценок как несмещенность, состоятельность и эффективность [12].

Однако при решении обратных задач, к числу которых относится и акустическая томография, выдвигаются и дополнительные требования, которые связаны с известной проблемой некорректности их постановки. Суть проблемы состоит в том, что операторы, связывающие восстанавливаемое поле и наблюдения, часто близки к сингулярным. Кроме того, из-за высокой размерности таких задач требуется, как правило, существенно более высокий энергетический потенциал, чем при обычном оценивании параметров. Вследствие действия указанных факторов оценка восстанавливаемого поля может быть сильно зашумленной, и, кроме того, испытывать неограниченные флюктуации, т. е. быть неустойчивой.

Подобные трудности возникали еще при детерминистских способах решения обратных задач. Не избавлены от них и статистические подходы. Трактовка этой проблемы статистической теорией зависит принципиальным образом от того, считаются ли оцениваемые величины детерминированными (но априори неизвестными) или случайными. В первом случае налицо все те же трудности, которые были характерны и для детерминистских методов решения обратных задач. Общий метод их преодоления также аналогичен: это введение на основе априорной информации дополнительных критериев отбора "хороших" решений (стабилизаторов задачи) [9,10]. Такие критерии дополняют, по-сути, уравнения наблюдения некоторыми априорными связями между значениями восстанавливаемого поля и снижают тем самым эквивалентную размерность задачи. В результате решение дополнительно фильтруется и сглаживается, что снижает зашумленность восстанавливаемых полей и предотвращает их неограниченные флуктуации.

Преимуществом статистического подхода является прежде всего корректный учет помех. Кроме того, статистический метод решения позволяет просто и естественно учесть любую дополнительную информацию. Для этого достаточно перейти от безусловной оптимизации функционала обработки $F(\mathbf{u}, \mathbf{c}_p)$ к условной. Таким образом, задача восстановления детерминированных полей скорости звука может быть сформулирована как задача на условный экстремум целевого функционала

$$\hat{\mathbf{c}}_p = arg\{ \max_{\mathbf{c}_p} \; F(\mathbf{u}, \mathbf{c}_p) \} \qquad (4)$$

при ограничениях

$$\mathcal{G}_1 \, \mathbf{c}_p = 0, \quad \mathcal{G}_2 \, \mathbf{c}_p \leq 0, \qquad (5)$$

где $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ – некоторые операторы, содержащие в форме равенств и неравенств всю априорную информацию об объекте исследований (априорную базу знаний). Например, условия (5) могут определять некоторую допустимую область решений, за пределы которой значения оцениваемых параметров по априорным представлениям не должны выходить. В число ограничивающих условий могут входить и уравнения, учитывающие динамические свойства восстанавливаемых полей, ограничения технического характера и т. д.

Классическим методом оценивания, для которого необходима подобная регуляризация, является метод ОМП. В самом деле, этот метод со статистической точки зрения не является строго оптимальным, а обладает лишь асимптотической оптимальностью для сильных сигналов. Вся идеология построения метода ОМП исходит из того, что апостериорное распределение оцениваемых величин $p(\mathbf{c}_p/\mathbf{u})$ значительно острее априорного $p(\mathbf{c}_p)$. Поскольку с точностью до несущественного множителя функционал правдоподобия связан с апостериорным распределением соотношением

$$p(\mathbf{u}/\mathbf{c}_p) = k_1 \, \frac{p(\mathbf{c}_p/\mathbf{u})}{p(\mathbf{c}_p)} \, ,$$

то при указанных условиях конкретный вид априорного распределения несущественен и эффективность метода ОМП практически такая же, как и метода МАВ. Однако, применительно к обратным задачам эта схема рассуждений обычно не срабатывает. В этом случае в силу указанных выше факторов значительного обострения апостериорного распределения по сравнению с априорным может и не произойти. В результате асимптотическая оптимальность метода ОМП не проявится и возникнут все те проблемы, связанные с неустойчивостью, о которых шла речь выше.

Существенно иная ситуация возникает тогда, когда оцениваемые величины полагаются случайными. В этом случае изменяется само понятие о том, что такое априорная информация об исследуемом явлении. Действительно, если некие величины, процессы или поля случайны, то максимум того, что о них можно априори знать, это их распределение вероятностей (отношение вероятностных мер в бесконечномерном случае). Любые другие уточнения не нужны, так как они либо полностью охватываются априорными распределениями, либо, в случае несогласованности с ними, лишь свидетельствуют о некорректности исходной статистической модели. Следовательно, те статистические процедуры оценивания, которые используют априорные распределения вероятностей, в принципе не могут быть неустойчивыми, так как в них по самой идеологии построения уже заложены наилучшие априорные критерии отбора решений. К классу таких процедур относятся, очевидно, все байесовские процедуры, включая и метод МАВ. В неустойчивой ситуации в методе МАВ всегда сохраняется принцип априорного предпочтения и флуктуации оценки принципиально не могут выйти за пределы априорных границ.

Однако для принятия гипотезы о случайности восстанавливаемого поля не всегда есть основания. Еще сложнее обосновать в конкретной ситуации выбор априорного распределения. С учетом этих обстоятельств постановку задачи восстановления поля скорости звука в виде условной экстремальной задачи (4), (5) можно рассматривать как некоторый компромисс между методом ОМП, который построен на отказе от априорного знания характеристик восстанавливаемого поля, и методом МАВ, который требует максимально полной априорной информации. Оценивание поля скорости звука идет согласно (4), (5) при том уровне априорной информации, который доступен. Если этой информации не достаточно для определения априорного распределения, то мы используем метод ОМП с дополняющими априорными критериями отбора. Если же база знаний (5) позволяет вычислить априорное распределение, то приходим к методу МАВ. Заметим, что и в методе МАВ возможны дополнительные ограничения, но уже не информационного, а технического характера, например, относящиеся к объему используемых ресурсов.

Решение оптимизационной задачи (4), (5) в функциональных пространствах сопряжено со значительными математическими и техническими трудностями. Поэтому для практического решения задачи целесообразно ее перевести из функциональных пространств в векторные. Этот прием в общей теории измерений принято называть алгебраизацией задачи [10]. Алгебраизация наблюдений $u(t,\mathbf{r})$ обычно производится путем их дискретизации по пространственным и временным (частотным) координатам. Это стандартная процедура, основанная на тех или иных версиях теоремы отсчетов (теоремы Котельникова) для пространственной, временной или спектральной областей [12]. Что же касается алгебраизации восстанавливаемого поля $c_p(\mathbf{r})$, то она обычно основана на его представлении в некотором счетном базисе:

$$c_p(\mathbf{r}) = \sum_k \gamma_k\, \varphi_k(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где γ_k – коэффициенты разложения, которые и подлежат оцениванию в результате выполнения томографического эксперимента.

Таким образом, в результате алгебраизации вместо задачи (4), (5) имеем условную экстремальную задачу

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = arg\{ \max_{\boldsymbol{\gamma}} \; F(\mathbf{u},\boldsymbol{\gamma}) \} \tag{7}$$

при ограничениях

$$\mathcal{Q}_1\,(\boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad \mathcal{Q}_2(\boldsymbol{\gamma}) \leq 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ разложения (6); $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ некоторые векторно-матричные функционалы.

Алгебраизация задачи восстановления поля имеет не только практическое, но и важнейшее принципиальное значение, так как позволяет существенно повысить устойчивость ее решения. В самом деле, при практическом решении задачи (7) в ряде (6) удерживается конечное число членов. Следовательно, размерность задачи резко понижается, что дает очевидный выигрыш с точки зрения требований по энергетическому потенциалу. Кроме того, усечение ряда (6) позволяет вести целенаправленный отбор тех элементов конечномерного базиса $\{\ \varphi_k\ \}_1^N$, которые соответствуют реально наблюдаемым компонентам восстанавливаемого поля и, тем самым, избежать сингулярности. Правда, ограничение числа членов разложения (6) неизбежно приводит к появлению систематической погрешности (смещения) оценки восстанавливаемого поля. Однако утрата несмещенности в обратных задачах не является главной проблемой: из-за неустойчивости решения несмещенные оценки в таких задачах, как правило, нереализуемы. Подробнее эти вопросы мы обсудим в разделе 4.

3. ПРОЦЕДУРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК ПОЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА

Методы решения оптимизационной задачи (4) с ограничениями (5) или ее конечномерного аналога (7), (8) составляют предмет нелинейного программирования [13]. Наиболее сложные проблемы при решении подобных задач возникают в тех случаях, когда целевой функционал $F(\ \cdot\ )$ мультимодален, т. е. содержит наряду с глобальным максимумом ряд меньших по уровню локальных максимумов ("боковых лепестков"). К сожалению, подобные ситуации для задач акустической томографии достаточно типичны.

Для преодоления указанных сложностей решение оптимизационной задачи целесообразно разбивать на ряд этапов с таким расчетом, чтобы после каждого этапа область возможных решений все более и более сужалась, охватывая глобальный максимум. На первых этапах лучше применять так называемые поисковые методы нулевого порядка, которые не требуют вычисления градиента целевого функционала: упорядоченный перебор, случайный поиск, покоординатный спуск, "генетический" алгоритм и т. д. Если в результате поисковых этапов область глобального максимума будет локализована, т. е. текущее приближение оценки окажется на "склоне" главного "лепестка", то следует переходить к методам первого порядка, использующим помимо значений оптимизируемого функционала и его градиент. К ним относятся наиболее эффективные в вычислительном отношении алгоритмы (скорейшего спуска, сопряженных направлений и т.д.), которые буквально за несколько шагов сужают до минимума область существования ближайшего экстремума. Некоторые разновидности градиентных алгоритмов позволяют "проскакивать" невысокие локальные максимумы [13]. Однако вблизи точки оптимума методы первого порядка подвержены переколебаниям. Поэтому на заключительных этапах целесообразно перейти (при наличии возможности) к методам второго порядка, которые в дополнение к градиенту используют и вторые производные целевого функционала.

Такова общая стратегия решения оптимизационных задач, к которым, как показано выше, сводятся в конечном итоге и задачи акустической томографии. Теперь рассмотрим некоторые примеры. Прежде уточним исходные модели. Будем рассматривать дискретную область приема, состоящую из акустических датчиков, которые расположены в точках с координатами $\mathbf{r}_m$, $m = 1,\ldots,M$. Кроме того, учтем что для однозначного представления спектра сигнала ограниченной длительности T в соответствии с теоремой отсчетов достаточно располагать его значениями на круговых частотах $\omega_l = \omega_H + (l-1)\Delta\omega$, где $l = 1,\ldots,L$; L – общее количество спектральных отсчетов в рабочей полосе $\omega \in (\omega_H, \omega_B)$; $\Delta\omega \le \pi/T$ – шаг дискретизации по частоте. Тогда алгебраизованная версия модели наблюдений (2) примет вид:

$$U(\omega_l, \mathbf{r}_m) = \theta \cdot S(\omega_l, \mathbf{r}_m) + N(\omega_l, \mathbf{r}_m), \quad l = 1,\ldots,L; \quad m = 1,\ldots,M. \tag{9}$$

Запишем функционал правдоподобия наблюдений (9), ограничившись конечномерной задачей (7), (8). В этом случае аргументом функционала правдоподобия является усеченный N-мерный вектор $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1,\ldots,\gamma_N\}$ коэффициентов разложения поля в ряд (6). Для конкретизации вида функционала правдоподобия $p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma})$ осталось задать лишь модель источника измерительного сигнала. Предположим, что излучаемый сигнал точно известен. Такая модель источника хотя и нереалистична, но позволяет проследить наиболее принципиальные особенности решения томографической задачи, не прибегая к громоздким выкладкам. Логарифм функционала правдоподобия наблюдений (9) для принятой модели источника описывается выражением:

$$\ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma}) = -M \cdot L \ln\pi - T \sum_{l=1}^{L} \ln \det \mathbf{K}_l - \mathbf{Re}\{ T \sum_{l=1}^{L} (\mathbf{u}_l - \theta\cdot\mathbf{s}_l)^{\dagger}\, \mathbf{K}_l^{-1} (\mathbf{u}_l - \theta\cdot\mathbf{s}_l) \}, \tag{10}$$

где $\mathbf{u}_l$ – вектор (матрица-столбец) наблюдений на l–ой частоте размерностью M, составленный из значений спектров принимаемого поля $U(\omega_l, \mathbf{r}_m)$ по всем точкам приема; $\mathbf{s}_l$ – составленный по аналогичному правилу вектор поля ожидаемого сигнала $S(\omega_l, \mathbf{r}_m)$; $\mathbf{K}_l$ – прогнозируемая матрица пространственных корреляций на частоте ω_l внешних акустических шумов и помех; † – символ сопряжения и транспонирования матриц; $\mathbf{Re}\{\cdot\}$ – символ вещественной части числа.

В функционале (10) от оцениваемого вектора параметров $\boldsymbol{\gamma}$ зависят, в принципе, сигнальные вектора $\mathbf{s}_l$ и корреляционные матрицы $\mathbf{K}_l$ ($l = 1,\ldots,L$). Однако в активной томографии основным информативным каналом является поле измерительного сигнала $S(\omega_l, \mathbf{r}_m)$. Корреляционные характеристики внешних шумов важны лишь с точки зрения повышения помехозащищенности системы приема. В частности, как показано в [14], согласование функционала обработки с полем помех обеспечивает значительное (до 10 раз) повышение точности оценивания поля скорости звука. В то же время, прогнозировать матрицу $\mathbf{K}_l$, которая зависит от многих компонент внешних шумов и помех, достаточно сложно. Поэтому в активной томографии целесообразно прибегнуть к адаптивной процедуре оценивания этого параметра. С учетом данных соображений будем полагать, что матрицы в функционале (10) представляют собой оценки, полученные при $\theta = 0$, т.е. в паузах излучения. Поскольку оценка матрицы $\mathbf{K}_l$ при этих условиях не зависит от гипотезы относительно значений вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{\gamma}$, то функционал (10) можно упростить:

$$\ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma}) = k_2 + 2\,\mathbf{Re}\{ T \sum_{l=1}^{L} (\mathbf{s}_l{}^{\dagger}\, \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{u}_l - \frac{1}{2} \mathbf{s}_l{}^{\dagger}\, \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{s}_l \}, \tag{11}$$

где k_2 – константа, не зависящая от $\boldsymbol{\gamma}$.

Задача оценивания поля скорости звука свелась к максимизации функционала (11) по вектору параметров $\boldsymbol{\gamma}$. Поисковые этапы решения этой задачи фактически не содержат акустической специфики. Все относящиеся к ним вопросы подробно рассмотрены в специализированных руководствах по теории оптимизации и математическому программированию [13]. Поэтому предположим, что в результате таких поисковых этапов на $(n-1)$-ом шаге получено приближение оценки $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)}$, которое находится в окрестности глобального максимума функционала правдоподобия. Последующее уточнение оценки требует вычисления градиента.

Продифференцировав (11) по компонентам вектора $\boldsymbol{\gamma}$, получим:

$$\nabla_\gamma \ln p(\mathbf{u}\boldsymbol{\gamma}) = 2\,\mathbf{Re}\,\{\,T\sum_{l=1}^{L}(\mathbf{W}_l{}^{\dagger}\,\mathbf{K}_l^{-1}(\mathbf{u}_l-\mathbf{s}_l)\,\},\quad(12)$$

где $\mathbf{W}_l = \partial \mathbf{s}_l/\partial\boldsymbol{\gamma}$ – матрица производных $M\times N$ сигнального вектора по вектору оцениваемых параметров, (mk)-ый элемент которой имеет вид:

$$(\mathbf{W}_l)_{mk} = \frac{\partial S(\omega_l,\mathbf{r}_m)}{\partial\gamma_k},\qquad m=1,\,\ldots,\,M;\quad k=1,\,\ldots,\,N.\quad(13)$$

Производную (13) можно вычислить следующим образом. Дадим k-ой компоненте γ_k вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{\gamma}$ приращение $\delta\gamma_k$. "Возмущенное" поле сигнала $\tilde{S}(\omega,\mathbf{r}) = S(\omega,\mathbf{r}) + \delta S(\omega,\mathbf{r})$ будет, очевидно, удовлетворять уравнению Гельмгольца (3), если вместо $c(\mathbf{r})$ в него подставить

$$\tilde{c}(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) + \delta\gamma_k\cdot\varphi_k(\mathbf{r}).$$

Учитывая малость вариации $\delta\gamma_k$, полученное таким образом уравнение несложно затем преобразовать к виду

$$[\,\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})}\,]\delta S(\omega,\mathbf{r}) = \delta\gamma_k\,\frac{2\,\omega^2\varphi_k(\mathbf{r})}{c^3(\mathbf{r})}\,\tilde{S}(\omega,\mathbf{r}).$$

Поделив обе части данного уравнения на $\delta\gamma_k$ и устремив приращение $\delta\gamma_k\to 0$, получим уравнение для частной производной $S'_{\gamma_k}(\omega,\mathbf{r}) = \partial S(\omega,\mathbf{r})/\partial\gamma_k$ поля сигнала по параметру γ_k:

$$[\,\Delta + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r})}\,]S'_{\gamma_k}(\omega,\mathbf{r}) = \frac{2\,\omega^2\varphi_k(\mathbf{r})}{c^3(\mathbf{r})}\,S(\omega,\mathbf{r}).$$

Интегрируя данное уравнение по исследуемой области среды, находим элементы матрицы (13):

$$(\mathbf{W}_l)_{mk} = \int\limits_{\mathcal{D}}[\,\frac{\delta\,S(\omega,\mathbf{r})}{\delta\,c_p(\mathbf{r}')}\,]\,\varphi_k(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',\qquad(14)$$

где

$$\frac{\delta\,S(\omega,\mathbf{r})}{\delta\,c_p(\mathbf{r}')} = \frac{2\,\omega^2}{c^3(\mathbf{r}')}\,G(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')\,S(\omega,\mathbf{r}')\quad —$$

вариационная производная поля сигнала по оцениваемому полю $c_p(\mathbf{r})$; $G(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – функция Грина океанического волновода.

Полученные соотношения позволяют записать конкретные алгоритмы оценивания вектора $\boldsymbol{\gamma}$. Если ограничения (8) отсутствуют, то необходимым условием экстремума является равенство нулю градиента (12). Следовательно, ОМП $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ вектора параметров $\boldsymbol{\gamma}$ является одним из решений уравнения

$$\nabla_\gamma \ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma})\Big|_{\boldsymbol{\gamma}=\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = 0.$$

Ввиду нелинейности данного уравнения его целесообразно решать методом итераций [13]:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)} + \boldsymbol{\Gamma}^{(n)}\,\nabla_\gamma \ln p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma})\Big|_{\boldsymbol{\gamma}=\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)}},\quad(15)$$

где $\boldsymbol{\Gamma}^{(n)}$ – матрица итеративных коэффициентов для n-го шага.

Анализ условий сходимости итеративной процедуры (15) и выбор итеративной матрицы $\boldsymbol{\Gamma}^{(n)}$ в общем нелинейном случае представляют собой самостоятельную и весьма сложную проблему, которая выходит далеко за рамки собственно акустической томографии. В частности, подобным задачам посвящен такой обширный раздел общей теории управления, как теория устойчивости динамических систем [15]. Однако задача значительно упрощается, если наложить ограничение на величину очередного шага. Для этого вместо безусловной максимизации функционала правдоподобия (11) рассмотрим задачу на условный экстремум с ограничением вида

$$(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)})^{\dagger}\,\mathbf{Q}^{(n-1)}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)}) \le \beta^{(n)},\quad(16)$$

где $\mathbf{Q}^{(n-1)}$ – некоторая симметричная положительно определенная матрица, $\beta^{(n)}$ – заданная константа. Условие (16) определяет некоторый эллипсоид рассеяния, ограничивающий диапазон возможных решений на следующей итерации. В простейшем случае $Q^{(n-1)}$ можно выбрать равным единичной матрице $\mathbf{I}$. Тогда условие (16) ограничивает общую энергию возможного приращения.

Ввиду малости приращения $(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)})$ для текущей оценки сигнального вектора $\mathbf{s}_l^{(n)}$, соответствующего значению параметров среды $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)}$, можно воспользоваться линейным приближением:

$$\mathbf{s}_l^{(n)} \cong \mathbf{s}_l^{(n-1)} + \mathbf{W}_l^{(n-1)}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(n-1)}).\qquad(17)$$

Данное разложение является конечномерным аналогом борновского приближения для поля сигнала, рассеянного в неоднородной среде.

Решение задачи максимизации функционала обработки (11) по $\hat{\gamma}^{(n)}$ с ограничением (16) и с учетом разложения (17) приводит к уравнению вида:

$$(\mathbf{A}^{(n-1)}+\alpha^{(n)}\,\mathbf{Q}^{(n-1)})(\hat{\gamma}^{(n)}-\hat{\gamma}^{(n-1)})=\mathbf{f}^{(n-1)}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{A}^{(n-1)}=\sum_{l=1}^{L}(\mathbf{W}_l^{(n-1)})^{\dagger}\,\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{W}_l^{(n-1)} \quad — \quad (19)$$

матрица $N\times N$ коэффициентов на $(n-1)$-ом шаге;

$$\mathbf{f}^{(n-1)}=\sum_{l=1}^{L}(\mathbf{W}_l^{(n-1)})^{\dagger}\,\mathbf{K}_l^{-1}(\mathbf{u}_l-\mathbf{s}_l^{(n-1)}) \quad — \quad (20)$$

матрица-столбец правых частей; $\alpha^{(n)}$ – множитель Лагранжа.

Из уравнения (18) следует итеративная процедура

$$\hat{\gamma}^{(n)}=\hat{\gamma}^{(n-1)}+(\mathbf{A}^{(n-1)}+\alpha^{(n)}\,\mathbf{Q}^{(n-1)})^{-1}\,\mathbf{f}^{(n-1)}, \quad (21)$$

где неотрицательную константу $\alpha^{(n)}$ необходимо подбирать таким образом, чтобы при минимальном ее значении на каждом шаге выполнялось ограничение (16).

Алгоритм (21) можно интерпретировать следующим образом. На каждой итерации вычисляем нерегуляризованное решение

$$\hat{\gamma}^{(n)}=\hat{\gamma}^{(n-1)}+(\mathbf{A}^{(n-1)})^{-1}\,\mathbf{f}^{(n-1)}. \quad (22)$$

Если это решение существует и удовлетворяет условию (16) (ограничение неактивное), то значение константы $\alpha^{(n)}$ следует принять равным нулю и перейти к следующей итерации. Если же решение (22) не существует (матрица (19) плохо обусловлена) либо условие (16) на текущем шаге не выполнилось (ограничение активное), то следует использовать регуляризованное решение (21). При этом значение $\alpha^{(n)}\geq 0$ надо последовательно увеличивать до тех пор, пока неравенство (16) не начнет выполняться. Ограничение величины шага при итеративном решении уравнения (15) конечно снижает скорость сходимости. Поэтому предложенный метод целесообразно применять на заключительных стадиях решения задачи.

Как указывалось выше, регуляризацию решения обратной томографической задачи можно осуществить и не прибегая к дополнительным ограничениям, если воспользоваться методом МАВ. Для этого теперь предположим, что среда случайна. Это значит, что случайны и оцениваемые коэффициенты разложения $\boldsymbol{\gamma}$. Примем для этих коэффициентов нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием:

$$p(\boldsymbol{\gamma})=k_3\exp\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}\,\mathbf{B}^{-1}\,\boldsymbol{\gamma}\},$$

где $\mathbf{B}=\langle\,\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}\,\rangle$ – корреляционная матрица вектора $\boldsymbol{\gamma}$.

Тогда логарифм апостериорного распределения оцениваемых параметров имеет вид:

$$\ln p(\boldsymbol{\gamma}/\mathbf{u})=k_4-\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{\dagger}\,\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\gamma}+$$
$$+2\,\mathbf{Re}\{\,T\sum_{l=1}^{L}(\mathbf{s}_l{}^{\dagger}\,\mathbf{K}_l^{-1}\mathbf{u}_l-\frac{1}{2}\,\mathbf{s}_l{}^{\dagger}\,\mathbf{K}_l^{-1}\,\mathbf{s}_l\},$$

где k_4 – константа, не зависящая от $\boldsymbol{\gamma}$.

Максимизация этого функционала с учетом представления (17) приводит к решению

$$\hat{\gamma}^{(n)}\simeq\hat{\gamma}^{(n-1)}+(\mathbf{A}^{(n-1)}+\frac{1}{2}\,\mathbf{B}^{-1})^{-1}\,\mathbf{f}^{(n-1)}.$$

Как видно из данного выражения, регуляризующую роль в методе МАВ выполняет априорная корреляционная матрица оцениваемых параметров $\mathbf{B}$, которая и определяет допустимый эллипсоид рассеяния. При этом в отличие от предыдущего подхода не требуется подбора регуляризующей константы.

4. ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА

При оценивании поля скорости звука возможны погрешности трех основных типов: аномальная, систематическая и флюктуационная.

Аномальные ошибки возникают в тех ситуациях, когда вследствие воздействия помех глобальный максимум функционала обработки оказывается в зоне "боковых лепестков" его функции неопределенности (ФН)

$$\Psi\,(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}^{\circ})=\langle\,F(\mathbf{u},\boldsymbol{\gamma})/\boldsymbol{\gamma}^{\circ}\,\rangle, \quad (23)$$

где $\langle\,\cdot\,/\boldsymbol{\gamma}^{\circ}\,\rangle$ – символ условного статистического усреднения по ансамблю входных наблюдений, соответствующих значению параметров среды $\boldsymbol{\gamma}^{\circ}$.

Точный расчет вероятности аномальных ошибок сопряжен с большими трудностями. Однако наглядное представление об опасности такого рода ошибок можно получить на основе анализа ФН (23). Если ФН имеет ярко выраженный основной максимум в точке, где параметры настройки

$\boldsymbol{\gamma}$ совпадают с истинными параметрами среды $\boldsymbol{\gamma}^\circ$, а уровни "боковых" максимумов на порядок ниже основного, то для тех отношений сигнал/помеха, при которых возможны реальные измерения, вероятность аномальных ошибок, как правило, ничтожно мала. Если же уровни "боковых лепестков" мало уступают по величине уровню глобального максимума ФН, то это свидетельствует о некорректном плане эксперимента. В этом случае следует так изменить его условия (взаимное положение излучающих и приемных антенн, их параметры, вид и параметры излучаемых сигналов и т. д.), чтобы добиться желаемых свойств ФН.

Рассмотрим погрешности других типов. Если $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ – вектор оценок первых N коэффициентов разложения (6) поля скорости звука $c_p(\mathbf{r})$, то оценка $\hat{c}_p(\mathbf{r})$ самого поля имеет вид:

$$\hat{c}_p(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^\dagger\, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}), \qquad (24)$$

где $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})$ – N-мерная вектор-функция, которая при каждом фиксированном значении аргумента $\mathbf{r}$ представляет собой матрицу-столбец, составленную из соответствующих значений элементов усеченного базиса $\{\varphi_k(\mathbf{r})\}_1^N$. Ограничимся ортонормированными в области $\mathcal{D}$ базисами, для которых

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})\, \boldsymbol{\Phi}^\dagger(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \mathbf{I}_N, \qquad (25)$$

где $\mathbf{I}_N$ – единичная матрица порядка N.

Запишем средний квадрат отклонения оценки поля $\hat{c}_p(\mathbf{r})$ от истинного поля $c_p^\circ(\mathbf{r})$:

$$d_c^2(\mathbf{r}) = \langle\, (\hat{c}_p(\mathbf{r}) - c_p^\circ(\mathbf{r}))^2\, \rangle. \qquad (26)$$

Истинное поле согласно (6) может быть представлено в виде

$$c_p^\circ(\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\gamma}^\circ)^\dagger\, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) + \tilde{c}_p(\mathbf{r}), \qquad (27)$$

где

$$\boldsymbol{\gamma}^\circ = \int\limits_{\mathcal{D}} c_p^\circ(\mathbf{r})\, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \; -$$

истинные значения оцениваемых коэффициентов разложения; $\tilde{c}_p(\mathbf{r})$ – остаточная часть разложения.

Предположим, что оценка $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ несмещенная, т. е.

$$\langle\, \hat{\boldsymbol{\gamma}} \,/\, \boldsymbol{\gamma}^\circ\, \rangle = \boldsymbol{\gamma}^\circ.$$

Тогда, подставив (24) и (27) в (26), с учетом данного условия получим:

$$d_c^2(\mathbf{r}) = \sigma_c^2(\mathbf{r}) + (\tilde{c}_p(\mathbf{r}))^2, \qquad (28)$$

где

$$\sigma_c^2(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Phi}^\dagger(\mathbf{r})\, \mathbf{R}_\gamma \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) \;\; — \qquad (29)$$

флюктуационная часть погрешности;

$$\mathbf{R}_\gamma = \langle\, (\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}^\circ)(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}^\circ)^\dagger\, \rangle \;\; — \qquad (30)$$

корреляционная матрица вектора оценок коэффициентов разложения поля скорости звука. Заметим, что второе слагаемое в (28) представляет собой систематическую ошибку (смещение оценки), обусловленную усечением ряда (6).

Для корреляционной матрицы (30) оценки вектора коэффициентов справедливо неравенство Рао–Крамера [12]:

$$\mathbf{R}_\gamma \geq \mathbf{A}_\gamma^{-1}, \qquad (31)$$

где $\mathbf{A}_\gamma$ – информационная матрица Фишера с компонентами

$$(\mathbf{A}_\gamma)_{ik} = -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial\gamma_i\, \partial\gamma_k} \ln\, p(\mathbf{u}/\boldsymbol{\gamma}) \right\rangle \Bigg|_{\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}^\circ}. \qquad (32)$$

Следовательно, в соответствии с (29) и (31) нижняя граница флюктуационной ошибки определяется неравенством

$$\sigma_c^2(\mathbf{r}) \geq \boldsymbol{\Phi}^\dagger(\mathbf{r})\, \mathbf{A}_\gamma^{-1} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}). \qquad (33)$$

Если в томографическом эксперименте неконтролируемые факторы отсутствуют, то функционал правдоподобия описывается выражением (11). Подставив это выражение в формулу (32) и выполнив необходимые вычисления, получим:

$$\mathbf{A}_\gamma = \sum_{l=1}^{L} (\mathbf{W}_l^\circ)^\dagger\, \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{W}_l^\circ, \qquad (34)$$

где $\mathbf{W}_l^\circ$ – матрица производных (13) поля сигнала по коэффициентам $\boldsymbol{\gamma}$, вычисленная в точке $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\circ$. Из сопоставления выражений (19) и (34) нетрудно видеть, что информационная матрица задачи совпадает с финальным значением матрицы коэффициентов (19) уравнения (18) для сходящихся процедур оценивания.

Воспользовавшись выражением (14), матрицу (34) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{A}_\gamma = \iint\limits_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}')\, I_c(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \boldsymbol{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}'')\, d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \qquad (35)$$

где

$$I_c(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m_1=1}^{M} \sum_{m_2=1}^{M} \frac{\delta\, S^*(\omega_l, \mathbf{r}_{m_1})}{\delta\, c_p(\mathbf{r}')} \times$$
$$\times (\mathbf{K}_l^{-1})_{m_1 m_2} \frac{\delta\, S(\omega_l, \mathbf{r}_{m_2})}{\delta\, c_p(\mathbf{r}'')} \;\; —$$

ядро информационного оператора Фишера для континуальной задачи оценивания поля скорости звука.

С учетом соотношения (35) неравенство (33) примет вид:

$$\sigma_c^2(\mathbf{r}) \geq \mathbf{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}') \times \right. \\ \left. \times I_c(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \, \mathbf{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}'') \, d\mathbf{r}' \, d\mathbf{r}'' \right)^{-1} \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}) \,. \qquad (36)$$

Нижняя граница ошибки (36) в числе прочих факторов зависит и от вида базисных функций $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$. Известны различные подходы к выбору данного базиса. В основополагающих работах по акустической томографии океана [1, 2] использовались разложения по модам поля скорости звука. В ряде последующих работ [4, 5] применялись так называемые эмпирические ортогональные функции. Однако во всех этих работах исходили лишь из физических свойств восстанавливаемого поля и не учитывали процедуру статистических измерений. В то же время, в теории восстановления изображений известен [9] принципиально иной подход: разложение изображения на так называемые "главные компоненты", под которыми понимаются собственные функции информационного оператора Фишера. Такое разложение позволяет наиболее экономно описать оцениваемое поле, так как в расчет принимаются только те его составляющие, которые при заданной процедуре измерения можно реально восстановить.

Применим указанный подход к задаче оценивания поля скорости звука. Пусть базис $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$ является решением векторного интегрального уравнения

$$\int_{\mathcal{D}} I_c(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \, \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' = \mathbf{\Lambda} \, \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}'') \,, \qquad (37)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ информационного оператора Фишера. Кроме уравнения (37), базис $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию ортонормированности (25). Нетрудно показать, что собственные функции уравнения (37) обеспечивают минимальное значение нижней границы флюктуационной ошибки (36) оценивания поля скорости звука, усредненной по исследуемой области среды $\mathcal{D}$:

$$\overline{\sigma_c^2} = \int_{\mathcal{D}} \sigma_c^2(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \,. \qquad (38)$$

При этом минимальное значение ошибки (38) равно

$$(\overline{\sigma_c^2})_{\min} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k} \,. \qquad (39)$$

Принцип отбора "главных компонент" [9] состоит в том, что в базис $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$ включаются собственные функции уравнения (37), которые соответствуют N максимальным собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. При заданной размерности базиса такой отбор обеспечивает, очевидно, минимизацию средней флюктуационной ошибки (39). Однако, как показано выше, кроме флюктуационной имеется и систематическая погрешность, возникающая в результате усечения разложения (6). Поэтому данный принцип отбора необходимо скорректировать.

Разложим остаточную часть $\widetilde{c}_p(\mathbf{r})$ поля (27) по собственным функциям уравнения (37), не вошедшим в конечномерный базис $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$. Тогда после усреднения систематической погрешности по области $\mathcal{D}$ с учетом условия (25) получим:

$$\overline{(\widetilde{c}_p)^2} = \int_{\mathcal{D}} (\widetilde{c}_p(\mathbf{r}))^2 \, d\mathbf{r} = \sum_{N+1}^{\infty} (\gamma_k^\circ)^2 \,. \qquad (40)$$

Рассмотрим множество оценок, для которых систематическая ошибка (40) фиксирована. Тогда в пределах этого множества нижняя граница средней результирующей ошибки будет, очевидно, определяться суммой выражений (39) и (40), т.е.

$$(\overline{d_c^2})_{\min} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{N+1}^{\infty} (\gamma_k^\circ)^2 \,. \qquad (41)$$

Из анализа выражения (41) следуют важные выводы, а именно: если некоторая k-ая собственная функция уравнения (37) входит в усеченный базис $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$, то это уменьшает систематическую часть результирующей погрешности на $(\gamma_k^\circ)^2$, но увеличивает ее флюктуационную часть на $1/\lambda_k$. Исключение же этой функции из базиса $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$ уменьшает на $1/\lambda_k$ флюктуационную часть результирующей ошибки, но увеличивает систематическую часть на $(\gamma_k^\circ)^2$. Поэтому критерием для отбора собственных функций оператора Фишера в состав усеченного базиса является выполнение неравенства

$$(\gamma_k^\circ)^2 \lambda_k > 1, \quad k = 1, 2, \ldots \,. \qquad (42)$$

Если при некотором k данное неравенство не выполняется, то это свидетельствует о том, что соответствующую собственную функцию в базис $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$ выгоднее не включать, чем включать. Таким образом, условие (42) обобщает принцип отбора "главных компонент" с учетом не только флюктуационной, но и систематической части результирующей погрешности восстановления поля скорости звука. При этом левую часть соотношения (42) можно интерпретировать как своего рода отношение сигнал/помеха для k-ой компоненты.

Число собственных функций уравнения (37), вообще говоря, бесконечно. Однако условию (42) могут удовлетворить не более N_0 из них, где $N_0 < ML$. (Реально $N_0 \ll ML$). Следовательно, при конечном числе акустических приемников, конечном времени наблюдения и конечной рабочей полосе число собственных функций информационного оператора задачи, удовлетворяющих условию (42), всегда конечно. Данное обстоятельство позволяет говорить о существовании оптимальной размерности N_0 базиса $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$, так как отступление от величины N_0 как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения приводит к возрастанию результирующей погрешности (41). Таким образом, усечение разложения (6) поля скорости звука необходимо не только из практических соображений, но и для уменьшения результирующей погрешности оценивания. Заметим также, что оптимальный размер базиса N_0 можно было бы назвать эффективным рангом задачи. Этот параметр наряду с результирующей погрешностью измерений (26) может быть важной характеристикой качества томографического эксперимента: чем величина N_0 больше, тем более тонкие детали поля скорости звука мы можем потенциально “рассмотреть”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Акустическая томография океана представляет собой большую и комплексную научную проблему на стыке акустики и гидрофизики, которая для своего решения требует кроме чисто акустических подходов привлечения и методологии других наук, в частности, статистической теории оценивания, статистической теории восстановления изображений, теории оптимизации и математического программирования, теории устойчивости, теории планирования экспериментов и т. п.

Особая сложность решения томографических задач связана с некорректностью их постановки. В этой связи целесообразно воспользоваться статистическими подходами к решению этой проблемы и рассматривать задачу восстановления гидрофизических характеристик океанической среды в виде условной экстремальной задачи, где роль целевого функционала выполняет некоторая тестовая статистика наблюдаемых данных, обладающая избирательностью к оцениваемым параметрам. Ограничения этой экстремальной задачи представляют собой априорную базу знаний о характеристиках исследуемой среды, сформулированные в виде операторных и функциональных соотношений. В число условий могут входить и ограничения технического характера.

Данная постановка является промежуточной между двумя наиболее известными методами статистического оценивания: максимума апостериорной вероятности, который требует полной априорной информации о вероятностных характеристиках восстанавливаемых полей, и метода оценок максимального правдоподобия, который построен на отказе от знания таких характеристик. В предлагаемой постановке оценивание восстанавливаемого поля идет при том уровне априорной информации, который доступен. Благодаря введению априорных критериев отбора обеспечивается устойчивость оценок и повышается их качество.

Общая стратегия решения обратных томографических задач включает в себя ряд этапов, отличающихся методами поиска глобального экстремума целевого функционала. На начальных этапах целесообразно использовать поисковые алгоритмы нулевого порядка. После локализации области глобального максимума наиболее эффективны градиентные алгоритмы. Наконец, на заключительных этапах можно рекомендовать использование предложенной в работе итеративной процедуры отыскания оптимума с линеаризацией градиента целевого функционала при ограничении величины очередного шага.

Для оценки качества томографических экспериментов целесообразно использовать по крайней мере, три показателя, а именно:

- результирующую ошибку оценивания, которая учитывает как влияние помех, так и систематические погрешности;
- уровень “боковых лепестков” тестовой статистики по выбранной системе параметров, который характеризует опасность аномальных ошибок;
- эффективный ранг задачи, который является показателем информационной ценности планируемого эксперимента.

Флюктуационные и систематические погрешности оценивания поля скорости звука в значительной мере зависят от выбора исходного базиса его представления. Статистический подход к выбору базиса позволяет учесть как физические особенности задачи, так и конкретную процедуру измерений. При этом оказывается возможным обеспечить наиболее экономное описание восстанавливаемого поля и минимально возможную для принятого плана эксперимента результирующую ошибку измерений. Оптимальный по статистическим критериям базис должен формироваться из собственных функций информационного оператора Фишера. Известный в теории восстановления изображений принцип отбора "главных компонент" может быть обобщен с учетом не только флюктуационной, но и систематической погрешности измерений. При этом существует оптимальная размерность исходного базиса представления поля скорости звука, которая обеспечивает минимизацию результирующей погрешности.

В заключение заметим, что рассмотренная статистическая методология имеет достаточно общий характер и может использоваться не только в области акустической томографии океана, но и для решения родственных по постановке задач, например, из области медицинской и технической диагностики.

1. *Munk W., Wunsch C.* Ocean acoustic tomography: a scheme for large scale monitoring // Deep-Sea Res.– 1979.– 26A(2).– P. 123–161.
2. *Shang E. C.* Ocean acoustic tomography based on adiabatic mode theory // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– **85**.– P. 1531–1573.
3. *Tolstoy A., Diachok O., Frazer L.N.* Acoustic tomography via matched field processing // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– **89**.– P. 1119–1127.
4. *Tolstoy A.* Linearization of the matched field processing approach to acoustic tomography // J. Acoust. Soc. Amer.– 1992.– **91**.– P. 781–789.
5. *Goncharov V. V., Voronovich A. G.* An experiment on matched-field acoustic tomography with continuous wave signals in the Norway Sea // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– **93**.– P. 1873–1881.
6. *Бородин В. В.* Статистический подход в задаче томографии океана. Границы Крамера-Рао точности восстановления поля скорости звука // Акуст. журн.– 1994.– **40**.– С. 909–914.
7. *Jones R. M., Georges T. M.* Nonperturbative ocean acoustic tomography inversion // J. Acoust. Soc. Amer.– 1994.– **96**.– P. 439–451.
8. *Бородин В. В., Минасян Г. Р.* О пределах применимости модовой, лучевой и интерференционной томографии // Акуст. журн.– 1995.– **41**.– С. 34–44.
9. *Теребиж В. Ю.* Восстановление изображений при минимальной априорной информации // Успехи физических наук.– 1995.– **165**.– С. 143–176.
10. *Манькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В.* Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием.– М.: Радио и связь, 1989.– 296 с.
11. Акустика океана / Ред. акад. Л. М. Бреховских.– М.: Наука, 1974.– 695 с.
12. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1.– М.: Сов.радио, 1972.– 744 с.
13. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.– М.: Наука, 1982.– 432 с.
14. *Калюжный А. Я., Красный Л. Г.* Адаптивная акустическая томография // Труды 3-й Европейской конференции по подводной акустике.– Гераклион, Крит, Греция, 24–28 июня 1996.– С. 827–832.
15. *Брайсон А., Хо Ю–ши* Прикладная теория оптимального управления. Пер. с англ.– М.: Мир, 1972.– 544 с.